УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ

ПЕДАГОШКИ ФАКУЛТЕТ У УЖИЦУ

Јелена Р. Стојкановић

КОГНИТИВНО-ВИЗУЕЛНИ ПРИСТУП У РАЗВИЈАЊУ КОМПЕТЕНЦИЈА УЧЕНИКА ЗА РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ У МЛАЂИМ РАЗРЕДИМА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ

докторска дисертација

Ужице, 2026.

UNIVERSITY OF KRAGUJEVAC
FACULTY OF EDUCATION IN UŽICE

Jelena R. Stojkanović

COGNITIVE-VISUAL APPROACH IN DEVELOPING STUDENTS' COMPETENCIES FOR SOLVING PROBLEMS IN MATHEMATICS TEACHING IN YOUNGER GRADES OF ELEMENTARY SCHOOL

Doctoral Dissertation

Užice, 2026.

Аутор
Име и презиме: Јелена Стојкановић
Датум и место рођења: 02. 08. 1979. Ужице
Садашње запослење: Гимназија „Јосиф Панчић“
Докторска дисертација
Наслов: Когнитивно-визуелни приступ у развијању компетенција ученика за решавање проблема у настави математике у млађим разредима основне школе
Број страница: 244
Број слика: 55 слика, 45 табела, 6 графикона
Број библиографских података: 248
Установа и место где је рад израђен: Педагошки факултет у Ужицу Универзитета у Крагујевцу
Научна област (УДК): Педагошке и андрагошке науке 371.3
Ментор: др Сања Маричић, редовни професор за ужу научну област Методика наставе мнатематике, Педагошки факултет у Ужицу Универзитета у Крагујевцу
Број и датум одлуке Већа универзитета о прихватању теме докторске дисертације: 07 – 14/1 од 17. 09. 2024.

Највећу захвалност дугујем менторки, проф. др Сањи Маричић, на изузетном стручном вођењу, драгоценим саветима и континуираној подршци током свих фаза израде ове докторске дисертације.

Посебно захваљујем својим родитељима на подршци, вери и свему што су уложили у моје образовање и развој.

Дубоку захвалност дугујем својој породици, супругу и синовима Матији и Дамјану, на љубави, стрпљењу и разумевању током овог изазовног процеса. Њихова подршка била је мој највећи ослонац.

Јелена Стојкановић

У Ужицу, август 2026. год.

Апстракт

Предмет рада је креирање и истраживање ефеката примена методичког приступа заснованог на когнитивно-визуелном приступу развијању компетенција ученика за решавање математичких проблема у млађим разредима основне школе. У теоријском делу рада указано је на значај и потребу развијања компетенција ученика за решавање проблема и улогу визуелних репрезентација у том процесу, вишеструких репрезентација са акцентом на визуелизацију као и когнитивне активности детета потребне за математику. Анализиран је когнитивно-визуелни приступ као савремена дидактичко-методичка концепција, његове предности и изазови примене у развијању компетенција ученика за решавање проблема у области аритметике и алгебре. На бази тога развијени су методички модели погодни за креирање визуелних репрезентација у оквиру когнитивно-визуелног приступа.

Емпиријски део дисертације има за циљ да утврдити ефекте примене когнитивно-визуелног приступа на развој компетенција ученика за решавање проблема у области аритметике и алгебре, као и на развој компетенција ученика за визуелизацију проблема. Поред тога утврдили смо и утицај поменутог приступа на развијање позитивних ставова ученика према решавању проблемских задатака, мотивацији за решавање проблемских задатака и коришћењу визуелних модела при решавању математичких проблема.

Добијени резултати показују да когнитивно-визуелни приступ проблему из области аритметике и алгебре позитивно утиче на развој компетенција ученика за његово решавање. Утврђено је да позитивни ефекти примене наведеног приступа не зависе ни од пола нити од оцене ученика зато препоручујемо његову примену у млађим разредима основне школе јер помаже ученицима да боље разумеју задатак и лакше прећу са апстрактног на конкретни запис и обрнуто што их води ка решењу проблема.

Кључне речи: *когнитивно-визуелни приступ, математички проблем, моделовање, репрезентација, визуелизација, цртеж, шематизација, алгебарско мишљење*

Abstract

The subject of the paper is the creation and research of the effects of applications of methodical approach based on cognitive-visual framework for developing of students' competences in solving mathematic problems in younger grades of primary school. The theoretical part of the paper emphasizes the importance and necessity of developing students' problem-solving competencies, multiple representations with emphasis on visualization and child's cognitive activities needed for mathematics. It analyses the cognitive-visual approach as a contemporary didactic-methodological concept, its advantages and the challenges associated with its application in development of students' competencies for problem solving in the fields of arithmetic and algebra. On this basis, the methodological models suitable for creating visual representations within the framework of the cognitive-visual approach were developed.

The empirical part of the dissertation aims to determine the effects of applying a cognitive-visual approach on the development of students' problem-solving competencies in arithmetic and algebra areas, as well as on the development of students' competences in the problem visualization skills. Furthermore, we studied the impact of this approach on fostering positive student attitudes toward problem-solving tasks, motivation for problem-solving, and the use of visual models when solving mathematical problems.

The results obtained indicate that a cognitive-visual approach to problem in area of arithmetic and algebra positively influences the development of students' problem-solving competencies. It was found that the positive effects of application of this approach are independent of both gender and student grades, therefore, we recommend its application in the younger grades of primary school, as it helps students to better understand the task and eases the transition from abstract to concrete representations and vice versa thereby leading them toward the solution.

Keywords*: cognitive-visual approach, mathematical problem, modelling, representation, visualization, drawing, schematization, algebraic thinking*

“Решење великог проблема, велико је откриће, али и у решавању било ког проблема постоји зрно открића. Проблем може бити скроман; али ако изазива твоју радозналост и покреће досетљивост, и ако га решаваш сопственим снагама, доживећеш напетост и уживати у тријумфу открића. Таква искуства у осетљивом животном добу могу створити љубав према интелектуалном раду и оставити свој печат на ум и карактер за цео живот. Стога, наставник математике има велику прилику.”

(Pólya, 1945)

САДРЖАЈ

I ТЕОРИЈСКИ ОКВИР ИСТРАЖИВАЊА 1

1. РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА КАО ЦИЉ И ИСХОД НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ 2

1.1. Стратегије решавања математичких проблема 6

1.2. Способности ученика кључне за решавање математичких проблема: когнитивни, социокултурни и семиотички приступ 11

1.3. Специфичности решавања математичких проблема – потреба за репрезентацијама 18

1.4. Појам, значај и подела репрезентација 20

2. КОГНИТИВНО–ВИЗУЕЛНИ ПРИСТУП РЕШАВАЊУ ПРОБЛЕМА У МАТЕМАТИЦИ 24

2.1. Визуелизација у настави математике - настанак идеје и појмовно одређење 25

2.2. Значај визуелне репрезентације при решавању математичких проблема 28

2.3. Вишеструке репрезентације којима се подржава когнитивно-визуелни приступ 30

2.4. Квадратна мрежа у когнитивно-визуелном приступу решавању проблема 35

3. МЕТОДИЧКИ ОКВИР ПРИМЕНЕ КОГНИТИВНО–ВИЗУЕЛНОГ ПРИСТУПА У СТИЦАЊУ КОМПЕТЕНЦИЈА УЧЕНИКА ЗА РЕШАВАЊЕ МАТЕМАТИЧКИХ ПРОБЛЕМА 43

3.1. Развој компетенција ученика за решавање математичких проблема уз когнитивно-визуелни приступ 46

3.2. Моделовање као дидактичка основа за креирање визуелних репрезентација у настави аритметике и алгебре 48

3.3. Улога учитеља при креирању и коришћењу когнитивно-визуелног приступа у развијању компетенција ученика за решавање проблема 75

4. ПРЕГЛЕД ДОСАДАШЊИХ ИСТРАЖИВАЊА 79

II МЕТОДОЛОШКИ ОКВИР ИСТРАЖИВАЊА 93

1. ПРОБЛЕМ И ПРЕДМЕТ ИСТРАЖИВАЊА 94

2. ЦИЉ И ЗАДАЦИ ИСТРАЖИВАЊА 97

3. ХИПОТЕЗЕ ИСТРАЖИВАЊА 98

4. ВАРИЈАБЛЕ ИСТРАЖИВАЊА 99

5. УЗОРАК ИСТРАЖИВАЊА 100

6. МЕТОДЕ, ТЕХНИКЕ И ИНСТРУМЕНТИ ИСТРАЖИВАЊА 102

7. ПРОВЕРА МЕТРИЈСКИХ КАРАКТЕРИСТИКА ИНСТРУМЕНАТА ИСТРАЖИВАЊА 105

8. ОРГАНИЗАЦИЈА И ТОК ИСТРАЖИВАЊА 108

9. СТАТИСТИЧКА ОБРАДА ПОДАТАКА 110

III РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА И ЊИХОВА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА 111

1. УТИЦАЈ КОГНИТИВНО-ВИЗУЕЛНОГ ПРИСТУПА НА РАЗВИЈАЊЕ КОМПЕТЕНЦИЈА УЧЕНИКА ЗА РЕШАВАЊЕ МАТЕМАТИЧКИХ ПРОБЛЕМСКИХ ЗАДАТАКА 112

1.1. Утицај когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција ученика за решавање математичких проблема у зависности од пола 118

1.2. Утицај когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција ученика за решавање математичких проблема у зависности од оцене из математике 122

2. УТИЦАЈ КОГНИТИВНО-ВИЗУЕЛНОГ ПРИСТУПА НА РАЗВИЈАЊЕ КОМПЕТЕНЦИЈА УЧЕНИКА ЗА РЕШАВАЊЕ АРИТМЕТИЧКИХ ПРОБЛЕМА 126

2.1. Утицај когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција ученика за решавање аритметичких проблема у зависности од пола 132

2.2. Утицај когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција ученика за решавање аритметичких проблема у зависности од оцене из математике 135

3. УТИЦАЈ КОГНИТИВНО-ВИЗУЕЛНОГ ПРИСТУПА НА РАЗВИЈАЊЕ КОМПЕТЕНЦИЈА УЧЕНИКА ЗА РЕШАВАЊЕ АЛГЕБАРСКИХ ПРОБЛЕМА 142

3.1. Утицај когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција ученика за решавање алгебарских проблема у зависности од пола 148

3.2. Утицај когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција ученика за решавање алгебарских проблема у зависности од оцене из математике 150

4. УТИЦАЈ КОГНИТИВНО-ВИЗУЕЛНОГ ПРИСТУПА НА РАЗВИЈАЊЕ КОМПЕТЕНЦИЈА УЧЕНИКА ЗА ВИЗУЕЛИЗАЦИЈУ ПРОБЛЕМА 155

5. УТИЦАЈ КОГНИТИВНО-ВИЗУЕЛНОГ ПРИСТУПА НА РАЗВИЈАЊЕ ПОЗИТИВНИХ СТАВОВА УЧЕНИКА ПРЕМА РЕШАВАЊУ ПРОБЛЕМСКИХ ЗАДАТАКА, МОТИВАЦИЈУ ЗА РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМСКИХ ЗАДАТАКА И КОРИШЋЕЊЕ ВИЗУЕЛНИХ МОДЕЛА ПРИ РЕШАВАЊУ МАТЕМАТИЧКИХ ПРОБЛЕМА 164

6. ЗАКЉУЧАК И МЕТОДИЧКЕ ИМПЛИКАЦИЈЕ 169

ЛИТЕРАТУРА 173
ПРИЛОЗИ 190
ПРИЛОГ 1. ИНИЦИЈАЛНИ ТЕСТ – АРИТМЕТИКА И АЛГЕБРА 190
ПРИЛОГ 2. ФИНАЛНИ ТЕСТ – АРИТМЕТИКА И АЛГЕБРА 195
ПРИЛОГ 3. УПИТНИК ЗА УЧЕНИКЕ (скала ставова) 200
ПРИЛОГ 4. ПИТАЊА ЗА НАСТАВНИКЕ ФОКУС ГРУПЕ 202
ПРИЛОГ 5. ВЕЖБЕ У ОКВИРУ ЕКСПЕРИМЕНТАЛНОГ ПРОГРАМА 203

I ТЕОРИЈСКИ ОКВИР ИСТРАЖИВАЊА

1. РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМА КАО ЦИЉ И ИСХОД НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ

Решавање проблема значајан је васпитно-образовни циљ у многим националним наставним програмима широм света. Његова централна улога посебно долази до изражаја у настави математике, где се често истиче као сржи срце дисциплине (Schoenfeld, 1985). Решавање проблема представља једну од фундаменталних идеја и уједно најважнији исход математичког образовања (Николић, 2024). Сматра се есенцијалним елементом васпитно-образовне делатности, чији је примарни циљ да ученике оспособи и припреми за суочавање са комплексним изазовима у различитим контекстима (Polya, 1945). Наведена тежња је најилустративније приказана у сингапурском курикулуму (Слика 1), где решавање проблема заузима централну позицију у настави математике током основног и средњег школовања.



Слика 1. *Пентагон модел решавања математичких проблема (Ministry of Education Singapore, 2012: 14)*

Поред битне улоге у курикулуму, решавање проблема је и предмет мерења ефикасности, конкурентности и достигнућа у математичком образовању на међународном нивоу. У оквиру Међународног програма процене постигнућа ученика (PISA), компетенције за решавање проблема представљене су као капацитет и спремност

појединца да уложи когнитивни напор како би разумео и решио проблемске ситуације (Николић, 2024). Оваква међународна истраживања, укључујући и TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study), користе решавање проблема као основ за утврђивање математичке компетентности (Николић, 2024). Савремена схватања математичке компетентности потичу из међународних оквира, као што је PISA. Према OECD (2019: 75), математичка писменост подразумева "способност појединца да формулише, примењује и интерпретира математику у разноврсним контекстима." Та способност се не ограничава само на познавање поступака, већ обухвата: резоновање, моделовање и критичку процену резултата. На овај начин математичка компетентност постаје интегрални део функционалне писмености неопходне за активан живот у савременом друштву. У оквиру те шире компетентности, компетенција за решавање проблема има посебан значај. Она подразумева способност ученика да идентификује структуру проблема, одабере адекватну стратегију и примени своја знања на начин који није механички. Истраживачи наглашавају да решавање проблема укључује и метакогнитивне процесе, као што су планирање, самонадзор и самопроцена, који омогућавају ученику да има контролу над сопственим мисаоним процесом (Dossey et al., 2006). Дакле, успех у решавању проблема зависи не само од когнитивних способности, већ и од мотивације, упорности и толеранције на грешку.

У математичком образовању, решавање проблема има двоструку улогу: оно је у исто време циљ и средство (Николић, 2024). Као средство (инструмент), решавање проблема постаје саставни део наставног процеса, подржавајући постизање других васпитно-образовних циљева унапређујући разумевање наставних садржаја. Као циљ, фокус је на експлицитном развијању способности ученика за ефикасно решавање проблема, чиме се наглашава важност развоја компетенција које омогућавају суочавање са нерутинским задацима (Aranho, 2017). Николић (2024) истиче да решавање проблема не само да пружа могућност да се научено примени, већ помаже да се развој ученика усмери кроз процес учења.

Поред тога што се стицање вештина решавања проблема, закључивања и комуникације укључујући критичко и креативно мишљење истиче се у наставним плановима као један од циљева учења математике, развијање компетенција за решавање проблема се наводи и као исход који ученици треба да остваре у току наставног процеса (*Правилник о стандардима образовних постигнућа*, 2024).

Савремене теорије наставе и учења истичу да је "учење сложена когнитивна активност", а да "стицање знања није само акумулирање чињеничних информација и рутинских процедура, већ способност интеграције знања, вештина и процедура у сврху ефикасног решавања проблема" (Кузмановић, Павловић Бабић, 2011: 76). Проблемски задаци су когнитивно захтевни задаци, односно задаци који укључују размишљање ученика на вишим когнитивним нивоима. Виши когнитивни нивои подразумевају разумевање проблема, анализу информација и њихових односа као и примену и процену одабране стратегије решавања. Задаци који укључују навођење чињеница и праћење познатих поступака при решавању називају се *рутински проблеми* (Ђокић, 2023).

Ученици стичу математичка знања решавајући одређене математичке задатке. У настави математике математички задатак користимо за презентовање новог градива; за увежбавање научених процедура; за обнављање раније савладаног градива; за процену

квалитета усвојеног знања итд. Битно је нагласити да и дизајн самог задатка има огроман утицај на успех ученика приликом решавања. Весонен и сарадници дају смернице наставницима и ауторима уџбеника, наглашавајући да је кључно креирати задатке који су јасни, добро структуирани и без непотребних отежавајућих фактора, како би се деци заиста омогућило да покажу своје математичко размишљање (Vessonen, Dahlberg et al., 2024). Математички задатак, као основни садржај наставе математике, има улогу да активира одређена знања и способности ученика без обзира да ли обрађујемо ново градиво, вежбамо или обнављамо. Показана знања и способности при његовом решавању пружају нам увид у ниво и квалитет ученичког постигнућа (Матовић, 2009). Како тврди Ђокић: "Бавити се математичким задатком значи бавити се развојем математичког мишљења ученика. Задатак у настави математике генерише активности које стварају прилике за учење и то увођењем математичких идеја, појмова, поступака. Бавимо се питањем ученикових појмовног разумевања, подстицања на ученичко резоновање и развојем математичког мишљења ученика." (2023: 111). Ауторка истиче да постављањем задатака ми осмишљавамо активности које ће ученицима дати прилику за учење и то увођењем математичких идеја, појмова и поступака. Док осмишљавамо или бирамо задатак ми се фокусирамо на ученикове појмовно разумевање, подстицање ученика на резоновање и развој математичког мишљења. Веома је важно да задатак има ту моћ да ангажује ученика у поменутим математичким активностима.

Математички задатак који има потенцијал да пружи интелектуалне изазове за унапређење математичког разумевања и развоја ученика јесте проблемски задатак. Решавање проблемских задатака, односно математичких проблема, односи се на когнитивни процес коришћења логичког закључивања различитих когнитивних стратегија, као што су идентификовање релевантних информација, доношење закључака, примена математичких концепата, процедура и провера тачности (Danesh, Nourdad, 2017). Математички проблем може бити и текстуални опис ситуације у оквиру које се математичка питања могу контекстуализовати. Информације о проблему у задацима представљене су најчешће вербално, као текст, а не у облику математичке нотације (Boonen et al., 2016). Проблемски задатак може бити различитог облика, може бити отвореног или затвореног типа, може захтевати решавање проблема или постављање проблема, може садржати текст или бити симболички. Његово решавање може трајати пар минута или потрајати недељама док се истражи, може бити реалан или апстрактан. Ђокић такође истиче да проблемски задатак може постати рутински када ученик достигне одређени ниво знања и искуства или може бити проблемски само за неке ученике, али не за све због разлике у њиховим претходним искуствима (Ђокић, 2023).

У процесу решавања проблема, најчешће задатих текстуално, ученици морају бити у стању да конкретно преведу у апстрактно или апстрактно у конкретно и због тога је њихово решавање јединственији и изазовнији задатак од решавања уобичајеног математичког задатка. Последњих деценија решавање математичких текстуалних задатака привукло је велику пажњу и истраживача и практичара у образовању (Boonen et al., 2013; Campbell, 1992; Depaepe et al., 2010; Hegarty et al., 1995; Hickendorff, 2013; Moreno et al., 2011; Santos-Trigo, 2024). Текстуални задаци, односно проблеми представљени текстом су значајни за школску математику из много разлога. Они пружају могућност ученицима да користе математичке алате, промовишу везу између математике и стварног животног контекста, користе стратегије размишљања и решавања проблема и обезбеђују платформу

за развој нових појмова и вештина (Angateeah, 2017), а основна сврха наставе математике је да оспособи ученике да решавају проблеме у свакодневном животу.

Поменуто међународно истраживање TIMSS садржи задатке који захтевају решавање проблема. Иновативни проблемски и истраживачки задаци (Problem Solving and Inquiry) први пут се појављују у циклусу TIMSS 2019. То су задаци осмишљени да симулирају ситуације из реалног окружења, а њихово решавање представља изазов за ученике и захтева критичко, креативно и аналитичко размишљање. Процењујући способност ученика да реши наведене проблемске задатке TIMSS уствари процењује "вештине и компетенције ученика потребне за успех у сложеном, међусобно повезаном свету" (Ранђеловић и сар., 2024: 6).

Ученици Србије учествују у PISA тестирањима у којима се процењује ниво математичке писмености. Не тестирају се математичка знања, већ примена истих при решавању проблема из реалног окружења. Национални савет наставника математике (The National Council Teachers of Mathematics) је 2012. године навео да су вештине решавања проблема главно очекивање од наставе математике (Mingke, Alegre, 2019). Наведена међународна истраживања, TIMSS и PISA, пружају драгоцен увид у то како се решавање проблема мери и које су разлике у приступима различитих образовних система. TIMSS је пре свега курикулумски оријентисано истраживање и испитује садржаје који се налазе у наставним програмима. У оквиру когнитивне димензије, највећи изазов представља домен "резоновање", који обухвата задатке у којима нема јасног алгоритма. Управо у тим задацима, системи који се ослањају на рутинске вежбе, показују слабости (Mullis, Martin, 2019). С друге стране, PISA је окренута функционалном знању. Задаци су формулисани тако да имитирају стварне ситуације и захтевају од ученика да математички моделирају свет око себе. У последњем завршеном циклусу, PISA 2018, просечно постигнуће ученика из Србије на скали математичке писмености износило је 448 бодова, што је знатно испод просека земаља OECD-а. Најважније, чак 40% ученика није достигло основни ниво писмености (Ниво 2) у математици, што значи да нису у стању да примене знања која су стекли у једноставним свакодневним ситуацијама, односно да су функционално неписмени у контексту решавања проблема (PISA, 2018). Овај податак указује на велики изазов у домену развоја компетенција за примену знања. TIMSS мери постигнућа ученика у областима математике и природних наука. За разлику од PISA-е, TIMSS има већи фокус на курикуларном знању. У последњем циклусу, TIMSS 2023, ученици четвртог разреда из Србије остварили су натпросечне резултате. Њихово просечно постигнуће из математике износило је 523 поена, што је изнад међународног просека од 503 поена (International Association for the Evaluation of Educational Achievement, 2023). Ово постигнуће, иако изнад просека, укључује 40% задатака посвећених примени знања и 25% закључивању (CEO, 2024), што показује да су млађи ученици успешнији у савладавању захтева наставног програма, укључујући и примену знања у школском контексту. Иако TIMSS подаци указују на релативан успех у усвајању курикуларног знања у нижим разредима, укључујући и школску примену знања, PISA резултати посебно високим процентом ученика који не достижу основни ниво математичке писмености, упозоравају на значајан дефицит управо у области функционалне примене знања и решавања проблема у реалним животним контекстима. OECD истиче да је кључни циљ процена способности ученика да "математички разумеју проблем" који није унапред структуриран (OECD, 2019: 15). Србија, према резултатима оба истраживања, остварује стабилне резултате у областима

које подразумевају репродукцију, али значајно слабије када је реч о применама и резоновању (Djerić i sar., 2022: 8). То указује да је компетенција ученика за решавање проблема недовољно развијена и да наставни процес не пружа довољно искустава у нерутинском мишљењу. Овај јаз између постигнућа на тестовима који мере курикулум (TIMSS) и тестовима који мере функционалну писменост (PISA), наглашава неопходност да се у настави математике фокус промени са механичког усвајања садржаја на експлицитан развој метакогнитивних вештина и стратегија неопходних за ефикасно решавање проблема. Развој ових компетенција је кључан за оснаживање ученика и постизање њихове пуне математичке компетентности у 21. веку.

Србија се већ дуги низ година суочава са структурним проблемима у настави математике. Наставни материјали често су усредсређени на рутинске задатке, док су задаци који подстичу дубље мишљење мање заступљени. Истраживања показују да ученици имају добру техничку основу, али да се суочавају са потешкоћама када треба применити знање на другачији начин од оног који је уобичајен у настави (Kadijević, 2018: 63). Ово указује на потребу за систематском променом приступа у учењу, већим фокусом на развијању компетенција ученика за решавање проблема. Развијање компетенција за решавање проблема омогући ће ученицима да кроз систем школовања усвоје знања, овладају вештинама и развију способности које ће их оснажити да се суоче са сложеним изазовима у будућности. Стога, образовне политике препознају да решавање проблема треба посматрати као општи и значајан циљ и исход математичког образовања.

Савремена истраживања у области математичког образовања указују на то да се способност ученика за решавање проблема не развија спонтано кроз наставу, већ захтева осмишљен приступ. Још је Пољa (Polya, 1945) указао да је решавање проблема суштинска активност математичког мишљења и да ученици морају бити експлицитно вођени кроз фазе разумевања проблема, планирања, извођења решења и провере добијених резултата. Према његовом становишту, без систематског подучавања стратегија решавања проблема, ученици остају на нивоу механичке примене познатих поступака, неспособни да се суоче са новим и нестандардним ситуацијама.

1.1. Стратегије решавања математичких проблема

Разумевање стратегија решавања математичких проблема има веома дугу историју, али је мађарски математичар Пољa (Pólya, 1945) заслужан за револуционаран модел приступа решавању проблема који је изложио у свом делу “How to solve it?“. Пре Пољe математичари су се ослањали на интуицију, искуство и примену научених формула, али није постојала методологија или неки системски приступ који би се могао предавати и примењивати. Пољa је направио значајан помак, поставивши основу за поучавање стратегијама, принципима и алатима који омогућавају ученицима оријентацију у проблемским ситуацијама и на тај начин унапређују њихове способности решавања проблема. Кључне хеуристичке стратегије у Пољином приступу решавању проблема су:

- *смањење* – комплексан проблем се своди на једноставнији или познатији проблем што често подразумева разматрање једноставнијег случаја, смањивање броја елемената, или поједностављивање услова проблема;

- *реверзибилност* – процес решавања започиње од траженог резултата или циља, а потом се разматрају неопходни претходни кораци, чиме се преокреће ток мисли у односу на задате почетне услове;

- *разматрање аспеката* – свесно и систематично анализирање проблема из различитих углова, што укључује препознавање зависности између елемената и циљане измене аспеката (на пример промена репрезентације података из алгебарског у графички приказ);

- *промена аспекта* – циљана промена начина на који је проблем представљен (на пример коришћење цртежа, шема или табела) да би се избегла ментална фиксираност и био омогућен нови увид у проблем;

- *преношење* – преношење добро познате процедуре, стратегије или решења са једног, већ решеног проблема (аналогног проблема) на други, нови контекст (Pólya, 1957).

Математичке компетенције за решавање проблема стичу се, дакле, кроз промовисање манифестација менталне агилности (смањење, реверзибилност, размишљање о аспектима, промена аспеката и преношење) (Liljedahl et al., 2016). Поља се у својој књизи "How to solve It?" у великој мери ослања на претходна искуства и сумира поступак решавања проблема у четири корака:

1. *Разумевање проблема* - подразумева одговоре на питања: Шта је непознато? Који су подаци? Који је услов задатка? Да ли се може задовољити услов задатка? Да ли је наведени услов задатка довољан да се одреди непознато?;
2. *Осмишљавање плана* - проналажење везе између података и непознатог;
3. *Спровођење плана* - уз проверу сваког корака;
4. *Осврtање уназад* - које подразумева проверу резултата и аргумента, као и разматрање могућих другачијих поступака доласка до решења и примена резултата или методе на неким другим проблемима (Pólya, 1945).

Пољина истраживања су утицала на то да се, посебно 1960-их и 1970-их година у оквиру образовне реформе у САД-у познате као *New Math* покрет, стави нагласак на важност стратегија учења открићем у поступцима решавања проблема. Током 1980-их година захтевало се да решавање проблема буде у фокусу школске математике. Примарни фокус наставе решавања проблема на редовним часовима у математици, који се темељио на когнитивним аспектима учења открићем, проширен је тако да обухвати и ученикове некогнитивне (афективне) аспекте, укључујући ставове, емоције и саморегулацију (Kilpatrick, 1985). Коришћене промотивне приступе решавању проблема Килпатрик је поделио на пет метода које се међусобно могу комбиновати:

- *осмоза* – подразумева оријентисање на акцију и имплицитно преношење техника решавања проблема у корисном окружењу за учење;
- *памћење* – формирање посебних техника за одређене типове проблема и релевантних питања приликом решавања проблема;
- *имитација* – представља стицање способности решавања проблема кроз имитацију стручњака;

- *сарадња* – кооперативно учење способности решавања проблема у малим групама;
- *рефлексија* – способности решавања проблема се стичу на начин оријентисан на акцију и кроз размишљање о приступима решавању проблема (Kilpatrick, 1985).

Наведених пет метода представљају педагошки спектар могућих приступа за развијање способности решавања проблема у настави математике (Kilpatrick, 1985). Ова подела указује на чињеницу да се процес учења решавања проблема не може свести искључиво на један метод, већ захтева синергију различитих приступа – од имплицитног усвајања до експлицитног подучавања и метакогнитивне контроле (Schoenfeld, 1985). Конкретно, осмоза и имитација представљају приступе усмерене на непосредно искуство и праксу, где ученик усваја технике решавања проблема било кроз урођеност у богато окружење (осмоза), било кроз директно посматрање и реплицирање експерта (имитација). Памћење се фокусира на изградњу неопходне базе знања и рутинских корака, док сарадња уводи социјалну димензију учења, омогућавајући заједничку конструкцију разумевања**.** Коначно, рефлексија је највиши ниво, наглашавајући метакогнитивне процесе кроз свесно промишљање о сопственим приступима. Интегрисањем ових метода, остварује се баланс између стицања специфичних вештина и развоја флексибилног, саморегулисаног мислиоца (Bruder, Collet, 2011).

Брудер и Колет наводе да се учење како решавати проблеме може успоставити као дугорочан процес наставе и учења који у основи обухвата четири фазе:

1. интуитивно упознавање са хеуристичким методама и техникама;
2. уочавање посебних поступака за решавање уз помоћ истакнутих примера (експлицитно стицање стратегије);
3. свесно вежбање коришћења новостечених стратегија решавања са задацима различитог нивоа тежине;
4. проширивање контекста примењених стратегија (Bruder, Collet, 2011).

Друга и трећа фаза се надовезују једна на другу у блиском хронолошком редоследу, док прву фазу треба користити у настави све време. Аутори истичу да би кључно питање за употребу алата који би помогао у поступку решавања могло бити: Како илустровати и структурирати проблем или како га представити на другачији начин? На разумевање проблема утиче претходно знање ученика који решава проблем, а утиче и на избор стратегија које ће се при покушају решавања користити.

У самом процесу решавања проблема, по узору на Пољин модел, и други истраживачи су наводили сличне кораке, на пример Лебланс и Спрингер издвајају следеће фазе:

1. разумевање проблема;
2. избор начина за проналажење одговора;
3. решавање проблема;
4. гледање уназад (LeBlanc, Springer, 1977).

Такође и истраживачи Института за промоцију наставе и технологије (The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology (IPST, 2011) наводе четири корака при решавању проблема:

1. разумевање проблема и анализа;
2. смишљање плана;
3. спровођење плана;
4. евалуација.

Истраживање које су реализовали Насрун и сарадници (Nasrun et al., 2023) проучава решавање математичких проблема и показало је да ученици не решавају задати проблем одједном, већ пролазе кроз четири главна процеса користећи репрезенатације. Први процес је превођење у коме ученик преводи проблем из текста у неку другу репрезентацију, а други је интеграција у којој ученици интегришу различите делове проблема и повезују их, стварајући кохерентан план за решавање. Трећи процес је решавање и тада ученици користе симболичку репрезентацију (једначину или операције) да би израчунали решење и четврти процес је евалуација када проверавају да ли је добијено решење логично и да ли одговара контексту оргиналног проблемског задатка (Nasrun et al., 2023). Аутори закључују да успешност у решавању математичких задатака зависи од способности ученика да се крећу између наведене вербално-текстуалне, визуелне и симболичке репрезентације спроводећи сва четири наведена процеса. Поред тога, аутори истичу да математичка писменост ученика игра кључну улогу у њиховом успешном процесу представљања проблема. Дакле, решавање математичких проблемских задатака није само примена формула, већ је сложен процес превођења, визуелизације и повезивања различитих облика представљања исте математичке идеје.

У току сваке школске године ученици на часовима математике реше велики број задатака. Решавањем различитих типова задатака, ученици треба да савладају опште принципе решавања проблема целе једне класе, а то ће им омогућити да успешно реше сваки задатак те класе без обзира на његову форму. Међутим, постоје ученици који не могу успешно да реше задатке ако се они бар мало разликују од задатака које су решавали раније. Најчешће узрок њиховог неуспеха је приступ процесу решавања јер покушавају "да користећи утврђене поступке што пре дођу до тачног решења не размишљајући пуно о задатку" (Дубљанин, 2010: 40). Фридман (Фридман, Турецкий, 2005; Фридман, 2009) истиче да је анализа задатка прва и основна фаза процеса решавања. Он сматра да је утврђивање карактера и типа задатка, као и уочавање услова и захтева обавезно урадити у сваком задатку, чак и у оним најпростијим. Код сложенијих, захтевнијих задатака, према његовом мишљењу, анализа почиње већ читањем текста задатка и стално се понавља, при свакој новој претпоставци о решењу, као и при преласку са једне фазе на другу. Након анализе најчешће се прави шематски запис или се користи одређени модел (репрезентација задатка). Разматрање кључних делова задатка уствари представља анализу усмерену на уочавање и повезивање познатих и непознатих величина у задатку, односно ученик би увек требало да има потребу да у подацима који му се представе у некој форми, конкретно у форми задатака, кроз анализу уочи и пронађе суштинска својства која затим уопштава на све случајеве одређеног система (Фридман, Турецкий, 2005; Фридман, 2009).

Када је реч о проблемским задацима, математичким проблемима из реалног окружења, препорука за наставнике је да приликом решавања сложенијих, ученицима сугеришу да обрате пажњу на анализу услова задатка и осмишљавање плана решавања проблема. Решавање проблема захтева формирање почетне менталне репрезентације ситуације у стварном окружењу (тзв. ситуациони модел), а хоризонталном математизацијом модела реалистичног света, како наводи Фројдентал, прелази се на математички модел (Freudenthal, 1968). Математички модел је база на основу које се планирају и изводе математичке операције. Способност ученика да успешно решава задатаке је један од основних показатеља његовог нивоа математичког развоја и разумевања математичког садржаја. Због тога се решавање задатака сматра основним и најважнијим елементом наставе математике, било да се обрађује ново градиво, увежбава и систематизује претходно научено или проверава знање (Дубљанин, 2010).

Закључујемо да не постоји јединствен став и правило како, којим корацима и на који начин приступити решавању математичких проблема, али истичемо да учење математике треба да буде активно истраживање, а не само пасивно памћење. Аутори су сагласни да су две вештине неопходне за успешно решавање математичких проблема. Прва је израда визуелно-шематских представа (Krawec, 2010; Montague, Applegate, 2000; Hegarty, Kozhevnikov, 1999), а друга релациона обрада то јест извођење тачних односа између елемената из текста проблема релевантних за решење (Van der Schoot et al., 2009; Kintsch, 1998; Hegarty et al., 1995; Verschaffel, 1994). И за једну и за другу стратегију постоје ставови који их потврђују, али и оповргавају. Уместо аутоматског одабира бројева и релационих кључних речи из текста проблема (што често доводи до извршења погрешних аритметичких операција), ученици који успешно решавају математичке проблеме конструишу визуелну представу проблема како би олакшали разумевање. Иако је израда визуелних приказа неопходан услов за успешно решавање проблемских задатака, то није увек довољан услов (Van der Schoot et al., 2009; Pape, 2003; Kintsch, 1998), јер деца могу веома добро формирати визуелни приказ, а да нису у стању да закључе који су тачни односи између елемената релевантних за решење (Krawec, 2010; Thevenot, 2010; Coquin-Viennot, Moreau, 2003). Значај релационе обраде у решавању проблема може се ефикасно открити у задацима у којима се релациони термин не односи директно на одговарајуће математичке операције (Thevenot, 2010; Van der Schoot et al., 2009; Kintsch, 1998; De Corte et al., 1985). У проблемима са операцијама везаним за кључне речи, довољно је прво изабрати бројеве и релационе појмове из текста, а затим их директно превести у скуп прорачуна (Van der Schoot et al., 2009; Pape, 2003; Hegarty et al., 1995). Међутим, у проблемима у којима кључне речи не упућују директно на математичку операцију, други елементи су неопходни за формирање ефикасног менталног модела проблема обухватајући одговарајуће односе између кључних варијабли (Thevenot, 2010; Van der Schoot et al., 2009; De Corte et al., 1985). Кравец у свом раду истиче да способност ефикасног представљања проблема није само споредни део процеса, већ је и кључна вештина која разликује ученике који успешно решавају проблеме од неуспешних (Krawec, 2010). Њено истраживање наглашава да подучавање ученика да боље размишљају о проблему и начин како да користе различите алате за његову репрезентацију (дијаграми, табеле, графикони) може значајно побољшати њихове математичке вештине, без обзира на њихове почетне способности. Уочила је да ученици са вишим математичким способностима много чешће користе софистицираније и ефикасније стратегије за представљање проблема. Они су

склонији да пре него што крену са рачунањем, активно размишљају о структури проблема и изаберу најбољи начин да га визуелизују и организују. С друге стране, ученици са нижим способностима често одмах крећу са насумичним рачунањем, без јасне стратегије. Потреба да се ученици освесте о приступима у којима се инсистира на поступном откривању решења до сада је у великој мери прихваћена у дидактичким дискусијама. Разлике у различитим приступима унапређењу способности решавања проблема пре се односе на одлучивање које стратегије решавања проблема или поступке треба пренети ученицима и на који начин, а не да ли их уопште треба пренети.

На основу свега наведеног уочавамо да је развијање компетенција ученика за решавање проблема веома важан задатак математичког образовања, али и велики изазов који привлачи пажњу бројних истраживача који покушавају да унапреде тај процес. Циљ овог рада је да пронађе приступ учењу математике који ће да доведе до развијања компетенција ученика за решавање проблема у почетној настави математике.

1.2. Способности ученика кључне за решавање математичких проблема: когнитивни, социокултурни и семиотички приступ

Решавање математичких проблема у настави математике представља сложен интелектуални процес који је зависан од бројних елемената, а у првом реду је зависан од когнитивних могућности детета. Разумевање процеса учења математике и развијање компетенција ученика за решавање проблема захтева интеграцију различитих теоријских перспектива које осветљавају когнитивне, социјалне и специфично математичке аспекте учења. У том циљу размотрићемо теоријске поставке когнитивне теорије Жана Пијажеа, социокултурну теорију учења Лава Воготског и теорију семиотичких репрезентација Рајмонда Дувала, како бисмо свеобухватније разумели механизме који стоје у основи развоја компетенција ученика за решавање проблема.

Да бисмо схватили потешкоће које велики број ученика има са разумевањем математике неопходно је сагледати когнитивно функционисање које стоји у основи различитих математичких процеса (Duval, 2006). У области развоја когнитивних способности детета једна од најутицајнијих теорија је Пијажеова теорија когнитивног развоја. Жан Пијаже је своју пажњу при истраживању когнитивног развоја деце првенствено усмерио на истраживање начина на који се деца прилагођавају новим ситуацијама, тако да је когнитивни развој повезао са сложеним реакцијама на околину до којих дете долази развијајући се. Према мишљењу Вигара и Пациса Пијаже је посебно инсистирао на томе да је откриће основа његове теорије и да разумевање значи откривање или реконструкцију поновним откривањем (Weegar, Pacis 2012). Његова теорија укључује две компоненте или аспекта. Први део је компонента *старосне доби и стадија* која предвиђа шта деца могу, а шта не могу разумети у различитом узрасту; а друга је *теорија развоја* која описује како деца развијају когнитивне способности (Weegar, Pacis 2012). Пијажеова теорија когнитивног развоја разликује четири стадијума или периода развоја интелектуалних способности кроз које пролази сваки појединац: сензомоторни период, преоперациони период, период конкретних операција и период формалних операција. Ова четири периода се јављају отприлике у истој доби сваког детета тако да се сваки наставља

на претходни, јављају се стално истим редоследом и иреверзибилни су, односно, када дете једном уђе у нову фазу оно мисли на начин који је карактеристичан за тај стадијум (Sternberg, 2005).

Период сензомоторне интелигенције (од рођења до 18 месеци) почиње са рефлексима новорођенчета, а касније се јавља опажање и практичне активности као што су: хватање предмета, досезање предмета, отклањање препрека, фиксирање погледом предмета итд. Значи основна средства сензомоторне интелигенције су шеме дечијих практичних радњи.

У периоду преоперационалне интелигенције (од 18 месеци до 7 година) настају квалитативно нове симболичке функције као што су говорна функција, менталне представе као и способност одложеног подражавања. На овом ступњу деца још увек не овладавају логичким мишљењем, па проблеме решавају ослањајући се на интуицију и перцепцију конкретне опажајне ситуације. Весонен и сарадници су у свом раду проценили вештине решавања математичких проблема деце предшколског узраста старости од 3 до 5 година и утврдили који фактори доприносе израженим индивидуалним разликама (Vessonen, Hellstrand et al., 2024). Показали су да је рано препознавање и подстицање математичких вештина од кључне важности. Уместо да се чека школски узраст, интервенције и активности прилагођене индивидуалним потребама деце наведеног узраста могу помоћи да се смање примећене разлике. Аутори наглашавају потребу за играма и активностима које развијају не само бројање, већ и логичко размишљање, просторне способности и развој језика, јер сви ти фактори су међусобно повезани и доприносе математичкој писмености. Како би деца узраста од 3 до 7 година успешно развила ране математичке вештине важно је користити различите методе учења. Играње и учење кроз свакодневне животне ситуације су посебно ефикасни, нарочито за млађу децу и за учење основних математичких концепата. Улога наставника је кључна, а њихово искуство и образовање утичу на квалитет и разноврсност метода које користе зато би више пажње требало посветити обуци наставника односно васпитача, како би се подстакло коришћење разноврсних, интерактивних метода учења математике (Parviainen et al., 2023).

Период конкретних операција (од 7 до 11 година) одликује настанак целовитих логичко-психолошких структура у процесу мишљења, а то су груписање, серијација, класификација, коресподенција, настанак појма конзервација и реверзибилност. Четврти је период формалних операција (после 12-е године) у ком појединац има способност да манипулише поставкама, идејама и да доноси закључке на основу вербалних исказа на формално-дедуктивном нивоу и на тај начин укључује се у свет одраслих.

Редослед периода когнитивног развоја, по мишљењу Пијажеа, је константан и секвенционалан, при чему се структуре сваког периода међусобно надовезују и представљају неопходну основу за наредни развојни период. Иако је редослед ових периода универзалан, темпо развоја сваке индивидуе је различит (Pijaže, 1997).

Задржаћемо се на периоду конкретних операција јер се његов почетак подудара са поласком детета у први разред основне школе у Србији. У овом периоду јављају се операције које зовемо конкретне јер су још увек зависне од конкретног перцептивног садржаја, али како време пролази код некога пре, а код неког касније, настају логичке операције које су типичне за стадијум конкретних операција: конзервација, груписање, серијација и друге. Конзервација представља очување сталности идентитета количине,

тежине, запремине материје која се схвата као непроменљива без обзира на трансформацију материје и разлику у перцептивним величинама. Дете манипулише унутрашњим репрезентацијама конкретних објеката и ствари, ментално конзервира идеју количине и закључује да је, без обзира на различити физички изглед, количина иста (Sternberg, 2005). Груписање се као логичка операција састоји у постепеном повезивању делова и целине класа. Класификација је основно груписање које почиње на основу једне заједничке одлике, а касније се одвија на основу две и више особина. Серијација представља сређивање елемената по растућим и опадајућим величинама. У периоду који обухвата стадијум конкретних операција когнитивни апарат детета пролази кроз квалитативну трансформацију. Мишљење постаје логично, децентрирано и реверзибилно. Међутим, примарно ограничење овог стадијума јесте чињеница да су поменуте операције функционалне само у ситуацијама које укључују директну манипулацију реалним објектима или ослонац на јасне визуелне представе. У контексту решавања математичких проблема, ово значи да дете још увек не оперише потпуно апстрактним хипотезама, већ му је потребан конкретни контекст како би структурирало своју логичку мисао. Дете се често ослања на визуелне и опипљиве елементе, користећи конкретне примере, цртеже или материјале како би разумело постављени проблем.

Док Пијаже верује да развој претходи учењу, Виготски сматра супротно, да учење претходи развоју. Виготски је истицао важност школског учења за развој виших менталних функција и тврдио да је учење добро само када претходи развитку (Vigotski, 1957). Четири кључна принципа су изведена из идеја Виготског (Slavin, 2003). Први принцип је нагласак на друштвеној природи учења. Виготски тврди да друштвена интеракција и друштвене активности обликују индивидуални развој и учење. Деца уче, тврдио је он, кроз заједничке интеракције са одраслима и способнијим вршњацима. Други кључни концепт је зона наредног развоја (ориг. Zone of Proximal Development). Како наводи Вереникина (Verenikina, 2010) Виготски сматра да је учење континуирано кретање са једног интелектуалног нивоа на виши ниво који се приближава потенцијалу ученика. Ово кретање се дешава у зони наредног развоја (ZPD) као резултат друштвене интеракције (Verenikina, 2010). Зона наредног развоја је дефинисана као "удаљеност између стварног развојног нивоа утврђеног независним решавањем проблема и нивоа потенцијалног развоја утврђеног решавањем проблема под вођством одраслих или у сарадњи са способнијим вршњацима" (Amineh, Asl, 2015: 14). Према мишљењу Виготског за интелектуални развој и образовање детета важније је знати шта дете може решити уз подршку и малу помоћ, него проверавати шта већ зна и успева самостално, без ичије помоћи. Он наглашава значај трансферне вредности наставе за развој виших психичких функција јер, по његовом мишљењу, школско учење уз друге облике рада представља фактор психичког развоја, а од начина обучавања зависи какви ће бити ефекти школовања. Когнитивно науковање (шегртовање) као трећи принцип је процес у ком ученик постепено стиче знање и вештине интеракцијом са стручњаком, било одраслом особом, било старијим или напреднијим вршњаком. У многим занимањима радници уче свој посао кроз процес шегртовања, у ком нови радник уско сарађује са стручњаком, који пружа модел, даје повратне информације мање искусном раднику и постепено социјализује новог радника у норме и понашање професије. Подучавање ученика је облик шегртовања. Конструктивистички теоретичари предлажу да наставници укључују ученике у хетерогене кооперативне групе за учење у којима напреднији ученици помажу мање напредним путем

решавања сложених задатака. Четврти принцип представља scaffolding[1] учењу и важан је у модерној конструктивистичкој мисли (Slavin, 2003). Садашње интерпретације ставова Виготског наглашавају идеју да ученицима треба дати сложене, тешке, реалне задатке, а затим им пружити довољно помоћи у поступку решавања тих задатака. У scaffolding учењу или потпомогнутом учењу "наставник је културни заступник (ориг. culture agent) који води подучавање тако да ће ученици овладати и интернализовати вештине које омогућавају боље когнитивно функционисање" (Slavin, 2003: 262). Способност интернализације културних алата у вези је са узрастом или стадијумом когнитивног развоја ученика. Истраживања су утврдила да родитељи користе scaffolding док помажу деци да раде домаће задатке из математике. Истраживачи су измерили степен до ког су одрасли померали ниво интервенције како би се прилагодили дечијој зони наредног развоја. Када дете има потешкоћа, одрасла особа која му помаже повећава своју директивност управо толико да пружи подршку, али не толико да преузме задатак. Затим смањује директивност када дете почне да успева (Slavin, 2003). Scaffolding је уско повезан са когнитивним шегртовањем, стручњаци који раде са приправницима обично их укључују у сложене задатке, а затим им временом дају све мање савета и упутстава.

Интеграција Пијажеове теорије когнитивних стадијума и социјалног конструктивизма Виготског представља кључ за разумевање начина на који ученици развијају компетенције за решавање математичких проблема. Док Пијаже наглашава важност индивидуалне конструкције знања и логичких операција које су условљене развојним нивоом, Виготски указује на пресудну улогу социјалног контекста. Повезивањем ове две теорије и процеса стицања компетенција ученика за решавања математичких проблема долазимо до следећих закључака:

- Математички задатак мора бити постављен тако да превазилази тренутни ниво "независног решавања проблема", али да остаје унутар "нивоа потенцијалног развоја" уз адекватну подршку (Amineh, Asl, 2015: 14). На тај начин, наставник користи зону наредног развоја као простор у којем ученик трансформише спољашње математичке операције у унутрашње мисаоне структуре;
- Кроз "потпомогнуто учење" (scaffolding), наставник делује као медијатор између апстрактног језика математике и ученичког претходног искуства. Као "културни заступник", наставник помаже ученицима да "овладају и интернализују вештине које омогућавају боље когнитивно функционисање" (Slavin, 2003: 262), чиме се математички симболи и алгоритми из екстерних алата претварају у интерне когнитивне шеме;
- Компетенција за решавање проблема није само резултат биолошког сазревања, како наводи Пијаже, већ продукт активног вођства одраслих или сарадње са способнијим вршњацима (Amineh, Asl, 2015). Динамички баланс између ученичког самосталног откривања и стручно вођене интеракције омогућава развој виших когнитивних функција неопходних за математичко моделовање.

[1] У дословном преводу на српски језик означава „скеле", ова метафора конотира веома специфичан систем социјалне подршке за дететове напоре, који је прилагођен његовим потребама. У литератури се може срести превод „вођена партиципација" и „апропријација", међутим тај превод не обухвата све елементе овог приступа па задржавамо термин „scaffolding"

Дакле, примена наведених теорија сугерише да настава математике не треба да буде само преношење процедура, већ пажљиво вођени процес у којем се "скеле" учења постепено уклањају како би ученик развио пуну самосталност и когнитивну ефикасност у решавању комплексних проблемских задатака.

Треба имати у виду да се дете налази на стадијуму конкретних операција, где нису развијене логичке структуре за апстрактно мишљење, што подразумева да ученици могу да уче математику и решавају математичке проблеме само у контекстима који су везани за конкретне операције и који су представљени на очигледан начин. Значајан допринос сагледавању способности ученика за решавање математичких проблема расветљава теорија семиотичких репрезентација Дувала (Duval, 2006).

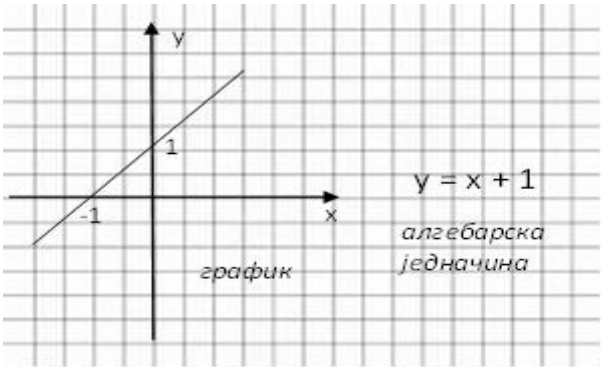
Разлика у когнитивним активностима потребним за математику и оним потребним за друге домене знања, како тврди Дувал, не налази се у појмовима, јер сваки домен знања развија скуп мање или више сложених појмова, већ у карактеристикама математичке активности (Duval, 2006). Дувал издваја три карактеристике математичких активности.

Прва се односи на употребу различитих семиотичких представа као што су вербални описи, симболички записи, табеле, графички прикази, који омогућавају представљање математичких објеката. Ако погледамо историју развоја математике видећемо да је развој семиотичких репрезентација био врло важан услов за развој математичке мисли. Семиотички системи представљања не служе само означавању математичких објеката или комуникацији, већ и за рад на математичким објектима и са њима. Како свака математичка обрада увек укључује замену једне семиотичке репрезентације другом ниједна врста математичке обраде се не може извршити без употребе семиотичког система репрезентација. Стога, кључни аспект разумевања математике представља управо способност трансформације репрезентација, односно преласка и повезивања различитих начина представљања математичких садржаја.

Друга карактеристика математичких активности је когнитивни парадокс приступа објектима знања – за разлику од феномена астрономије, физике, хемије, биологије, итд. математички објекти нису доступни перцепцијом или инструментима (микроскопи, телескопи, апарати за мерење). Једини начин приступа и рада са њима је коришћење знакова и семиотичких репрезентација. То значи да у математици имамо само један приступ објектима знања, а не двоструки приступ као што је случај у другим областима. Кључни проблем разумевања математике за ученике, у свакој од фаза наставног плана и програма, произилази из когнитивног сукоба два супротна захтева, како ученик може да разликује представљени објекат од семиотичке репрезентације која се користи ако не може приступити математичком објекту, осим семиотичком репрезентацијом? Овај проблем се често јавља јер је способност промене из једног система представљања у други критични праг за напредовање у учењу и за решавање проблема.

Трећа карактеристика је велики избор семиотичких репрезентација које се користе у математици. Зависно од задатка који треба да се изврши или питања које се поставља могу се користити различити семиотички системи представљања математичких активности. На пример у геометрији је неопходно употребити комбинацију најмање два система представљања, један за вербално изражавање својстава или за нумеричко изражавање величине и други за визуелизацију (Duval, 2006: 106-108).

Дувал разликује четири различите врсте семиотичких система и назива их репрезентативним регистрима. Нису сви семиотички системи регистри, већ само они који дозвољавају трансформацију репрезентација. Постоје две врсте трансформација семиотичких репрезентација које се радикално разликују: третмани и конверзије. Третмани су трансформације које се дешавају у оквиру истог регистра, на пример извођење прорачуна док се остаје у истом систему нотације за представљање бројева, решавање једначина или система једначина и томе слично. Избор третмана који се користе зависи углавном од могућности семиотичке трансформације које су специфичне за регистар који се користи. На пример процедуре за извођење нумеричке операције зависе од система репрезентације који користимо за бројеве, али и од математичких својстава операција. Дакле, користимо различите алгоритме за нумеричке операције са бројевима у децималном запису и ако су бројеви представљени разломцима. Конверзије су трансформације репрезентације које подразумевају промену регистра без промене објеката који се означавају, на пример прелазак са алгебарске нотације за једначину на њен графички приказ. Често се за конверзију користи и термин „превод“ или „кодирање“. Конверзије су сложеније од третмана јер свака промена регистра захтева препознавање истог представљеног објекта у две репрезентације чији садржај врло често нема ништа заједничко. Кроз различите врсте конверзије, више него кроз третмане, дотичемо се когнитивне сложености разумевања у учењу математике и специфичних процеса размишљања које од ученика захтева математичка активност. Језгро теорије репрезентација, како наводи Дувал, јесте утицај семиотичких репрезентација на когнитивне активности, по њему најинтересантније је кад се анализирају својства репрезентација (Duval, 1999). Он тврди да ученици уче у оквиру различитих регистара врло значајних за разумевање њиховог математичког мишљења. Издвојио је три кључна захтева за учење математике: први захтев је да ученици упореде репрезентације које су сличне у истом регистру, други је да преводе репрезентације између регистара и трећи захтев је да наставници обрате посебну пажњу на специфичан начин рада и активност ученика како би разумели математичке активности. Није могуће разумети математику ако се не увиди разлика између објекта и његове представе, а да би то урадио ученик мора бити оспособљен да математички појам представи у најмање два семиотичка система. Дувал сматра да на учење значајно утичу разлике између различитих регистара, односно прелазак из једног у други регистар (нпр. цртање графика алгебарски дате функције или одређивање алгебарске једначине ако је функција дата графиком) јер то захтева разумевање математичке структуре оба облика представљања што је важна активност за развој математичког мишљења (Слика 2.) (Duval, 2006).



Слика 2. *Линеарна функција представљена графиком (лево) и једначином (десно)*

Садржај репрезентације више зависи од регистра репрезентације, него од представљеног објекта. То је разлог зашто се преласком из једног регистра у други мењају не само врсте третмана, већ и својства која се могу експлицитно исказати. Зато разумевање у математици претпоставља координацију најмање два регистра семиотичке репрезентације. Препреке које поставља конверзија појмова текстуалног проблема у симболичке изразе ученици често не могу да превазиђу, без обзира на математички садржај. То је разлог зашто се већина истраживања фокусира на прибегавање транзиционим помоћним представама, онима које ученици спонтано развијају или онима које треба увести у наставу. У нашем приступу понудићемо ученицима неколико модела који се могу користити као помоћне транзиционе представе и једна врста scaffolding алата како би им олакшали конверзију са конкретних на апстрактне репрезентације.

Чак иако је један регистар представљања довољан са математичке тачке гледишта, са когнитивне тачке гледишта математичка активност укључује и истовремену мобилизацију најмање два регистра репрезентације или могућност промене у сваком тренутку из једног регистра у други. Дакле, концептуално разумевање у математици укључује синергију два регистра, а понекад и синергију три регистра. То је разлог зашто оно што је математички једноставно и дешава се у почетној фази изградње математичког знања може бити когнитивно сложено и захтева развој специфичне свести о координацији регистара. Разлика између четири врсте репрезентационих регистара наглашава разноликост и когнитивни јаз конверзије репрезентације, тако да је прави изазов математичког образовања прво развити способност промене регистра репрезентације (Duval, 2006).

Можемо закључити да савремени приступ настави математике треба да буде усмерен на подстицање активне конструкције знања, развој комуникације и сарадње међу ученицима, као и на систематско коришћење и повезивање различитих семиотичких репрезентација. Само такав приступ може допринети развоју дубинског разумевања, математичког учења и решавања проблема.

1.3. Специфичности решавања математичких проблема – потреба за репрезентацијама

Математика је по својој природи веома апстрактна наука јер се већина њених важних идеја изражава кроз симболе и формуле. Међутим, у раду са ученицима млађег основношколског узраста често се појављује несклад између апстрактне стране математике и начина на који деца у овом периоду размишљају. Будући да се она налазе у стадијуму конкретних операција, њихово закључивање је још увек снажно повезано са стварним светом и конкретним представама. Зато су ученицима неопходне различите репрезентације као scaffolding при учењу математике у решавању математичких проблема.

Апстраховање и репрезентовање су комплементарни процеси, по речима Дрејфуса, међусобно се допуњују у процесу учења математике (Dreyfus, 1991). Према његовом мишљењу при репрезентовању математичких односа, принципа и идеја може се користити и више структурно еквивалентних репрезентација као што су објекти из окружења, вербалне представе (писани и говорни језик), визуелне представе (слике, дијаграми) и симболичке репрезентације (бројеви, слова). У односу на коришћење и употребу наведених репрезентација Дрејфус је процес учења приказао кроз четири фазе. Прва фаза је коришћење једног начина представљања, друга фаза је паралелно коришћење више од једног начина представљања, трећа фаза је прављење везе између паралелних репрезентација и четврта фаза је интегрисање репрезентација и флексибилни прелазак са једне на другу. Дакле, учење математичких појмова ученици започињу употребом и разумевањем једне репрезентације, да би у следећем кораку користили паралелно неколико репрезентација истог математичког проблема, а прелаз ка апстрактним појмовима зависи од веза између формираних репрезентација. У трећем кораку разумевање веза међу репрезентацијама позитивно утиче на апстракцију и ученици мењањем репрезентација постају свесни основних појмова. У завршном, четвртом кораку долази до интеграције између различитих репрезентација тј. односи, везе и заједничке особине чине апстрактни појам, а специфични аспекти репрезентације остају у позадини. Завршетком четврте фазе учења формиран је апстрактни појам о датом појму, дакле ученик је формирао апстрактну идеју математичког појма и када буде решавао неки проблем који укључује тај појам флексибилно ће одабрати репрезентацију коју ће користити. Наведене и објашњене четири фазе учења могу се посматрати као повећање нивоа разумевања које ученик поседује. Зељић је ово тврђење илустровала кроз једноставни пример појма аритметичке операције сабирања: Пре него што крене у школу дете препознаје два дисјунктна скупа објеката и може одредити укупан број елемената. У следећој фази у репрезентацијама скупа елементи су представљени апстрактно, тачкама, квадратима и слично, али ученик занемарује природу елемената јер разуме да та репрезентација уствари симболише више конкретних ситуација. Када пођу у школу ученици прихватају симболичку репрезентацију збира и репрезентацију у облику текстуалног задатка. Ученици схватају, али су и свесни да све репрезентације

представљају исти појам збира и то би била трећа фаза, а у четвртој све репрезентације се флексибилно користе и претварају једна у другу (Зељић, 2021).

Као важну активност за развој математичког мишљења Панасјук наводи способност ученика да створи, организује, интерпретира и успостави везу између репрезентација, за њега је процес развијања апстракције код ученика уствари процес превођења перцепција у менталне слике употребом различитих репрезентација (Panasuk, 2011). По Талу је читава школска математика уствари комбинација визуелних представа као што су геометријске слике и графикони, као и симболичке калкулације и манипулације (Tall, 2008).

Ученици репрезентације користе као подршку сопственог математичког разумевања при решавању математичких проблема или учењу нових појмова. Наставников избор репрезентације и начин коришћења изабране репрезентације у настави су фактори који утичу на квалитет знања ученика о репрезентацији, као и на развијање способности и вештина коришћења репрезентације при решавању проблема. То разумевање и коришћење репрезентације је, како наводи Костић (2017), повезано са достигнућима ученика у области математике па је важно проучити природу математичких репрезентација и њихову употребу у настави.

Ученици могу побољшати своје учење ако користе већи број репрезентација како би представили исти појам јер им то помаже да увиде и изразе општост појма. Ако ученик има способност да препозна исти однос или појам који је представљен у различитим модалитетима као што су вербални, дијаграм и симболички, значи да је развио концептуално разумевање односа или појма и повезао процедуралне са структуралним вештинама (Зељић, 2021). Маинали истиче да је разумевање и коришћење различитих репрезентација кључно за разумевање математике (Mainali, 2021). Уместо да се ослањамо на једну репрезентацију, ученици и наставници треба да препознају значај "превођења" из једне репрезентације у другу. Он тврди да се настава математике не сме ограничавати на један вид репрезентације. Такође, наводи да би наставници требали да подстичу ученике да конструишу, користе и разумеју различите репрезентације. Уместо да само "сервирају" ученицима готову формулу (симболичка репрезентација) идеално би било да кроз практичан рад, цртеже и разговор заједно са ученицима дођу до те исте формуле. Тиме се ствара јача веза између апстрактне математичке идеје и реалног окружења, чинећи математику смисленијом и доступнијом за сваког ученика.

Прегледом литературе и анализом постојећих научних радова долази се до закључка да је употреба различитих математичких репрезентација неопходна вештина која директно утиче на ефикасност решавања математичких проблема (Hatisaru, 2022). Учење математике не би смело да се сведе само на решавање задатака помоћу симбола које деца још увек не разумеју у потпуности, већ захтева репрезентације како би се ученицима могле представити математичке идеје.

1.4. Појам, значај и подела репрезентација

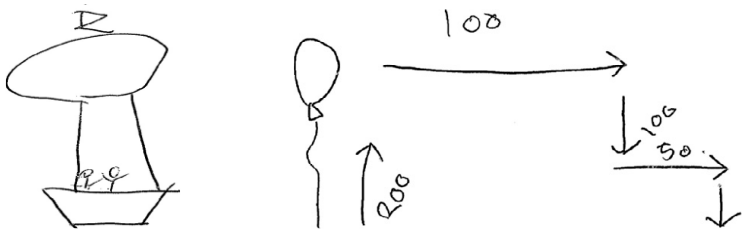
Репрезентације представљају врло користан алат који нам помаже у математичком резоновању, математичкој комуникацији и преносе математичку мисао (Kilpatrick et al., 2001). Осмишљавање, одабир примера и коришћење репрезентација у почетном математичком образовању, значај њихове улоге у процесу учења и когнитивне активности ученика при коришћењу тих репрезентација су тема многих истраживања последњих година.

Када користимо израз репрезентација треба разјаснити однос између његовог ужег и ширег значења (Bruner, 1972). У ужем смислу репрезентација се односи на симболе који пружају унутрашње искуство о неком разумљивом спољном облику са примарном намером да комуницирају тј. изражава оно што мислимо да видимо. У ширем смислу, преноси човеков тренутни поглед на свет, односно његову интерпретацију његовог искуства феномена који се истражује (Piaget, 1951). Лејтон даје кратко одређење по ком је репрезентација "представљање као објашњење" (Leyton, 2002: 157). Репрезентација је општи назив за симболизацију појава спољашњег света, а у настави математике термин репрезентација се користи за конструкцију, апстракцију, демонстрацију различитих математичких појмова као и илустрацију у поступку решавања проблемских задатака (Зељић, 2021). Репрезентације су један од главних аспеката наставе и учења математике, а многи аутори су анализирали ученичко и наставничко познавање као и разумевање репрезентација (Ainsworth, 2006; Cuoco, Curcio, 2001). Њихова истраживања указују на то да ученици и наставници често имају потешкоћа са флексибилношћу, односно способношћу да несметано прелазе из једне репрезентације у другу (нпр. из алгебарског записа у графички). Док једни истичу да коришћење вишеструких репрезентација може оптеретити когнитивне капацитете ученика ако они не разумеју дубинску везу између њих, други наглашавају да наставничко познавање ових веза директно обликује квалитет наставе (Ainsworth, 2006; Cuoco, Curcio, 2001). Кључни налаз је да чисто процедурално знање једне репрезентације не гарантује концептуално разумевање појма, већ је за истинско овладавање математиком неопходна способност "превођења" и синтезе различитих приказа истих математичких објеката. Поред термина репрезентација који се више користи у когнитивним теоријама развоја мишљења и решавања проблема, у математици и математичком образовању се често јавља и термин модел или моделовање. По Тервелу и сарадницима модел је "структурални облик репрезентације" (Terwel et al., 2009: 27).

У литератури постоје различите поделе и типови репрезентација. Најчешћа подела је на спољашње и унутрашње тј. менталне. Спољашње су оне које се налазе у учениковом окружењу, а унутрашње у уму ученика (Goldin, Shteingold, 2001). Спољашње репрезентације годинама су развијане и у широкој су употреби у математичкој комуникацији, а то су алгебарски изрази, једначине, табеле, бројевна права, графици, геометријске фигуре итд. Ове репрезентације укључују и писани и говорни језик, док унутрашње репрезентације за додељивање математичког смисла користе личне системе обележавања, природни језик, визуелне слике, хеуристику и стратегије решавања проблема (Костић, 2017). Како тврде Голдин и Штајнголд савремена теорија математичког образовања претпоставља да спољашње и унутрашње репрезентације нису изоловани

системи већ да између ова два система постоје бројне релације (Goldin, Shteingold, 2001). Квантитет и квалитет тих веза односно релација између спољашњих и унутрашњих репрезентација одређује обим и ниво знања ученика (Hiebert, Carpenter, 1992). У традиционалном подучавању математике ученици уче да разумеју спољашње репрезентације како би их користили за решавање математичких проблема (Goldin, 2002). Конструктивистичке теорије учења подржавају унутрашње репрезентације које развија ученик кроз сопствено искуство и у интеракцији са спољашњим репрезентацијама, а које представљају математичке идеје у виду симбола, једначина, слика, табела, графика итд. (Pape, Tchoshanov, 2001).

Поред поделе на унутрашње и спољашње репрезентације у литератури се помиње и подела на конкретне и апстрактне репрезентације. Апстрактне репрезентације користе симболе за представљање математичких концепата и идеја док конкретне користе физичке објекте (манипулише се реалним предметима) и визуелне репрезентације (слике, дијаграми, схеме) како би представиле математичке појмове и идеја као и приказале апстрактне идеје које се појављују у ситуацијама из реалног света (текстуални задаци) (Ding, Li, 2014). Текстуални задаци спадају у конкретне репрезентације јер имају могућност да пруже занимљиве слике (слике из свакодневног живота које нам дају неке асоцијације) и тако помогну учитељима и ученицима у формирању апстрактних концепата и разговору о њима. Динг и Ли тврде да задаци са текстуалним контекстом подстичу свакодневно искуство ученика и да су апстрактне репрезентације "моћније од конкретних" јер се користе при решавању комплексних проблема, али су саме неефикасне и непокретне (Ding, Li, 2014). Конкретни материјали дају ученицима могућност да формирају своје знање о апстрактним појмовима (Brown et al., 2009). Зељић тврди да упркос свему ипак треба бити опрезан јер ако се превише ослањамо на конкретне објекте то може ,"везати" дете за конкретан садржај и отежати прелаз на апстрактније облике мишљења, онемогућити избегавање шумова и достизање једног степена апстраховања (Зељић, 2021). Ако се користе само конкретне репрезентације то може омести учење и одвући пажњу са битних својстава јер се неке небитне особине могу тумачити као суштинске. Бунен и сарадници у свом истраживању поставили су задатак: "Балон је полетео праволинијски увис на 200 метара од тла, затим се кретао 100 метара према истоку, а онда се праволинијски спустио 100 метара. Балон се даље кретао 50 метара ка истоку и на крају се праволинијски спустио на тло. Колико се далеко балон спустио од своје почетне тачке?" (Boonen et al., 2013: 274). У процесу представљања и решавања задатка ученици су креирали два типа репрезентација: визуелно-шематске и сликовне (Слика 3). Визуелно-шематска репрезентација је ученицима који су је користили била важно средство за представљање математичких односа и они су били значајно успешнији у решавању проблема. Чулно богате, сликовне репрезентације имају велики број неважних детаља који пажњу ученика могу одвратити од суштински важних односа.



Слика 3. *Сликовна (лево) и визуелно – шематска (десно) репрезентација (Boonen et al., 2013:274)*

Значајну улогу у учењу математике на раном узрасту имају и *вишеструке репрезентације* (енг. *multiple representations*) које подразумевају различите начине представљања истог математичког појма или проблема. Оне су спољашњи математички аспект идеја и појмова који пружају исте информације у више различитих облика (Ozgun-Koca, 1998). Творац теорије вишеструких репрезентација је Дајнс (Dienes, 1960). По његовом мишљењу ученици пролазе кроз пет нивоа при формирању темељног математичког разумевања, и то:

1) слободна игра - где у раду са физичким материјалима и манипулативним наставним средствима долазе до основе математичког појма;
2) уопштавање - уочавају обрасце и сличности;
3) представљање - излажу своје схватање и разумевање појма користећи визуелне репрезентације;
4) симболизација - у својим представљањима користе математички језик и симболе тј. симболичке репрезентације;
5) формализација - формирају правила и алгоритме који одговарају њиховом разумевању појма (Dienes, 1960).

Од ученика се очекује да у настави заснованој на вишеструким репрезентацијама повезују различите репрезентације, преводе их једне у друге и на основу успостављених веза и односа међу репрезентацијама креирају ментални модел садржаја учења (Костић, 2017).

Ако посматрамо било који облик спољашње репрезентације приметићемо да не обухвата сва својства онога што представља па је за представљање неких ствари и идеја лакше користити слике, а за друге речи (Sternberg, 2005). Употреба вишеструких репрезентација пружа могућност међусобног допуњавања. Наставник може, како би подстакао разумевање уместо апстрактније или комплексније репрезентације, користити ученицима једноставније, приступачније или познате од раније репрезентације. Визуелне репрезентације се у настави математике могу користити за конкретизацију садржаја јер су мање апстрактне, конкретније у односу на симболичке репрезентације. Ако користимо већи број репрезентација садржај учења постаје конкретнији и прецизнији јер се смањује могућност произвољног интерпретирања. Повезивањем различитих репрезентација креирамо мрежу знања која има потпуније значење од простог збира својих елемената. На тај начин ученику дајемо могућност да комплексне идеје види у новом светлу и да

ефикасније решава проблеме. Вишеструке репрезентације омогућавају ученицима дубље разумевање наставних садржаја зато што им могу омогућити апстракцију, проширивање знања (генерализацију) и успостављање веза између репрезентација (Костић, 2017).

Репрезентације у математици су различити начини на које приказујемо математичке појмове (путем симбола, цртежа, речи или предмета) како бисмо их учинили видљивим и једноставнијим за обраду. Њихов значај је у томе што нам помажу да информације организујемо у прегледне целине, чиме се јасније уочавају везе између података у задатку. Коришћењем добрих математичких модела, ученици лакше повезују конкретне примере са апстрактним идејама, што води ка самосталности у решавању проблема и развоју логичког мишљења.

2. КОГНИТИВНО–ВИЗУЕЛНИ ПРИСТУП РЕШАВАЊУ ПРОБЛЕМА У МАТЕМАТИЦИ

Многи психолози и математичари сматрају визуелизацију важним менталним процесом не само за размишљање детета, већ и за математички вид размишљања одрасле особе (Urban et al., 2017). Постоји јасно препознатљив, али још увек неконвенционалан покрет који расте у математичкој заједници, чији је циљ да визуелно резоновање учини прихватљивом праксом математике, поред алгебарског мишљења и у комбинацији са њим (Arcavi, 2003). Према овом покрету визуелно резоновање није намењено само да подржи откривање нових резултата и начина њиховог доказивања већ треба да се развије у потпуно прихватљив и прихваћен начин расуђивања, укључујући доказивања математичких теорема (Arcavi, 2003).

Когнитивно-визуелни приступ процесу учења је дидактичко-методичка концепција којом се промовише визуелизација у процесу учења, значај повезивања визуелних и симболичких репрезентација као и употреба рачунарских технологија како би се креирало визуелно окружење за учење. Веома је значајна очигледност визуелних репрезентација за процес учења, зато што непосредна перцептивна сазнања представљају полазну основу за развој апстрактног мишљења. Визуелизација, ако је посматрамо са конструктивистичког аспекта, помаже ученицима при стварању сопствених менталних модела, а њена ефикасност се уочава у степену и начину учениковог ангажовања при активностима које представљају више од "самог гледања" (Костић, 2017). Основна претпоставка овог приступа у настави и учењу математике је планско и разнолико (у различитим ситуацијама) коришћење когнитивне функције очигледности како би ученици развили и користили визуелно мишљење (Далингер, 2006). Когнитивна функција очигледности ће, дакле, доћи до пуног изражаја када се дидактичко-методички осмисли визуелизација наставних садржаја тако да визуелне репрезентације као помоћна, илустративна средства претвори у водећа, "продуктивна когнитивна средства" (Далингер, Князева, 2004). Когнитивне радње ученика такође би се могле протумачити као пример онога што Магнани назива резоновањем заснованим на моделу које, у најмању руку, покреће конструкцију и манипулацију различитим врстама репрезентација, што укључује визуелне представе (Magnani, 2004). Визуелно размишљање, дакле, као врста представљања заснованог на закључивању може бити или лично тј. на основу појединачних субјективних слика или посредовано споља тј. на основу онога што ученик стекне у дистрибуираном контексту кроз деловање са другим ученицима и деловање на институционалним артефактима као што су манипулативни материјали и графички калкулатори (Rivera, 2011). Визуелне слике можемо да градимо на основу визуелних мемоа, али такође можемо да користимо ранију визуелну слику да бисмо створили нову слику коју заправо никада нисмо видели.

Основна карактеристика когнитивног приступа је да прво тражи да се утврди когнитивно функционисање које је основа различитих математичких процеса, а да би се утврдило порекло ученичког неразумевања прво морамо утврдити когнитивне услове који омогућавају разумевање (Duval, 2006). При реализацији когнитивно-визуелног приступа важни су тзв. *визуелизовани задаци*. То су задаци у којима је слика тј. визуелна репрезентација експлицитно или имплицитно део услова или решења задатка, а чија је

функција да сугерише начин решавања проблема, даје подршку при сваком кораку у решавању задатка, непосредно или посредно прати цео поступак решавања (Князева, 2003а). Визуелизовани задаци имају велики дидактичко-методички потенцијал за унапређење и развој способности и вештина визуелног мишљења код ученика, математичку комуникацију и решавање проблема. Користе се у свим етапама наставног процеса и средство су за продуктивну и ефикасну реализацију когнитивно-визуелног приступа (Далингер, 2011). Представљају један од главних алата за спровођење когнитивно-визуелног приступа настави математике. Визуелизовани задаци помажу при формирању вештина визуелног претраживања. У решавању математичких задатака може се користити слика експлицитно или имплицитно, али у оба случаја то доводи до тражења начина за решавање проблема (Далингер, 2006).

Когнитивно-визуелни приступ представља кључну карику у развоју математичког мишљења код ученика млађих разреда основне школе, јер омогућава несметану транзицију са конкретног на апстрактни ниво закључивања. Интеграцијом визуелних и менталних операција, овај модел директно смањује когнитивно оптерећење и помаже ученицима да сложене математичке односе дешифрују кроз препознатљиве обрасце, чиме се гради стабилна база за решавање проблема. Управо у том процесу, визуелизација се намеће не само као илустративно средство, већ као суштинска когнитивна стратегија која трансформише симболичке записе у јасне, ментално репрезентативне слике.

2.1. Визуелизација у настави математике - настанак идеје и појмовно одређење

Један од првих научника који је покренуо питање употребе визуелних репрезентација у математичком образовању био је Литлвуд (Littlewood, 1953). Међутим, идеја визуелног мишљења у математици и визуелизације у математичком образовању постала је распрострањена тек крајем XX и почетком XXI века. Што се тиче основног математичког образовања, идеја визуелизације образовних информација дата је у методичким препорукама реномираних европских педагога у периоду од XVIII до XIX века (Urban et al., 2017). Појам визуализација се одређује као "способност, процес и производ стварања, тумачења, употребе и рефлексије слика, дијаграма, у нашем уму, на папиру или помоћу технолошких алата, у сврху приказивања и преношења информација, размишљања и развијања од раније непознатих идеја и унапређивања разумевања" (Arcavi, 2003: 217). Потврђено је да визуелизације имају позитиван и значајан ефекат на исходе учења математике (Utami et al., 2021; Boonen et al., 2013). Мисли се на когнитивне исходе као што су разумевање појмова, вештине решавања проблема и задржавање наученог знања. Визуелизације су корисне за ученике свих узраста, нема значајне разлике међу половима, а применљиве су у различитим математичким областима, од геометрије до алгебре. Зато визуелизације треба активно интегрисати у наставу математике. Не треба их користити само као илустрације већ као кључни део процеса решавања проблема и објашњавања појмова (Schoenherr et al., 2024).

Поред појма визуелизације у математици Поланд и Ван Ојерс уводе појам шематизовање који дефинишу као активност графичког представљања стварности (Poland, Van Oers, 2007). Деца шематизовањем у раном узрасту креирају представе о

стварности. Помоћу шема људи могу да организују своја знања и мисли. Шематизовање подразумева когнитивне активности које се користе за формирање и унапређење симболичког представљања елемената физичке и социјално-културне стварности и као такво представља ефикасну стратегију која развија математичко мишљење.

Цимерман и Канингем визуелизацију описују као процес стварања и коришћења геометријских и графичких репрезентација математичких концепата, принципа или проблема (Zimmermann, Cunningham, 1991). Истичу и разлику између вида и визуелизације која се може приметити у математици, јер можемо визуелизовати појмове које никада нисмо, нити ћемо видети. Свакако, слике се користе у свакодневном животу, иако се не сматрају главним мисаоним средством, оне су механизам мишљења релевантан за стварање хипотеза. Неке хипотезе природно имају сликовити облик како тврди Магнани (Magnani, 2001). Он мисли да слике кодирају информације на такав начин да се њиховом употребом у великој мери смањује сложеност процеса доласка до решења.

Како наводе Хит (Hitt, 2002), Цимерман и Канингем (Zimmermann, Cunningham, 1991) визуелизација математичких концепата и математичких процеса је важан аспект како математике уопште, тако и математичког мишљења, разумевања и резоновања. Визуелно утемељени приступ пружа алтернативни и ефикасни пут који може помоћи ученицима у бољем разумевању математике (Rivera, 2011).

Људи су по природи склони визуелизацији чињеница. Користећи слике лакше размишљамо јер имамо навику да размишљамо о материјалним објектима (Fischbein, 1977). Међутим, Пирс тврди да је немачки математичар Карл Вајерштрас (Karl Weierstrass, 1815-1897) одговоран за изостављање слика у математици (Peirce, 1956). Он наводи да целу Вајерштрасову математику карактерише неповерење у интуицију. Дејвис (Davis, 1993) прати историјски пад слике у геометрији почев од успешне алгебризације геометрије у седамнаестом веку захваљујући Декарту (Rene Descartes, 1596-1650). Уследили су, у деветнаестом веку, снажни концептуални проналасци објеката у бесконачности и сложене пројективне геометрије, који се нису могли визуелно представити. На крају потпуно прихватање апстрактних дедуктивних система као резултат нееуклидских геометрија које, у ствари, славе пропаст јединственог погледа на истину. Математичари су били свесни вредности визуелних алата за наставу и математичка открића, али упркос очигледној важности визуелних слика у људским когнитивним активностима оне остају потцењене, како у теорији тако и у пракси. Како наводи Аркави (Arcavi, 2003), сви смо научени да попреко гледамо на доказе који кључно користе дијаграме, графиконе или друге нејезичке облике представљања и тај презир преносимо на ученике.

Значај визуализације посебно истиче Зељић која тврди како код детета тако и код одрасле особе у когнитивној активности слике и појмови међусобно утичу једни на друге. Ученици не разумеју алгебру зато што се математичке идеје представљају само симболичким репрезентацијама, а тај проблем се може решити иконичким представљањем (Зељић, 2021). Ауторка наводи одломке из биографија Хобса, Русоа, Дарвина и Расела који показују њихову одбојност према елементарној алгебри у њиховом математичком образовању. Разлог за потешкоће и проблеме у учењу елементарне алгебре је неуспешан процес развијања иконичког представљања појмова. Такође, разлике у учењу геометрије и алгебре не приписују се само разликама геометрије и алгебре као различитим гранама математике, већ томе што се геометрија учи релационо, а алгебра инструментално. При

учењу геометрије користимо слике тако да се геометријско резоновање, како истиче Ђокић, описује као интеракција између сликовног (фигуралног) и појмовног аспекта (Ђокић, 2018).

Примена визуализације у учењу математике, данас је од централног значаја што произилази из чињенице да она више није везана само за илустративно, већ је и кључна компонента резоновања, решавања проблема, па чак и доказивања (Arcavi, 2003). Арнхајм у свом делу *Визуелно мишљење – Јединство слике и појма* истиче да визуелне слике нису само илустрације мисли, већ развијање самог мишљења (Arnhajm 1985). Упркос важности питања улоге и значаја визуализације у настави математике на раном узрасту постоје многа питања која се тичу визуелизације и потешкоће око визуелизације које Аркави класификује у три главне категорије: "културне", когнитивне и социолошке (Arcavi, 2003).

"Културне" потешкоће односе се на веровања и вредновање шта би математика и бављење математиком значили, тј. шта је легитимно или прихватљиво у математици, а шта није. Дискутабилан је статус визуелних доказа, јер унутар математичке заједнице постоје контраверзе и изјаве којима се тврди да то није математика и то од стране најистакнутијих представника. Овакав став девалвације визуелизације оставља мало простора да пракса у учионици инкорпорира и вреднује визуелизацију као саставни део наставе математике.

Когнитивне потешкоће односе се на дискусију о томе да ли је визуелни приступ когнитивно лакши или тежи, то би било поједностављено објашњење. Када визуелизација делује на концептуално богате слике онда је и когнитивни захтев висок. Размишљање о концептима у визуелним окружењима може бити и ризично јер може имплицирати да не постоје увек процедурално сигурне рутине као што је то случај код формалних симболичких приступа. Још једна когнитивна потешкоћа произилази из потребе да се постигне флексибилно прелажење и истовремено коришћење визуелних и аналитичких репрезентација исте ситуације, а учење да се разуме и буде компетентно у руковању вишеструким репрезентацијама може бити дуготрајан, контекст зависан, нелинеаран, па чак и мукотрпан процес за ученике.

Социолошке потешкоће укључују питања наставе, јер поучавање подразумева трансформацију коју знање пролази када се из свог научног, академског карактера прилагоди знању какво треба да се предаје. Под једном врстом социолошке потешкоће или боље рећи социо-културне јесте тенденција да школе имају ученике из различитих културних средина, различите културе разликују се и по нивоу визуелног богатства.

Иако су уочене потешкоће нови приступи наставног плана и програма, иновативне праксе у учионици и разумевање које развијамо помоћу њих поново вреднују вузуелизацију и њену природу, дајући јој централно место у математичком образовању. То не значи да се све потешкоће могу решити визуелизацијом нити да је вузуелизација "лек" за проблеме математичког образовања, али боље разумевање би требало да обогати наше схватање аспеката стварања смисла људима за математику и на тај начин да послужи напретку наше области (Arcavi, 2003).

Чињеница је да многи аутори истичу да је визуелно мишљење значајно за процес учења, такође истичу важну улогу визуелизације у променама у настави математике (Schoenherr, Schukajlow, 2024; Arcavi, 2003; Presmeg, 1992; Zimmermann, Cunningham,

1991), а има и радова у којима се анализирају и потешкоће као и ограничиња при визуелизацији (Aspinwall et al., 1997; Baker et al., 2000; Monk, 2003; Presmeg, 2006).

Визуелизација се састоји од процеса различите природе и сви они потврђују Фишбајнову тврдњу да визуелизација поред тога што смислено организује податке чини и важан фактор који води аналитички долазак до решења (Fischbein,1987). Аркави тврди да визуелизација може бити и више од тога, да може бити сам аналитички процес који се завршава општим формалним решењем (Arcavi, 2003). Иако цитира Гетеа који каже: "Не знамо шта видимо, ми видимо оно што знамо" наводи да оно што видимо није одређено само количином претходног знања, већ је у многим случајевима такође одређено контекстом у којем се посматрање одвија (Arcavi, 2003: 230). У различитим контекстима "исти" визуелни објекти могу имати различита значења чак и за стручњаке (Arcavi, 2003). Дидактички провереном употребом визуелних слика у настави математике визуелизација, тврди Делингер, може да се трансформише из помоћног, илуструјућег средства у "водеће, продуктивно методичко средство" које доприноси математичком развоју ученика (Далингер, 2006).

Напредак у технолошким алатима у основи је дао подстицај за спровођење више истраживања о визуелизацији у математици. Док се неколико студија (Tall, 2003; Magnani, 2004) фокусирало на интеракцију ученика са образовним софтвером, динамички аспект нових алата се примарно доживљава као средство за поспешивање процеса визуализације.

Иако су уочене многе потешкоће и различити ставови према визуелизацији у ранијим периодима, а истакнуте и многе предности, сматрамо да је неопходно укључити је у наставни процес, посебно код деце млађег школског узраста како би препознали њену вредност и помоћ посебно при решавању математичких проблема.

2.2. Значај визуелне репрезентације при решавању математичких проблема

Побољшање просторне визуелизације код ученика, односно, способности менталног манипулисања и разумевања облика и простора, директно утиче на побољшање математичких способности ученика (Lowrie, Logan, 2023). Данас се посебно наглашава значај просторне визуализације која се не посматра само као "додатак" математици, већ њен темељни део. Развој те вештине ствара јачу когнитивну основу која помаже ученицима да боље разумеју и решавају математичке проблеме, не само у геометрији, већ и у другим областима математике (Lowrie, Logan, 2023). Просторна визуелизација није само "видети" објекте, то је способност да их ментално ротирате, склопите, раставите, премештате и видите из различитих углова. На пример, замислити како ће изгледати кутија ако се расклопи или како ће се два 3Д облика уклопити. Трансфер, односно преношење вештине са просторне визуелизације на математику није случајан. Способност просторне визуелизације ученицима помаже да боље креирају, разумеју и манипулишу визуелним репрезентацијама које користе, што олакшава решавање проблема. Такође, побољшана просторна визуелизација помаже у организацији информација у радној меморији. То значи да ученици могу да прате више корака у математичком проблему без преоптерећења, јер им је ментални простор за визуелне информације ефикаснији. И на крају, учење просторне визуелизације подстиче ученике да траже различите начине

решавања проблема и да размишљају о проблему из више перспектива, а та флексибилност је кључна у математици, посебно у геометрији и алгебри. Требало би у школске програме увести циљане активности за побољшање просторне визуелизације, не само у оквиру ликовног или техничког образовања, већ и као интегрисани део математичке наставе. То се може постићи кроз: игре са слагалицама и геометријским облицима, коришћење блокова и других 3Д објеката, вежбе менталне ротације и слагања (Lowrie, Logan, 2023).

У извештају радне групе *Representations and Mathematics Visualization* (Репрезентације и математичка визуелизација), са 20. конференције ПМЕ-на (Psychology of Mathematics Education) истакнуто је да се у настави математике, на свим нивоима, највише користе алгебарске репрезентације и да су геометријске и интуитивне репрезентације запостављене (Hitt, 2002). Занемаривање визуелних репрезентација и визуелних приступа учењу може довести до неусклађеног развоја различитих облика математичког мишљења (Duval, 2006). Ученици са недовољно искуства у раду са визуелним репрезентацијама имају проблема и при повезивању визуелних и симболичких репрезентација, то је један од основних проблема традиционалне наставе. Визуелне репрезентације у настави математике се најчешће користе у геометрији. Могу се користити и у другим областима, али су недовољно заступљене. Дувал даје импресиван опис различитих семиотичких приказа намењених геометријском знању, укључујући трансформације које се одвијају у одговарајућим визуелним облицима који прате приказе (Duval, 2006). Намеће се питање како такав модел можемо користити у другим областима школске математике као што су теорија бројева и алгебра о којима се подучава широм света из симболичког и невизуелног контекста. Ако планирамо употребу визуелних модела у аритметичком решавању проблема, Нг и Ли препоручују да наставници понуде деци сет тачних решења како би их поредила са нетачним, тако се грешке артикулишу и помажу им при побољшању њихових цртежа модела (Ng, Lee, 2009).

Визуелизација је важна за прелазак са конкретног на апстрактни модел мишљења (Ben-Chaim et al., 1989), јер су визуелне репрезентације комбинација конкретних и апстрактних елемената математичког проблема. Ученици добијају прилику да увођењем визуелних приступа у наставу математике стекну функционална знања, важно је научити и креативно користити визуелизацију као оруђе за разумевање. То је суштина математичке визуелизације (Zimmerman, Cunningham, 1991). Цимерман и Канингам још наводе да визуелизација у психологији представља способност формирања менталне слике, док је математичка визуелизација способност ученика да нацрта одговарајући дијаграм (користећи оловку, папир или компијутер) и представи математички концепт или проблем како би постигао разумевање и помоћ при решавању проблема (Zimmerman, Cunningham, 1991). Дакле, у математици визуелизација није циљ сама по себи већ, како они тврде, средство ка циљу, а тај циљ је разумевање.

Међутим, морамо истаћи да употреба визуелних репрезентација није увек ефикасна код решавања проблема, а некада и наведе ученика на погрешно решење (Presmeg, 1992). Разлог је, најчешће, одабир неадекватне репрезентације за дати проблем. Понекад ученици, али и наставници, свесно или несвесно одбацују визуелни приступ јер не постоји шаблон за коришћење и когнитивно је захтевнији од алгебарског приступа (Arcavi, 2003). Истраживања која је спровела Пресмег (Presmeg, 1991, 2006) пружају дубок увид у то како когнитивни стилови наставника директно обликују наставну праксу и стратегије учења код ученика. У својој квалитативној студији, Presmeg (1991) је анализирала интеракцију

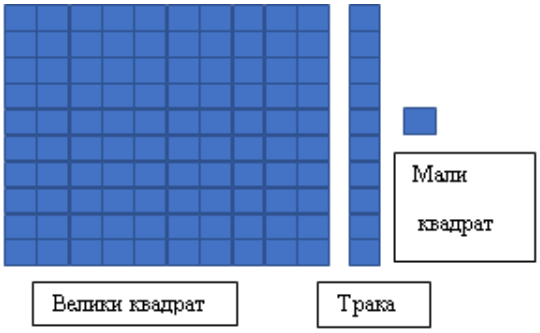
између наставних метода и визуелних преференција код 13 средњошколских наставника математике, идентификујући три кључна обрасца понашања. Истраживање је показало да наставници који сами поседују јаке визуелне вештине не теже искључиво ка визуелизацији у настави. Уместо тога, они показују флексибилност, али не намећу визуелизацију као једини модалитет сазнања. Наставници са средњим степеном визуелне преференције најефикасније интегришу визуелне стратегије у наставни процес. Они подстичу ученике да користе сликовне приказе, али их јасно позиционирају као средство које води ка крајњем циљу – апстракцији и математичкој генерализацији. Најкритичнији налаз односи се на наставнике који се ослањају искључиво на невизуелне, логичко-симболичке методе. Код њихових ученика примећена је тенденција супресије визуелног размишљања. Уместо развоја концептуалног разумевања, настава се своди на механичко меморисање алгоритама и процедуралну вештину баратања симболима (Presmeg, 1991).

Деценију и по касније, Пресмег (Presmeg, 2006) проширује своју анализу и указује на чињеницу да визуелизација није само помоћно средство, већ сложен когнитивни процес који захтева пажљиво вођење. Она истиче да наставни процес мора бити дизајниран тако да "премости јаз" између конкретне слике и апстрактног концепта. У закључним разматрањима свог рада, Пресмег (Presmeg, 2006) поставља низ истраживачких питања која и данас представљају основу за проучавање визуелне семиотике и значаја визуелизације у математичком образовању.

2.3. Вишеструке репрезентације којима се подржава когнитивно-визуелни приступ

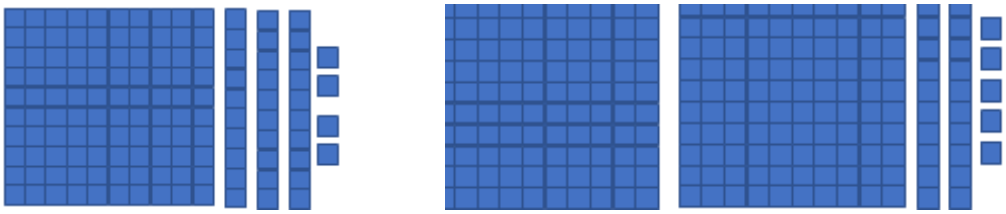
Један од најзначајнијих теоретичара образовне психологије, Џером Брунер (Jerome Bruner) је тражио начин који би био усклађен са сазнајним могућностима ученика, а којим би се математички појмови учили на једноставнији, лакши начин. Био је уверен да се и компликовани појмови могу представити сваком детету ако би се водило рачуна да то буде на нивоу који одговара дететовим капацитетима и искуству (Милинковић, 2006). У својој теорији когнитивног развоја посебно је истицао формирање појмова и развој математичког мишљења кроз модел вишеструких репрезентација. Он тврди да је за сам когнитивни развој као и за разумевање математичких појмова битна интеракција ученика и средине. Како Брунер (Брунер, 1976) тврди настава би требала бити организована тако да подстиче когнитивни развој и наводи ученике да формирају нова знања и интегришу их са постојећим, стеченим знањима. По његовим речима настава може имати велики утицај у интелектуалном развоју ученика, али само ако се користе различити нивои стицања знања и методе, такође и решавање проблема као и учење путем открића (Вилотијевић, Вилотијевић, 2016). У свом раду Брунер се делимично ослањао на Пијажеову теорију развоја (Милинковић, 2006). Предложио је модел са три облика интеракције са окружењем тј. три начина да се знање репрезентује: енактивни (акциони, конкретни), иконички (графички, сликовни) и симболички (Bruner, 1966). У енактивном облику репрезентовања знања ученици долазе до разумевања помоћу одређених радњи тј. акција са манипулативним наставним средствима и другим различитим конкретним материјалима. Иконички начин репрезентовања знања односи се на способност ученика да независно од физичког поступања са предметима концепт представи путем слика (шеме, графикони, графици, слике геометријских фигура итд.). Симболички начин репрезентовања

подразумева да ученик радњу и слику преведе на језик математичких симбола. Пошто је обавезан део модела иконичка (визуелна) репрезентација која подстиче когнитивни развој Брунеров модел може се сматрати једном врстом когнитивно-визуелног приступа настави и учењу. На пример, у основној школи ученици често користе блокове базе десет као манипулативе при учењу основних операција и месних вредности. Тај скуп блокова базе десет чине квадрати 1cm·1cm, траке 1cm·10cm и велики квадрати 10cm·10cm. Сваки мали квадрат представља „1“, свака трака „10“, а сваки велики квадрат „100“.



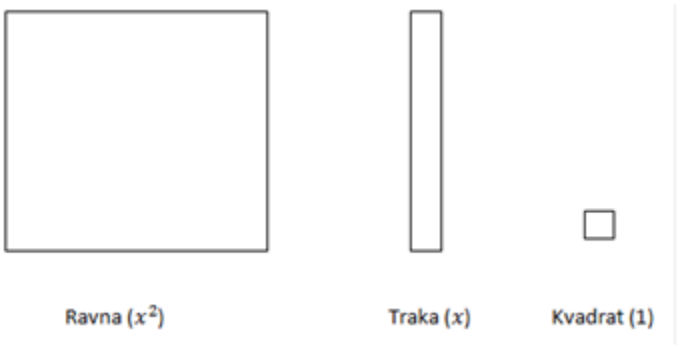
Слика 4. *Представљање целих бројева помоћу блокова базе десет*

На слици 4. блокови су представљени коришћењем квадратне мреже (визуелно). Ако затражимо од ученика да саберу 134 и 225 они то могу учинити у енактивном облику користећи блокове, иконички представљањем блокова у квадратној мрежи као на слици 5., а и симболички 134 + 225=359.



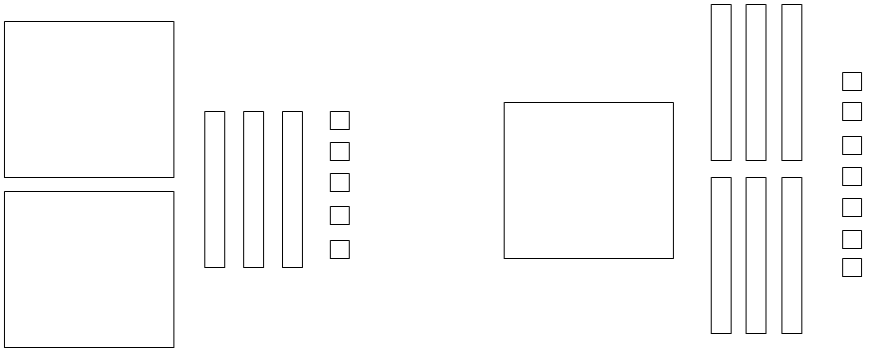
Слика 5. *Сабирање 134+225 помоћу блокова базе десет*

Ученици лако уоче 3 велика квадрата, укупно 5 трака и 9 малих квадрата тако да је збир бројева 134 и 225 број 359. Овај поступак показује ученицима да се сабирају блокови исте величине, а њих схватају као исте месне вредности (стотине, десетице и јединице). Сличан модел се може применити и у алгебри у старијим разредима основне школе, али се користе алгебарске плочице као манипулативи. Стандардни скуп алгебарских плочица укључује три облика приказана на слици 6.: квадрате странице 1cm, траку која је 1cm широка и неколико (x) центиметара дуга и велике квадрате чија страница је једнака дужини траке (x).



Слика 6. *Алгебарске плочице*

Мали квадрат 1cm·1cm представља једну квадратну јединицу површине, површина траке је 1cm·x тако да представља x, а велики квадрат је површине $x \cdot x$ тако да представља x^2. Ако треба поједноставити израз $(2x^2 + 3x + 5) + (x^2 + 6x + 7)$ можемо користити алгебарске плочице.



Слика 7. *Сређивање израза $(2x^2 + 3x + 5) + (x^2 + 6x + 7)$ помоћу алгебарских плочица*

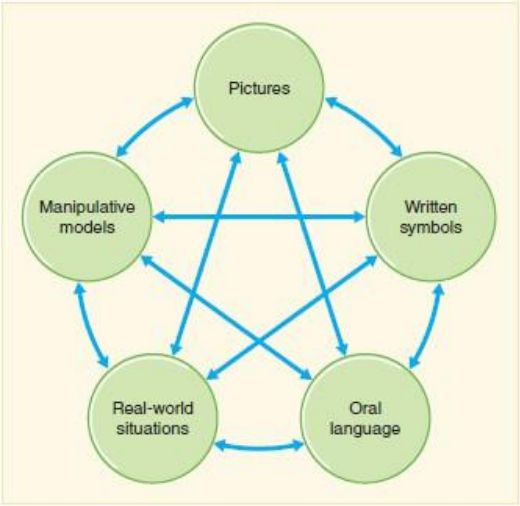
Слика пружа могућност да се лако уоче 3 велика квадрата, 9 трака и 12 малих квадрата, значи да је сређени израз $3x^2 + 9x + 12$ (Слика 7.). Напоменимо да је већина комерцијално доступних сетова израђена од пластике различите боје на свакој страни, тако да једна страна (боја) представља позитивну вредност, а друга страна (боја) супротну, односно негативну вредност плочице. На тај начин се ученицима пружа прилика да користе плочице за полиноме који имају и позитивне и негативне коефицијенте.

По Брунеру (Bruner, 1972) се развој процеса мишљења не дешава у временски одређеним етапама, већ истовремено, у оквиру три наведене равни апстракције тј. мисаоних репрезентација. Дакле, у његовом моделу вишеструких репрезентација сва три начина интеракције и репрезентовања истовремено постоје и узајамно се преплићу.

За многе ученике математика је скуп правила и процедура, јер су је учили користећи искључиво симболичка представљања и у учионицама где се више ценило добијање одговора, него схватање смисла математичких правила и процедура којима се до тог одговора долази. Иако постоје ученици који могу научити и бити успешни користећи само симболичка представљања и којима друге и другачије репрезентације нису потребне

Брунер упозорава да такви ученици и њихови наставници ризикују јер не поседују визуелне репрезентације којим се могу вратити у случају да симболички приступ не успе (Bruner, 1972).

Као проширење Брунеровог модела појавио се Лешов модел вишеструких репрезентација у ком се наводи пет типова екстерних система репрезентација: реална животна искуства, манипулативни модели, слике или дијаграми, изговорене речи, писани симболи (Lesh et al., 1987). Пошто и Лешов модел поседује визуелну репрезентацију и захтева когнитивне процесе при коришћењу различитих репрезентација такође представља један облик когнитивно-визуелног приступа настави и учењу. Очигледно је да реална искуства и манипулативни модели одговарају Брунеровим енактивним репрезентацијама, слике и дијаграми би били иконичке, а изговорене речи и писани симболи симболичке репрезентације. Леш и сарадници су открили да се јачањем способности кретања између различитих репрезентација побољшава и ученичко разумевање и трајност знања (Lesh et al., 2003). Следећа слика (Слика 8) приказује пет репрезентација из Лешовог модела.



Слика 8. *Употреба различитих врста репрезентација (Lesh et al., 2003: 35)*

На Слици 8. приказан је процес кретања између: реалне животне ситуације, манипулативних модела, сликовне репрезентације, писаних симбола и говорног језика. При увођењу репрезентација тачно утврђен редослед не постоји, зависан је од појма који се представља, предходног ученикових знања, афинитета учитеља итд. Реалне животне ситуације се односе на појаве из нашег природног окружења и представљају математичке садржаје, али поред оног чиме су одређене оне садрже и оно што је неважно за математичке односе које у њима откривамо. Ако конкретну ситуацију представимо иконички добићемо мање шума и представљање ће бити чистије. Иконичка представљања делимо на пиктограме и идеограме зависно од тога да ли представљају конкретно и физичко или ментално. Пиктограм је цртеж који користимо да представимо реалну ситуацију коју опажамо или поједностављен приказ такве ситуације, а идеограм је цртеж

који користимо да представимо неки појам пројектујући његову представу. То би значило да цртеж, на пример три кружића, представља пиктограм за реалну ситуацију у којој посматрамо три лопте, а идеограм појма броја три (Marjanović, 2007). Ученик везује значење и симбол када на основу слике симболички изрази представљене математичке односе. Коришћење дијаграма, слика и текстуалног контекста како би представили математичке појмове врло је важна сратегија при подучавању ученика млађих разреда. Ученик разуме математичку идеју ако је може препознати у различитим репрезентацијским системима и ако је може превести из једног система у други (Lesh et al., 1987). Леш такође истиче да спољашње репрезентације омогућавају двосмерну комуникацију између ученика и наставника: од наставника према ученику у смислу преношења математичких идеја, од ученика према наставнику пружањем повратне информације наставнику о учениковом разумевању математичких идеја.

Правило троструких репрезентација (енг. *Rule of Three*) користи се у наставном приступу последњих тридесет година и такође представља когнитивно-визуелни приступ, а подразумева три аспекта: графички (геометријски), алгебарски (аналитички) и нумерички који требају бити уравнотежени (Hughes-Hallett, 1991). Цимерман и Канингем тврде да интуиција коју тражи математичка визуелизација даје дубину и смисао разумевању, она је водич за решавање проблема и инспирише креативна открића, а да би се постигла таква врста разумевања визуелно мишљење и графички прикази морају бити повезани са другим начинима математичког мишљења и другим облицима представљања (Zimmermann, Cunningham, 1991). Они сматрају да је потребно да ученици науче како да исту идеју представе симболички, нумерички и графички и како да прелазе из једног облика у други, а и за О'Халорана, математички дискурс се састоји од три семиотичка извора, наиме језика, математичке симболике и визуелних слика (O'Halloran, 2005). Убрзо је правило троструких репрезентација проширено четвртом, вербалном репрезентацијом, па је прерасло у правило четвороструких репрезентација (енг. *Rule of Four*). У моделу четвороструких репрезентација нема енактивне репрезентације из Брунеровог модела, али зато графичке репрезентације одговарају иконичким репрезентацијама док алгебарске, нумеричке и вербалне представљају различите типове симболичких репрезентација (Tall, 2003). Папе и Чошанов (2001) наводе експеримент у ком су руски средњошколци решавали и доказивали задатке из тригонометрије. Прва група ученика ("чисто-аналитичка") је подучавана традиционалним аналитичким (алгебарским) приступом тригонометријском решавању и доказивању проблема. Друга група ("чисто-визуелна") је подучавана визуелним (геометријским) приступом користећи енактивне (тј. геотаблу као помоћ при манипулацији) и иконичне (сликовне) репрезентације. Трећа, експериментална група ("репрезентациона") подучавана је комбинацијом аналитичких и визуелних средстава коришћењем прелаза и повезивања различитих начина представљања. Репрезентациона група је имала 26 процената више успеха од визуелне и 43 процента више успеха од аналитичке групе (Pape, Tchoshanov, 2001). Ученици у репрезентационој групи били су много флексибилнији у преласку са једног начина представљања на други, трагали за бољим разумевањем математичких концепата и на тај начин стекли компетенције за решавање математичких проблема.

Коришћењем различитих вишеструких репрезентација у оквиру когнитивно-визуелног приступа у настави математике ученици не само да превазилазе когнитивне баријере, већ развијају способност "превођења" идеја из једног система у други, што се

сматра кључним индикатором математичке компетенције. Овакав облик наставе смањује ослањање на пуко меморисање процедура и омогућава сваком ученику да пронађе полазну репрезентацију која најбоље одговара његовом когнитивном стилу, чинећи математику приступачнијом, повезанијом и примењивијом у реалном контексту.

2.4. Квадратна мрежа у когнитивно-визуелном приступу решавању проблема

За приказ визуелних репрезентација при коришћењу когнитивно-визуелног приступа решавању проблема можемо користити погодности квадратне мреже. "Квадратна мрежа је мрежа која се добија када се паралелне вертикалне линије на једнаком међусобном растојању пресеку са паралелним хоризонталним линијама на истом том растојању. Раван се на тај начин прекрива подударним квадратима јер су вертикалне линије ортогоналне са хоризонталним, а растојања међу линијама су једнака" (Маричић, Стојкановић, 2021: 112). Квадратна мрежа може бити од помоћи ученицима и наставницима у многим активностима предвиђеним наставом математике у основној школи као што су: цртање, упоређивање и мерење дужи, цртање правог угла, паралелних и нормалних правих, правоугаоника, квадрата, мерење обима фигура и њихових површина, цртање симетричних фигура, рачунске операције, решавање једначина и неједначина итд.

Анализом плана и програма наставе математике за млађе разреде основне школе може се уочити "да се у сваком од прва четири разреда користи квадратна мрежа при обради садржаја из геометрије" (Маричић, Стојкановић, 2021: 115), али се може користити врло успешно и у алгебри. Како би изградили значења алгебарских симбола и процедура од великог значаја је активност визуелног представљања квантитативних односа. Ту активност, као и коришћење различитих репрезентација како би представили проблемске ситуације, многи аутори виде као значајну компоненту алгебарског мишљења тврди Зељић (Зељић, 2014). Ауторка, такође, инсистира на визуелизацији за коју тврди да може бити од помоћи при истраживању математичких проблема и дати значење математичким појмовима као и односима међу њима. Квадратна мрежа је погодна за приказивање квантитативних односа. Везе и односи између математичких објеката по Роману могу бити приказани у више форми укључујући видљиву, као на пример дијаграми (слике или графови), нумеричку (на пример табеле), симболичку и вербалну (Romano, 2009). При решавању већег броја проблема добро математичко објашњење, тврди он, укључује више ових репрезентација истовремено јер свака од њих доприноси на свој јединствен начин разумевању представљених идеја, а способност креирања, тумачења, као и прелажења са једне на другу репрезентацију, њихово међусобно упоређивање и комплементирање даје ученицима корисне алате математичког мишљења. Квадратна мрежа може помоћи у приказу веза и односа међу математичким објектима ако ученике упознамо и научимо како да је користе у различитим моделима.

Основу учења код ученика млађег узраста чине очигледност, перцепција и визуелизација јер утичу на постављање коректне менталне слике у процесу у ком се формирају математички појмови (Guncaga, Žilková, 2019). У многим активностима које су предвиђене наставом геометрије у основној школи ученицима може помоћи коришћење квадратне мреже.

Поред широке примене на редовним часовима геометрије и математике уопште квадратна мрежа користи се и у задацима неких међународних тестирања као што је TIMSS. Иако се представници држава које учествују у тестирању договоре око заједничког програмског оквира утврдили смо да постоје разлике у програму TIMSS и наставном програму математике у Србији. На пример "у области Геометрија тестира се употреба неформалног координатног система за одређивање положаја тачке у равни. За приказ тачака у координатном систему у TIMSS тестовима користи се квадратна мрежа, тако да иако се са координатним системом не сусрећу у млађим разредима основне школе ученици успевају да користећи особине мреже дођу до тачног решења" (Маричић, Стојкановић, 2021: 116). Резултати добијени након тестирања показали су да "наши ученици владају и оним математичким садржајима које нису учили у редовном систему" (Станојевић, Милинковић, 2013: 26.) разлог за тако позитиван резултат је начин на који је ученицима задатак постављен и алат који им је за решавање понуђен. У раду ћемо представити могућности које квадратна мрежа може да оствари као помоћ у решавању проблема, разумевању математичких појмова и код разумевања и увођења садржаја мерења површине.

2.4.1. Визуелне репрезентације у квадратној мрежи као помоћ при решавању математичких проблема

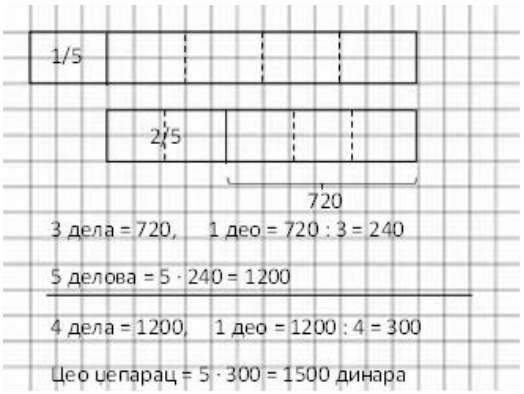
У млађим разредима основне школе ученици још немају развијен апстрактни облик мишљења па је зато битно користити разне моделе и алате за лакше разумевање појмова и проблема. Занимљив приступ визуелизацији и решавању проблема у млађим разредима имају сингапурски уџбеници у којима се модел правоугаоника (енг. *bar model*) користи кроз цело образовање само се постепено надопуњује (Hoven, Garelick, 2007). На почетку се користи за визуелизацију једноставних математичких операција попут сабирања, одузимања и упоређивања, а потом се прелази на теже проблеме. Захваљујући том моделу сингапурски ученици успешно решавају проблеме са разломцима, већ у нижим разредима основне школе, а модел се лако може примењивати у квадратној мрежи где квадратићи помажу при цртању и упоређивању.

Способност ученика да манипулишу различитим репрезентацијама, као и да их користе у новим проблемским ситуацијама је, како тврде Обрадовић и Зељић, пресудна у поступцима решавања проблема (Obradović, Zeljić, 2015). Тако се за задатке са разломцима може користити визуелизација у квадратној мрежи која представља scaffold алат. На пример задатак "Корпа јабука": *У корпи је 42 јабуке, од тога су 2/7 црвене и остале су зелене. Колико је зелених јабука у корпи?*



Слика 9. *Решење задатка "Корпа јабука"*

Такође и задатак "Лолин џепарац" који је мало сложенији: *Лола је потрошила 1/5 свог џепарца на привезак за ранац, 2/5 преосталог новца потрошила је на књигу и остало јој је још 720 динара. Колики је Лолин џепарац?*



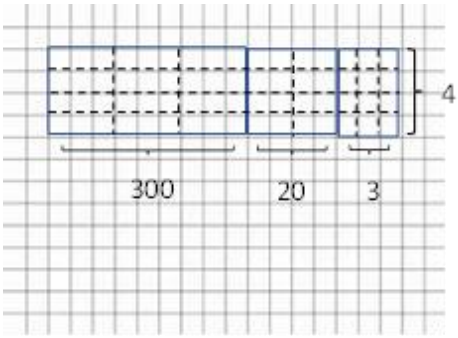
Слика 10. *Решење задатка "Лолин џепарац"*

Поред овог сингапурског модела квадратна мрежа је применљива и на многе друге моделе које користимо за визуелне репрезентације у математици. Њена примена олакшава цртање, поготово млађим ученицима, и упоређивање, тако да се може постићи висок ниво очигледности што доприноси повезивању са симболичким и нумеричким репрезентацијама. Квадратна мрежа је алат са којим се ученици срећу још у првом разреду, а може се користити за визуелизацију математичких концепата и проблема и помоћи ученицима у разумевању и савладавању многих математичких појмова и недоумица не само из геометрије већ и алгебре. Способност да се нацртају једноставне фигуре које представљају математички проблем, да се такве фигуре тумаче са разумевањем и да се такве фигуре користе као помоћ у решавању проблема су основне вештине визуелизације. Без таквих основних вештина, мало је вероватно да се и визуелизација заснована на рачунару може користити ефикасно или чак смислено. Визија није визуелизација, видети не значи нужно разумети (Zimmerman, Cunningham, 1991). Квадратна мрежа је алат који

ученицима млађих разреда основне школе може помоћи у стицању основних вештина визуелизације, док визуелизацију коришћењем рачунара мало који ученик тог узраста може успешно конструисати и користити.

2.4.2. Визуелне репрезентације у квадратној мрежи као помоћ при разумевању математичких појмова

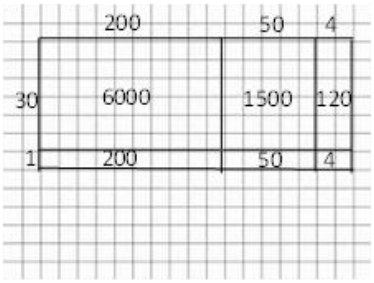
Ученицима се може представити множење збира бројем у квадратној мрежи као и модел множења који користи квадратну мрежу. Како тврде Хурст и Хантли "у основи алгоритма множења лежи својство дистрибутивности, али се ипак годинама несвесно користи алгоритам" (Hurst, Huntley, 2020: 232). Да би се уочило коришћење дистрибутивности може се користити квадратна мрежа. Прво се прикаже модел множења једноцифреним бројем, а кад се то разуме метода мреже се може користити за вишецифрене бројеве.



$323 \cdot 4 = (300 + 20 + 3) \cdot 4 = 300 \cdot 4 + 20 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 1200 + 80 + 12 = 1292$

Слика 11. *Приказ множења вишецифреног броја једноцифреним на квадратној мрежи*

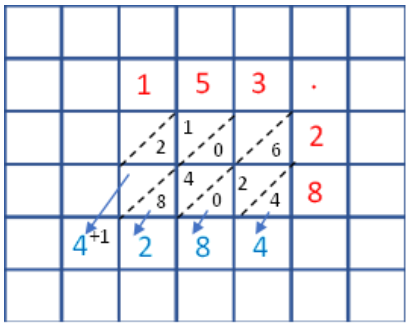
Дистрибутивно својство множења сматра се кључним за разумевање алгоритма множења који наставници подучавају на различите начине (Hurst, Huntley,2020). На слици 12. приказан је модел множења вишецифрених бројева који користи својство дистрибутивности и визуелизацију у квадратној мрежи.



$$254 \cdot 31 = 254 \cdot (30 + 1) = 254 \cdot 30 + 254 \cdot 1 = (200 + 50 + 4) \cdot 30 + (200 + 50 + 4) \cdot 1 =$$
$$= 200 \cdot 30 + 50 \cdot 30 + 4 \cdot 30 + 200 \cdot 1 + 50 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 6000 + 1500 + 120 + 200 + 50 + 4 =$$
$$= 7500 + 320 + 54 = 7874$$

Слика 12. *Приказ множења вишецифрених бројева на квадратној мрежи*

Коришћење модела у процесу наставе може допринети овладавању и утврђивању усвојених знања, интеграцији знања као и откривању нових идеја које тек треба да се разумеју и објасне (Yildirim et al., 2010). Алгоритам писменог множења вишецифрених бројева може се представити и уз помоћ квадратне мреже као што је приказано на слици 13.



$$153 \cdot 28 = 4284$$

Слика 13. *Алгоритам множења у квадратној мрежи*

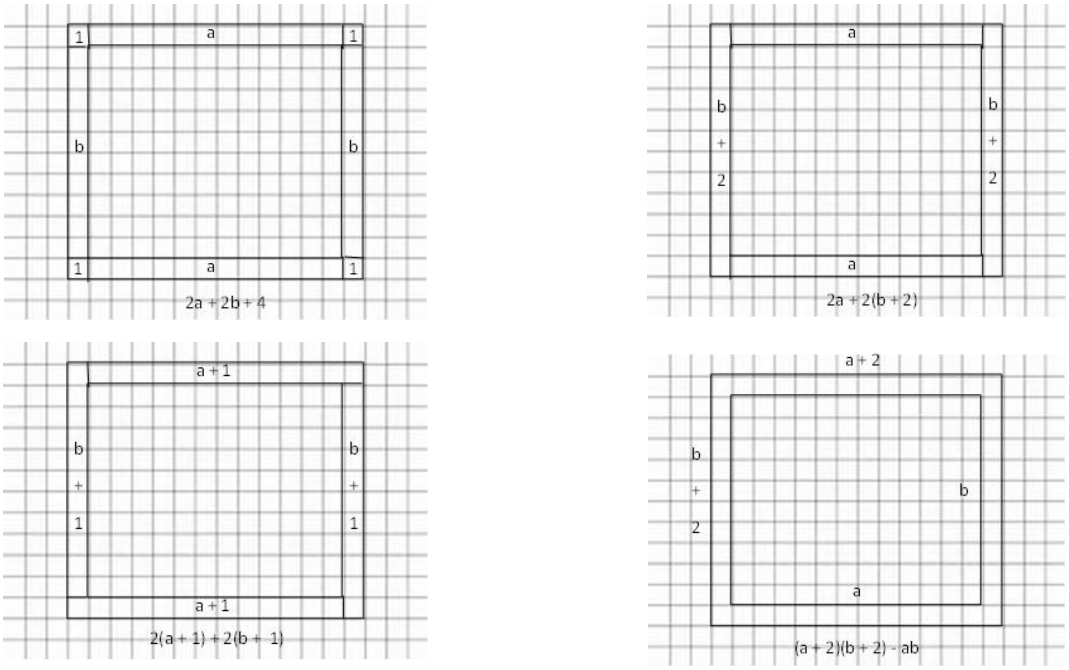
Иако не постоји истраживање у ком се конкретно користи квадратна мрежа постоји већи број истраживања усмерених на утицај различитих врста репрезентација на разумевање математичких појмова и односа, а једно такво је истраживање Купера и Варена (Cooper, Warren, 2011). Предмет њиховог истраживања био је утицај различитих модела и репрезентација на способност ученика да генерализују правило сталности збира. У свом истраживању прво су користили репрезентације и различите моделе како би уочили правилности без квантификације тј. записивања бројева, затим су прешли на моделе у којима су користили бројеве, да би на крају користили само аритметичку репрезентацију. После употребе наведених модела и одговарајућих репрезентација од ученика је захтевано да уопште (генерализују) правило својим речима (реторички). Аутори

су закључили да је коришћење различитих начина представљања довело до успешног уопштавања правила, а највише коришћење модела без квантификације (бројева). Као најподеснији модел издвојили су модел дужи који се врло лако може користити у квадратној мрежи.

2.4.3. Визуелне репрезентације у квадратној мрежи као помоћ у геометрији при мерењу површине фигуре

Према мишљењу Џонса коришћење квадратне мреже, у својству инструкционог материјала, помаже ученицима да се ангажују у активностима у којима формирају математичке појмове и уопште решавају проблеме (Jones, 2002). Истраживачи посебно истичу значај квадратне мреже у формирању геометријских облика, разумевању њихових међусобних односа (Furner, Marinas, 2011; Scandrett, 2008; Sibiya, 2020), упознавању и израчунавању обима и површине фигура (Freire et al., 2018), у усвајању алгебарских садржаја (Abonyi, Eze, 2006; Scandrett, 2008), као и подстицању активног учења геометријских садржаја и мотивације ученика (Rahmiati, 2016; Sani, Salahudeen, 2016). "Посебну вредност наведених инструкционих материјала истраживачи, пре свега, посматрају кроз њихову подстицајну улогу која се односи на активности ученика у процесу учења геометријских садржаја, јер ова средства обезбеђују извођење конкретних операција на њима, манипулацију, што доприноси дубљем разумевању, у односу на примену образаца и формула" (Маричић, Стојкановић, 2021: 114).

На пример до обрасца за израчунавање површине правоугаоника долази се коришћењем идеје поплочавања подударним квадратима. Квадратна мрежа је помоћ при поплочавању и уопште израчунавању као и поређењу површина различитих фигура, јер до тражених вредности долазимо пребројавањем квадрата у мрежи које је фигура прекрила. Квадрати у оквиру квадратне мреже користе се и за дефинисање квадратних јединица мере. Свеске које ученици користе на часовима математике садрже квадратну мрежу тако да и њена доступност оправдава њену употребу. У истраживању које анализира примену квадратне мреже при решавању задатака из геометрије (Маричић, Стојкановић, 2021) примећено је да ученици четвртог разреда прибегавају коришћењу квадратне мреже и визуелизације уопште само ако се то од њих тражи у задатку. Многи нису оспособљени да визуелизују проблем везан за површину фигуре јер нису концептуално формирали појам површине, већ само меморисали формуле. На пример, проблем поплочавања стазе око базена облика правоугаоника који се наводи у поменутом истраживању: "Око базена облика правоугаоника страница дужине 10 и 12 квадратића налази се бетонска стаза ширине једног квадратића. Колико је квадратића прекрила стаза?" (Маричић, Стојкановић, 2021: 118) има исти захтев као задатак под називом "Шивење столњака": "Дара и Стева шију столњак за сто чије су димензије 14 dm и 8 dm. Столњак прелази преко ивица стола по 1 dm. Израчунај површину столњака који деца са слике шију." (Ђокић, 2013: 250) и велики број ученика неуспешно решава овакве проблеме управо зато што не користе визуелну репрезентацију као помоћ. Када се проблем представи у квадратној мрежи може се уочити чак и више могућности доласка до решења што је приказано на слици 14.



Слика 14. *Различити начини одређивања површине стазе око базена коришћењем квадратне мреже*

Ово је само један пример којим се потврђује значај квадратне мреже за разумевање појма површине фигура и олакшавање решавања проблема са мерењем површине. Ученици се морају подстицати да представљају проблем сликом и замишљају геометријске објекте (Ђокић, 2013). Због тога би учитељи требали више да користе квадратну мрежу у процесу учења и моделовања при решавању задатака. Када у другом разреду ученици савладају цртање квадрата и правоугаоника у квадратној мрежи створени су сви услови за њену примену у решавању задатака. Веома је важно оспособити ученике да цртају слику уз задатак на квадратној мрежи која им је већ дата у свескама у које пишу. Треба инсистирати да сами нацртају слику у задацима, а не давати им готове илустрације. То потврђује наведени задатак, јер су га тачно урадили само ученици који су умели проблем да представе одговарајућим цртежом. Успешна визуелизација их је довела до решења. Чим на редовним часовима математике у другом разреду науче представљање квадрата и правоугаоника у квадратној мрежи и будемо инсистирали на цртежу уз сваки задатак из геометрије са поменутим фигурама, ученици ће бити припремљени да усвоје нова знања из геометрије у старијим разредима основне школе.

Коришћење визуелних модела треба уводити од најмлађег школског узраста, али је потребно целокупан процес прилагодити узрасним могућностима и способностима ученика. То би омогућило ученицима да у наредним нивоима школовања лакше и сигурније приступају решавању постављених проблема јер ће моћи да се ослоне на претходна искуства (Живановић, 2019). Пошто се квадратна мрежа појављује у настави у сваком од прва четири разреда основне школе потребно је подстицати ученике да је користе и упознати их са њеним могућностима не само у геометрији, већ и у алгебри. Учитељи би требало да оспособе ученике да знања стичу користећи квадратну мрежу у

процесу представљања и формирања појмова као и упознавања са њиховим особинама. Квадратна мрежа представља користан алат доступан свим ученицима, обезбеђује визуелизацију и очигледност што води ка добром разумевању и учењу у оквиру наставе геометрије (Маричић, Стојкановић, 2021). Треба се потрудити визуализовати и алгебарске садржаје користећи геометријске фигуре и квадратну мрежу.

3. МЕТОДИЧКИ ОКВИР ПРИМЕНЕ КОГНИТИВНО–ВИЗУЕЛНОГ ПРИСТУПА У СТИЦАЊУ КОМПЕТЕНЦИЈА УЧЕНИКА ЗА РЕШАВАЊЕ МАТЕМАТИЧКИХ ПРОБЛЕМА

Како помоћи ученицима да стекну потребне компетенције за успешно решавање проблема је питање којим су се бавили многи истраживачи. У овом раду понудићемо методички приступ развијању компетенција ученика за решавање математичких проблема заснован на когнитивно-визуелном приступу настави и учењу.

Да бисмо решили било који математички проблем морамо прво посветити пажњу самој формулацији проблема. Проблемски задаци су често задати текстуално. За решавање текстуалних проблемских задатака многи ученици користе "скраћени" поступак, односно текст проблема одмах преводе на математички модел тако што изаберу аритметичку операцију на основу брзе и површне анализе задатка (фокусирају се на кључне речи у тексту). Тако одабрана аритметичка операција доводи до вредности израза која се сматра решењем проблема, обично се не врши провера, не враћа се назад у текст проблема да би се утврдило може ли одговор бити прихватљив имајући у виду дату проблемску ситуацију (Зељић и сар., 2023). Анализа задатка треба да нам помогне да уочимо познате и непознате варијабле и њихове релационе односе. Издвајање варијабли и њихових међусобних релација помоћи ће ученику да визуелизује проблем. Наша идеја је да инсистирамо на визуелизацији када примењујемо когнитивно-визуелни приступ.

Чињеница је да у раду и учењу математике ученици ретко самоиницијативно користе визуелизацију у процесу решавања проблема. Ми полазимо од става да визуализација представља потпору (скелу како каже Виготски) у процесу учења. Према истраживањима психолога познато је да до 80% информација особа прима визуелним каналом. Психолози и физиолози су доказали да је лева хемисфера специјализована за вербално-симболичке функције, а десна хемисфера за просторно-синтетичке. У раду наставника математике акценат се ставља на употребу формално-логичких средстава, на оперисање системима знакова без неопходног ослањања на фигуративне компоненте. Дакле, настаје проблем како наставу математике учинити таквом да се заснива на уједначеном раду и леве и десне хемисфере мозга, односно на уравнотеженој комбинацији логичког и визуелно-фигуративног мишљења. Делингер решење проналази у "визуелном мишљењу" које одређује као размишљање кроз визуелне операције, активност која обезбеђује стварање слика, њихово деловање, њихово прекодирање у датом или произвољном правцу (Далингер, 2006). Он предлаже да се процес наставе математике изгради на основу когнитивно-визуелног приступа формирању знања, вештина и способности, који омогућава да се максимално искористи потенцијал визуелног мишљења. Једна од централних одредби овог приступа је широка и сврсисходна употреба когнитивне функције видљивости. Примена когнитивно-визуелног приступа у процесу наставе математике омогућава конструисање визуелног окружења за учење. Ови услови претпостављају присуство и традиционалних визуелних помагала, посебних средстава и

техника, које активирају рад органа вида. Једна од предности когнитивно-визуелног приступа је што води рачуна о индивидуалним карактеристикама ученика, посебно особености рада леве и десне хемисфере мозга. Основа принципа визуелизације је когнитивна графика, чија је сврха стварање комбинованих когнитивних модела представљања знања који комбинују геометријски и симболички начин мишљења и доприносе активирању когнитивних процеса (Далингер, 2006).

Питање је како увести у наставу и како применити когнитивно-визуелни приступ, односно како олакшати ученицима прелазак са једне на другу репрезентацију? Когнитивни психолози Голдстоун и Сон осмислили су метод који су назвали "конкретност бледи" и на тај начин покушали решити проблем преласка од конкретних ка апстрактним репрезентацијама. Овај метод је пореклом из Брунерове теорије, "представља процес сукцесивног смањивања конкретности како би се достигла релативно идеализована и деконтекстуализована репрезентација која је и даље повезана са ситуацијом чији модел представља" (Goldstone, Son, 2005: 70). Конкретне репрезентације овим поступком постају идеализоване што даје могућност интерпретације принципима који су оригинално утемељени јер се мање везују за специфичан контекст па су погодни за трансфер. Пошто конкретни материјали могу пружити корисне и занимљиве перцептивне везе за апстрактне концепте врло је важно пронаћи одговарајуће наставне методе које би те перцептивне везе које пружају конкретни материјали за прелаз ка апстрактном комбиновале. Апстрактне репрезентације имају већи значај у односу на конкретне при процесу решавања и разумевања математичких проблема (Kaminski et al., 2008). Избор одговарајуће репрезентације може нас довести до решења проблема, она треба да нам обезбеди увиђање односа и веза између математичких појмова. Ефикасније је постићи апстрактно разумевање појмова кроз искуство са перцептивно богатим конкретним материјалима. Ако овим процесом постепено ослобађамо конкретно до апстрактног, олакшаћемо ученицима успостављање везе између различитих представа чиме ће се побољшати разумевање појма, као и трансфер знања. Значи апстрактност ће се ефикасније научити ако користимо слике, филмове, интерактивне симулације и реалистичка физичка искуства (Goldstone, Son, 2005). Истражујући које репрезентације подржавају прелаз са конкретних на апстрактне представе Динг и Ли дошли су до закључка да се у уџбеницима у Кини углавном креће од текстуалног записа проблема са сликом, схематским приказом и облачићима са објашњењем, а после тога долази аритметички (процедурални) и алгебарски запис (Ding, Li, 2014). Дакле јасни текстуални задаци без сувишних услова су добар почетак за транзициони процес и могу помоћи ученицима при усвајању апстрактних математичких идеја. Ако добро осмишљени задаци омогуће креирање графичких представа и апстрактних репрезентација они постају циљ процеса, а ученици ће увидети смисао и везу различитих репрезентација.

Резултати неколико истраживања (Barmby et al., 2009; Pantziara et al., 2009; Cox, Brna, 1995;) емпиријски илуструју феномен који Занг и Норман (Zhang, Norman, 1994) називају *репрезентативни ефекат* у коме "различити изоморфни прикази заједничке формалне структуре могу проузроковати веома различита когнитивна понашања" (Zhang, Norman, 1994: 88). Ослањајући се на своју студију са 194 ученика 6. разреда, Панцара и

сарадници уочили су да у решавању проблема дијаграмима ученици треба да тумаче и комуницирају са представљеним дијаграмима, док су без датих дијаграма ученици морали да траже стратегију решења, попут конструисања сопственог дијаграма (Pantziara et al., 2009). Захнер и Кортер истичу да дијаграми имају олакшавајући ефекат за поједине ученике, посебно у ситуацијама када су ученици суочени са сложеним или нерегуларним проблемима (Zahner, Corter,2010). Свакако, "олакшавајући ефекат" могао би се научити обзиром да Панцара и сардници, на пример, наглашавају кључну улогу ефикасних наставних стратегија у помагању ученицима да ефикасно користе дијаграме (Pantziara et al., 2009).

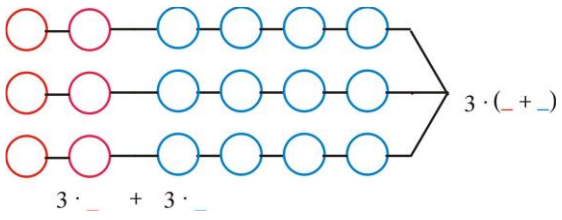
Резултати истраживања (Пермякова, 2015; Князева, 2003б; Резник, 1997; Сатьянов, 1984; Tall, 1986) у којима су аутори дали оригиналне и емпиријски евалуиране когнитивно-визуелне моделе наставе и учења показују да визуелизација позитивно утиче на формирање знања, вештина и навика ученика. Њихов став је да визуелни приступ учењу не може и не би требао потпуно заменити традиционалне методе рада, већ да визуелизацију треба прилагодити, у зависности од садржаја који се изучавају, потребама, могућностима и интересовањима ученика. Треба успоставити оптималан однос између визуелних и симболичких репрезентација као и визуелно-креативног и логичко-аналитичког мишљења.

Зељић (Зељић, 2021: 72-73) је анализирала употребу различитих репрезентација на примеру правила множења збира бројем:

1) Прва је текстуални задатак којим евоцирамо искуства и представе из реалног окружења: "У три леје посађено је по два црвена и четири плава цвета. Колико је укупно цветова посађено?"
2) Друга је сликовно представљање пиктограмом:



3) Трећа је сликовно представљање са мање шума идеограмом:



4) Четврта је симболичко представљање бројевним изразом: $3 \cdot (2 + 4) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 6 + 12 = 18$

5) Пета је реторичко изражавање математичким језиком: “Збир можемо помножити бројем тако што помножимо први сабирак, а затим други сабирак, па добијене производе саберемо.”
6) Шеста је симболичко представљање алгебарским симболима (виши степен општости): $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Зељић, 2021: 72-73).

Ауторка истиче да је важна когнитивна активност ученика као и њено праћење од стране наставника и да не постоји правило, ни универзално нити опште, о редоследу и броју коришћених репрезентација. Значајна, могућа и потребна је активност претварања једног репрезентативног система у други у различитим смеровима апстракције. Ако ученика излажемо вишеструким репрезентацијама једног појма вероватније је да ће схватити његово значење у различитим ситуацијама.

Без визуелних слика знање ученика постаје бесмислено, а то води ка формализму тако да тамо где је могуће дати визуелну интерпретацију једном или другом математичком објекту, то треба и учинити. Проблем имплементације принципа видљивости у настави математике може добити принципијелно ново решење ако је могуће пронаћи такав методолошки ослонац за активност ученика који ће му омогућити визуелно мишљење како би се постигао продуктиван резултат у настави математике (Далингер, 2006), а на том методолошком ослонцу управо инсистира когнитивно-визуелни приступ настави и учењу.

3.1. Развој компетенција ученика за решавање математичких проблема уз когнитивно-визуелни приступ

Када се помене цртеж, односно визуелни приказ при решавању математичких задатака обично се помисли на проблеме из геометрије. Визуелизација би требало да се у геометрији подразумева, зато ћемо ми у нашем истраживању когнитивно-визуелни приступ примењивати при решавању аритметичких и алгебарских проблемских задатака.

Приступ који ученици често користе при решавању проблема назива се “директни превод”, ученик при решавању проблема издвоји вредности бројева у задатку и кључну реч релације (као што је више – мање) и прави план решавања који представља неку врсту “комбиновања” бројева из задатка уз коришћење аритметичких операција које су одређене кључним речима. Ученик користи наведени приступ покушавајући директан превод кључних појмова у тексту проблема у рачунске операције којим ће добити решење проблема. У таквим случајевима ученик не конструише одговарајућу репрезентацију задате ситуације описане у проблему (Зељић и сар., 2023). Кад ученици решавају математички проблем требало би да алтернативно испитују две или више идеја, посматрајући њихову повезаност, анализирају их и користе њихове међусобне односе како би решили дати проблем (Стевановић и сар., 2014). Овакав приступ решавању проблема је врло значајан у математици јер многе математичке идеје обухватају односе између различитих репрезентација бројева, као и операција и релација између њих. Треба добро разумети аритметику и савладати вештине рачунања, како би уз помоћ ране алгебре припремили ученике за апстрактне алгебарске садржаје. Да би се оспособили за алгебарски начин размишљања ученицима треба омогућити решавање математичких

проблема у којима једначине и неједначине представљају објекте који се анализирају. Акценат се ставља на уочавање релацијских веза које представљају однос између датих величина, а не на проналажење резултата математичких операција. При том треба користити основне особине бројева и операција како би трансформисали математичке записе. У контексту аритметике то представља способност ученика да препознају различите односе међу бројевима, релације и операције са њима (Molina et al., 2005). Овакав начин размишљања пружа другачију перспективу при погледу на аритметику и представља кључну улогу у учењу (Koehler, 2004; Kiziltoprak, Köse, 2017) и стицању компетенција ученика за решавање проблема.

Размишљање о нумеричким односима израза који су повезани знаком једнакости је релацијско размишљање, тада проверавамо како су операције повезане једна са другом. Да би размишљали на овај начин ученици морају посматрати једначине као објекте за анализирање, а не као процесе које треба обавити (Molina et al., 2005). Ако се на пример треба фокусирати на сабирање и одузимање при решавању задатка требало би обратити пажњу на особине као што су:

- Комплементарност операција сабирања и одузимања (инверзне операције);
- Комутативност сабирања;
- Збир два броја се неће променити ако исти број додамо једном, а одузмемо другом сабирку (сталност збира);
- Разлика се не мења ако исти број додамо или одузмемо од оба њена члана (сталност разлике);
- Неутрални члан за операцију сабирања је нула;
- Нула се добија када од броја одузмемо исти тај број;
- Асоцијативност сабирања;
- Сваки број можемо приказати као збир два броја и то на више начина (Crvenković, Romano, 2014).

Да би се код ученика млађих разреда основне школе развило алгебарског мишљења неопходно је подстицање одређених начина мишљења која укључују анализирање односа између квантитета, решавање проблема, моделовање, уочавање структуре, генерализацију, а затим и симболичко изражавање. Зељић истиче да је прихватање и коришћење алгебарске симболике за представљање општости изузетно важна активност која утиче на развој алгебарског мишљења, као и да у оквиру садржаја аритметике и других наставних тема постоји широк спектар могућности за развој овог облика мишљења, али такође тврди да се не може рећи да тек коришћење алгебарско-симболичке нотације за изражавање математичких идеја укључује неки облик алгебарског мишљења (Зељић, 2014). За изграђивање значења алгебарских симбола и процедура значајан је поступак визуелног представљања квантитативних односа. Ту активност, као и коришћење различитих репрезентација за представљање задатих проблемских ситуација, многи аутори истичу као значајну компоненту алгебарског мишљења (Зељић, 2014). Један од могућих начина да се алгебра учини разумљивом и доступном свим ученицима је поступак увођења ученика у алгебарске концепте и размишљања који је прилагођен узрасту (Markworth, 2010). На пример, у почетним разредима основне школе обично користимо илустрације којим

представљамо део симулиране стварности како бисмо представили информације, а затим те исте информације представљамо парадигматским сликама, јер је иконичко представљање изузетно важно и мора претходити симболичком представљању. Како наводи Липковски постоје записи старих Грка који потврђују чињеницу да алгебра почива на основама аритметике и геометрије јер су они користили геометријске моделе како би решавали аритметичке и алгебарске проблеме (Липковски, 2007). Зељић такође инсистира на коришћењу визуелизације тврдећи да она може бити од помоћи при истраживању математичких проблема и давању значења математичким појмовима и њиховим међусобним односима (Зељић, 2014).

Суштина наставе алгебре за ученике млађег школског узраста огледа се у повезивању аритметичких са алгебарским садржајима, при чему се у процесу учења заступа смер од конкретног ка апстрактном. "Тај пут је пут од аритметике ка алгебри, односно пут од апстракције ка уопштавању односно, генерализацији" (Маричић, Милинковић, 2017: 121).

3.2. Моделовање као дидактичка основа за креирање визуелних репрезентација у настави аритметике и алгебре

Кад погледамо савремену наставу и школски програм математике превише је детаља из различитих области математике, зато постоји оправдана забринутост да ће се учење математике свести на памћење чињеница и механичко коришћење алгоритама. Да не би дошло до ове појаве треба настојати да ученици схвате и разумеју постојеће везе међу појмовима и појавама са којима се сусрећу у свим наставним областима математике. При томе нам, у великом броју случајева, може помоћи геометрија, и то различити визуелни модели чије представљање може олакшати коришћење квадратне мреже, јер математичке теме које се обрађују у школи обилују појмовима који се могу представити геометријским илустрацијама прилагођеним узрасту ученика.

Реални свет је испуњен математичким моделима, а сам процес моделовања пружа могућност ученицима да тај свет боље упознају и развију позитиван став према настави математике (Живановић, 2019). Геометријске фигуре могу се користити у процесу формирања појма броја и појма операција са бројевима, као и обрнуто, бројеви се могу користити за израчунавање различитих својстава геометријских фигура. Навешћемо још неколико примера у којима се може користити геометријска фигура и квадратна мрежа као помоћни модел у ком се та фигура може представити: појам разломка може се представити помоћу подељене дужи (правоугаоника) на једнаке делове, дистрибутивност множења према сабирању може се представити илустрацијом израчунавања обима правоугаоника (или израчунавања површине правоугаоника подељеног на два мања правоугаоника), комутативност множења може се представити правоугаоником који је издељен на једнаке квадрате, задаци о кретању могу се илустровати дужима итд. Наставник организацијом рада (одабиром наставних метода, дидактичког материјала, примера, задатака, ...) може осигурати ток когнитивних процеса помоћу којих се код ученика обликује знање. Решавање проблема разумевања наставног материјала код млађих ученика треба посматрати као приоритетан задатак, а визуелизација је ефикасно средство за решавање

овог проблема. Визуелизација се обично примењује ad hoc, несистематично, спорадично и није увек усмерена на решавање проблема разумевања математичког градива. Како тврде Урбан и сарадници решење проблема разумевања у стварној пракси основног образовања обично се замењује проблемом мотивисања ученика и формирања интересовања за предмет уз помоћ емотивне визуелизације (Urban et al., 2017). Брунер тврди да способност стварања "типичних" слика и уочавање сличности међу предметима и појавама помаже детету да функционише у свету независно од достизања оперативног нивоа мишљења, ако се осврнемо на Пијажеову карактеризацију детета у преоперативној фази развоја (Ћебић, 2006).

Појам *модел* у математици подразумева један или више образаца, узорака, шаблона који се користе за решавање математичких задатака. Математичко моделовање представља мисаоно-теоријску активност којом се граде логички и математички системи, као и различити реални модели (Marković, 2011; Petrović i sar., 2004). Модел је средство које служи за повезивање стварног и апстрактног света математике, он представља систем елемената, операција, релација и правила које користимо за објашњавање, описивање или предвиђање понашања проблема који проучавамо (Doerr, English, 2003). Како наводи Милинковић модели могу помоћи ученицима при решавању проблема на сваком нивоу апстракције (Милинковић, 2016). Они помажу у комуникацији између неформалног и формалног математичког система (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000). Математичке формуле и симболи којима изражавамо односе и везе између посматраних објеката могу представљати модел (Милинковић, 2014), али моделом се сматра и систем концептуалних елемената који користимо при конструисању, тумачењу и описивању математичких ситуација (Richardson, 2004). Иако се може користити у различитим моделима, квадратна мрежа и сама може представљати математички модел јер је по Тервелу и његовим сарадницима модел "структурални облик репрезентације при чему је репрезентација шири и свеобухватнији појам из когнитивне психологије, а модел појам који се користи у математичком образовању" (Terwel et al., 2009: 27). Постоје и аутори попут Новика и Басока за које модел представља репрезентацију задатка коју формирамо како би сумирали и разумели суштину посматраног проблема (Novick, Bassok, 2005), а те репрезентације могу бити представљене у квадратној мрежи и користити њене особине.

Когнитивно-визуелни приступ подразумева креирање визуелних представа математичких појмова уз коришћење образовног моделирања које би требали примењивати и у наставним материјалима за основну школу. Да би се применио овај приступ треба одабрати и осмислити моделе који ће бити дидактичка основа за креирање визуелних репрезентација математичких појмова који се изучавају. При одабиру визуелних модела треба утврдити њихову улогу и место у различитим фазама учења и решавања проблема. На тај начин треба развити код ученика способност за конструисање и примену визуелних модела при решавању математичких задатака. Прво треба разјаснити суштину визуелизације појмова у математичком образовању и поткрепити оправданост употребе образовног моделирања као дидактичке основе за креирање визуелних представа појмова који се изучавају у основној школи. Да би успешно развили способности математичког моделовања треба знати и циљеве који га детерминишу. Кајзер представља четири групе циљева математичког моделовања:

1. Педагошки циљеви – подразумевају развој способности ученика да успешније, боље и реалније сагледају основне карактеристике света око њих;

2. Психолошки циљеви – подразумевају подршку и унапређење мотивисаности ученика као и развијање позитивних ставова ученика према настави математике;
3. Предметни циљеви – подразумевају структурирање процеса учења, усвајање нових математичких метода и процедура, формирање одговарајућих стратегија и презентовање усвојених алгоритама у графичком и илустративном облику;
4. Научни циљеви – подразумевају преношење реалистичких представљања у свет математике и повезаност проблемима из других области са математичким проблемима (Kaiser, 1995).

Уочавамо да математичко моделовање има вишедимензионални значај у настави математике. Поред доприноса развоју математичких знања и вештина, математичко моделовање подстиче мотивацију ученика, развија њихову способност разумевања и тумачења реалних појава и омогућава повезивање математике са другим областима знања.

Анализирајући литературу о визуелизацији у настави математике Урбан и сарадници су закључили да шематске слике позитивно утичу на формирање појмова док реалне слике често одвлаче пажњу од суштинских аспеката изучаваног градива. Слике богате реалистичким детаљима не пружају математичке начине за анализу објекта и не откривају његове аспекте (Urban et al., 2017). Зато треба инсистирати на коришћењу шематских слика односно модела за учење (енг. study models) концепата јер садрже методе деловања које дете лакше преноси у друге ситуације. Према принципу приоритета визуелних образовних модула у фази упознавања са новим образовним математичким материјалом, визуелни модели учења у процесу учења нове теме морају претходити вербалним и симболичким моделима. Дакле, визуелни модели представљају објектне моделе изграђене уз помоћ стварних објеката или њихових слика, као и шематске моделе засноване на идеји замене стварних објеката геометријским облицима. Шематски модели су представљени у два типа: шематским илустрацијама и шематским цртежима.



Слика 15. *Пример шематске илустрације (лево) и шематског цртежа (десно) (Urban et al., 2017: 76.)*

Вербални модели представљају суштинска обележја предмета који се проучава на природном језику. Примери вербалних модела су текст задатка и његов запис у табеларном или нетабеларном облику. Симболички модели представљају предмет који се проучава језиком математичких симбола. То су математички изрази, једнакости, неједнакост и једначине – сви записи на формалном математичком језику. Приоритет модела визуелног учења у фази упознавања са новим материјалом значи да задаци за обраду математичких садржаја у овој фази захтевају когнитивни "пут" од визуелног модела (објектног или шематског) преко вербалног модела до симболичког модела. Избор визуелних модела детерминисан је, прво, водећим типом мишљења деце из одабране

старосне групе (визуелно-активно и визуелно-сликовно мишљење), а друго, посебном улогом визуелних компоненти у механизму продуктивног мишљења, чији развој захтева активну стимулацију од првих година школског образовања. Предност моделирања је у томе што обезбеђује активност субјекта. Модел се може сматрати визуелизацојом математичког концепта само за субјекта који је у стању да га адекватно перципира, односно да правилно асоцира слику са формалним и вербалним приказима концепта (Urban et al., 2017).

Ако одаберемо одговарајуће примере моделовања можемо допринети бољем разумевању и дужем очувању математичких садржаја, побољшати мотивацију и пажњу ученика према математици. За скоро сваку област математике и математичку тему постоји више примера различитих врста моделовања и сви су доступни наставницима (Marković, 2011). Поступак моделовања помаже ученицима да разумеју одређене теорије и законитости које важе у математици и усвоје нова и трајна знања применљива у новим ситуацијама и околностима. Само стратегијама и алгоритмима који су добро формирани и конструисани могу се решавати сложени проблеми, а да би то успели користимо математичко моделовање (Живановић, 2019). Осмишљавање модела је процес који представља саставни део науке и технологије, а ти осмишљени модели треба да реалне ситуације трансформишу у форму апстрактног језика попут језика математике. Велики број истраживања (Watters et al., 2000; Niss et al., 2007; Zlokapa, 2012; Stjepanović, 2012) истиче позитивне стране математичког моделовања у почетној настави математике. Аутори истичу стицање знања и развијање компетентности ученика да за сваки проблем одаберу одговарајући модел помоћу ког ће доћи до решења. У експерименту који су у периоду од 2012. до 2013. године реализовали Урбан и сарадници учествовали су ученици четвртог разреда и имали су задатак да реше нестандардне задатке. Речено им је да у случају потешкоћа забележе своје прорачуне и цртеже на посебним листовима папира. Од 89 ученика, само 9 (10%) је конструисало шематски модел задатка, 20 ученика (22%) је цртало објекте, а остали ученици нису покушавали да пронађу решење осим понављаног читања услова наглас или за себе. По мишљењу организатора експеримента, то није узроковано неспособношћу млађих ученика да конструишу визуелне моделе, већ зато што они нису посебно научени да то раде. Циљано формирање способности управљања визуелним моделом, према мишљењу Урбана и сарадника, захтева поштовање следећих фаза обуке:

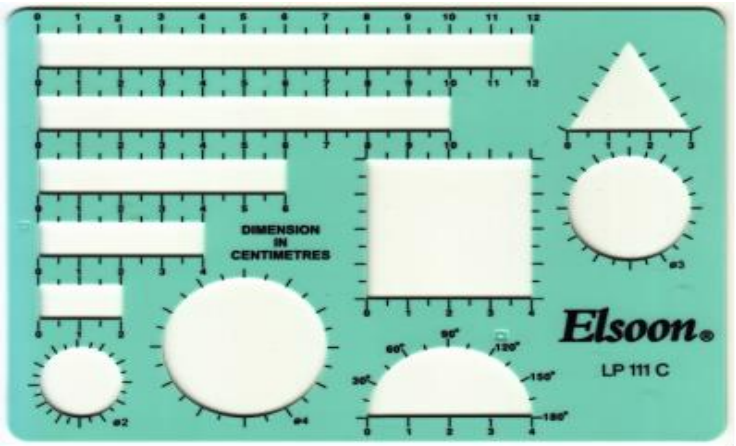
- научити повезати моделе учења (ученик би требало да утврди да ли понуђени модели за поређење одговарају један другом и објасни зашто одговарају или не одговарају);
- учити изабрати визуелни модел (ученик треба да одабере од више визуелних модела онај који одговара понуђеном вербалном или симболичком моделу);
- научити допунити визуелни модел (ученик би требало да унесе неопходне податке у понуђени визуелни модел тако да он буде у складу са вербалним и симболичким моделом);
- учити конструисати визуелни модел (ученик треба да развије способности да конструише сопствени визуелни модел који одговара вербалном или симболичком моделу);

- учити трансформисати визуелни модел (ученик треба да измени понуђени или сопствени конструисани визуелни модел како би пронашао нове начине решавања задатка) (Urban et al., 2017: 81).

Цео наставни процес би требао бити усмерен ка оспособљавању ученика да мисли самостално, проверава чињенице, трага за различитим решењима, изводи закључке и примењује стечена знања у практичним ситуацијама (Крстић, 2005). Требало би користити што више репрезентација истог математичког проблема и међу њима наравно визуелну како би ученике оспособили да самостално мисле, проверавају чињенице, траже различита решења, изводе закључке и примењују стечена знања уочавајући везе и прелазе из једне у другу репрезентацију.

Потребно је код ученика развити способност математичког моделовања кад год се за то створе услови јер на тај начин упознају различите репрезентације које су драгоцене при осмишљавању стратегија које воде ка решењу проблема. Визуелизација модела подразумева визуелно представљање градива уз помоћ модела који обухватају суштинске аспекте математичких појмова који се проучавају (Urban et al., 2017). Деци млађег школског узраста визуелизација се може олакшати повезивањем тачака у квадратној мрежи јер се на тај начин могу визуализовати различити геометријски појмови, а такође и формирати појмови. Квадратну мрежу можемо посматрати као потпору у учењу, односно, по Виготском, један облик "scaffold" алата за учење. Уз њену помоћ проблем се представља визуелном репрезентацијом и лакше повезује са познатим појмовима (Маричић, Стојкановић, 2021).

Поменути *модел правоугаоника* који се користи у школама у Сингапуру, а који укључује цртање правоугаоника одговарајуће величине за представљање информација из текстуалних задатака, врло је сличан моделу дужи који се користи у нашим основним школама. Као помоћ при цртању тих правоугаоника, односно дужи, треба користити квадратну мрежу, а постоји и лењир за то (Слика 16).



Слика 16. *Лењир за цртање Модела правоугаоника (Kaur, 2019)*

Модел правоугаоника се може користити као помоћ у решавању аритметичких и алгебарских текстуалних задатака који укључују природне бројеве, разломке, односе и проценте.

Још један занимљив и користан модел за помоћ при упознавању ученика са појмом једнакости, једначинама и неједначинама у скупу природних бројева је *модел ваге.* Иако ови модели представљају моћан алат за визуелно представљање и решавање сложених текстуалних проблема, они служе да објасне и ојачају концепте као што су сабирање и одузимање, множење и дељење, разломци, децимални бројеви, проценти и односи. Ако не би био повезан са концептима уграђеним у лекције, модел не би био смислен (Hoven, Garelick, 2007). У аритметичким текстуалним задацима правоугаоници представљају одређене бројеве, а ако их употребимо за представљање непознатих величина можемо приказати и алгебарске текстуалне задатке, јер такве репрезентације служе као сликовне једначине, док вагом директно можемо представити једнакост, једначину или неједначину. Решавање аритметичких и алгебарских текстуалних задатака је кључна компонента на сваком нивоу наставног плана и програма математике, али је, такође, и једна од најпроблематичнијих тема. Бројне студије су показале да употреба визуелних и конкретних представа побољшава перформансе у решавању текстуалних проблемских задатака (Ng, Lee, 2009). У Сингапуру користе модел правоугаоника од првог разреда да би већ у трећем разреду основне школе решавали и текстуалне задатке из алгебре у скупу природних бројева. Ова метода даје могућност да се заобиђе потреба конструисања и решавања линеарних алгебарских једначина. Иако правоугаоници представљају непознате вредности у овом моделу решење је и даље засновано на дечијем знању аритметике (Ng, Lee, 2009). Модел ваге за решавање једначина и неједначина користи особине ваге и њен равнотежни положај, као и знање аритметике. У извештајима TIMSS истраживања 1995., 1999., и 2003. године Сингапур је био на првом месту, а на PISA тестирању 2009. и 2012. године заузео је друго место у постигнућима ученика остваренim у настави математике. Тајна успеха сингапурских ученика је управо у систему рада, јер ученици од најранијег узраста обрађују текстуалне математичке задатке тако што уочавају и решавају њихове проблеме. Значи предност је у коришћењу хеуристичког приступа при решавању проблема (Живановић, 2019).

Узимајући у обзир све наведено одлучили смо се да у раду са ученицима тестирамо примену моделовања и то дечији цртеж, модел ваге и модел правоугаоника.

3.2.1. Дечији цртеж као визуелна репрезентација математичких садржаја

Дечији цртежи су најраније дечије, математичке, репрезентације и играју централну улогу у неговању математичког закључивања код деце (Kleven, 2022). Они омогућавају да нам унутрашње слике и расуђивања деце постану доступни. Разлика између цртања за забаву и цртања са сврхом је велика, а прелазак са цртања ван школе на цртање у школском контексту је одговорност наставника (Woleck, 2001). У основном образовању се и илустрације често користе за објашњење математичког закључивања. Међутим, не

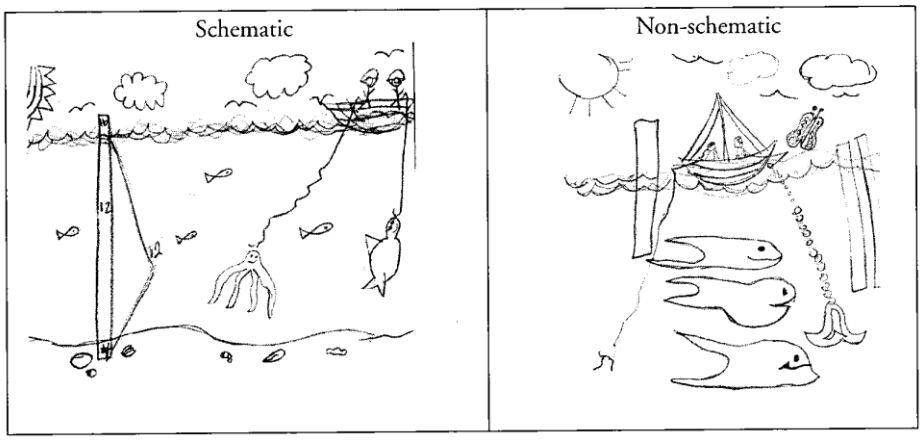
олакшава сваки визуелни приказ разумевање математичких идеја. Због тога је потрага за ефикасним облицима визуелног представљања појмова актуелно питање дидактике.

Проблем визуелизације у методици наставе математике обично се везује за примарни степен математичког образовања, због специфичности менталне активности деце ове старосне групе. Међутим, многи психолози и математичари, визуелизацију сматрају важним менталним процесом не само за размишљање детета, већ и за математички стил размишљања одрасле особе (Urban et al., 2017). Дидактичка основа за креирање визуелних представа математичких појмова у основној школи је образовно моделирање које омогућава да се у слици ухвати низ значајних, а често неочигледних аспеката појмова који се изучавају. Ово је кључни фактор који утиче на концептуално разумевање математичке теорије од стране млађих ученика.

Текстуални проблемски задаци су реални, практични задаци у којима је корелација између познатих и непознатих величина текстуално описана, а да би их решили потребна нам је нека врста модела. Они играју важну улогу у развоју разумевања и зато морамо ставити акценат на њихово правилно тумачење, разумевање, кораке у решавању, могуће репрезентације и тумачење резултата (Kozhevnikov et al., 2002). Иако прављењем цртежа ученици могу да избегну и превазиђу потешкоће при решавању проблема из реалног света, многи ученици не праве цртеже спонтано. У истраживању које су спровели Реленсман и сарадници 132 ученика деветог и десетог разреда су подељени у експерименталну групу "са ситуационим или математичким упутствима за цртање" и у контролну групу "без инструкција за цртање". Анализе добијених резултата су показале да су математичка упутства за цртање имала позитиван укупни ефекат на перформансе, а ефекат се преносио коришћењем цртежа. Ипак, значајан број ученика не прави цртеж чак ни кад им је то изричито наложено, а разлог би могао бити недостатак стратешког знања о цртежу који сами генеришу и то их спречава да конструишу цртеж (Rellensmann et al., 2022). Емпиријски докази показују да корист од цртања зависи од типа цртежа који је створио ученик. То се посебно односи на ниво апстракције цртежа. Ситуациони цртеж који сликовито приказује површинску структуру проблема има низак ниво апстракције, док математички цртеж који се фокусира на математичку структуру проблема има висок ниво апстракције. Ситуационим цртежом, дакле, називамо екстернализовани приказ модела ситуације који сликовито приказује објекте описане у проблемској ситуацији према њиховом визуелном изгледу и као такав има низак ниво апстракције. Насупрот томе, математички цртеж је апстрактан цртеж јер пружа екстернализовану представу математичког модела. Математички цртеж приказује само објекте релевантне за решење проблемске ситуације, а они су сведени на њихове релевантне математичке карактеристике. Различите предности се приписују цртању које генеришу ученици. Прво, цртање подржава организацију датих информација задатка. Када ученици генеришу цртеж за дати проблем, они морају да разумеју који су објекти укључени у задатак и како су ти објекти повезани једни са другима. Друго, ученици морају да смање количину датих информација фокусирајући се на релевантне делове информација које треба да буду представљене на цртежу. Процес одабира и организовања информација промовише дубоку обраду информација и на тај начин треба да побољша разумевање задатка од стране ученика. Поред тога, цртеж може помоћи ученицима да извуку закључке који су од суштинског значаја за решавање проблема. Информације које су имплицитне у опису проблема постају очигледне на цртежу и могу се прочитати без додатне обраде, тако да

цртеж може помоћи ученицима да боље "виде" математичке концепте и идеје (Rellensmann et al., 2017).

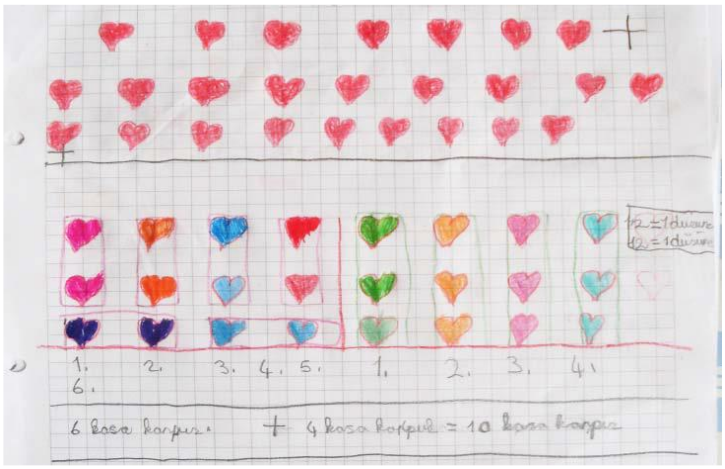
Осим категоризације на ситуационе и математичке, цртежи који се користе за решавање текстуалних задатака могу се категоризовати као шематски и сликовни. Као што је већ речено цртежи богати реалистичним детаљима не пружају математичке начине за анализу објекта и не откривају његове суштинске аспекте. Шематски цртежи садрже методе деловања које дете лакше преноси у друге ситуације (Urban et al., 2017). Цртеж се сматра шематским ако садржи приказане просторне односе и пропорције између објеката. Шематски цртеж може укључивати детаље, али они приказују део проблема док су код нешематског цртежа приказани детаљи сувишни за решавање математичког проблема. На пример, од ученика је тражено да нацртају слику која би им помогла да одреде дубину језера у коме се стуб дужине 12 стопа пружао пола стопе изнад површине воде и био укопан пола стопе у дно језера, на слици 17. видимо како су ученици нацртали цртеж који би им помогао да реше тај проблем.



Слика 17. *Пример шематског цртежа (лево) и нешематског цртежа (десно) (Edens, Potter, 2007: 289)*

Примећујемо да оба цртежа имају нешематске сликовне елементе као што су чамац и риба, али на шематском цртежу је јасно приказан стуб као и део на површини и у дну језера што је ученику помогло да реши проблем. Шематски цртежи који моделирају математичке величине и односе играју важну улогу у когнитивним процесима укљученим у решавање математичких проблема. Менталне репрезентације настале у процесу решавања текстуалних задатака формиране уз помоћ цртежа могу се увести већ у основном образовању, јер ученици који су упознати са тим менталним репрезентацијама имају боље резултате и мењају своја уверења везана за математику (Debrenti, 2015). Када ученици овладају шематским представљањем и когнитивним процесима потребним за решавање различитих текстуалних проблема онда ни цртежи неће имати сувишне детаље. На пример на слици 18. дато је решење следећег задатка: *Трговац је имао 7 дињa. Допремио је још 17 дињa, половину је паковао у кутије у које стају по две дињe, а другу*

половину у кутије у које стају по три диње. Колико је укупно кутија искористио за паковање? (Temur, 2012: 88)



Слика 18. *Решење задатка са дињама (Temur, 2012: 89)*

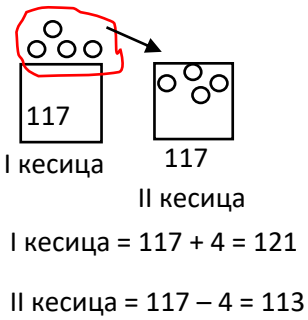
Ученик је диње симболично представио срцем, али је разумео суштину проблема и тачно дошао до решења. Дакле цртеж не мора бити реалистичан већ приказати односе и релације и на тај начин помоћи ученику да разуме и реши проблем. До истог закључка су дошли Хегарти и Козхевников тврдећи да наставник кроз наставни процес треба да објасни и оспособи ученике да конструишу просторне репрезентације односа између објеката у проблему али тако да не представљају небитне сликовне детаље на својим цртежима (Hegarty, Kozhevnikov,1999). Коришћење шематских цртежа углавном доводи ученике до успешног решавања математичких задатака, док је употреба сликовних цртежа у негативној корелацији са успехом у решавању (Hegarty, Kozhevnikov,1999; Edens, Potter, 2007).

На конкретним примерима задатака, Пример 1, Пример 2, Пример 3 и Пример 4, обрађених на часовима одржаним у одељењима експерименталне групе приказаћемо како визуелизација уз дечији цртеж као модел пружа помоћ при решавању и води когнитивни процес преласка на симболичку репрезентацију и доласка до решења. Оно што такође желимо да постигнемо когнитивно-визуелним приступом решавању проблема јесте да ученици увиде колико им визуелни приказ проблемске ситуације из задатка може олакшати когнитивне активности и да их на тај начин мотивишемо да га користе. Када схвате да им олакшава пут до решења проблема примењиваће га кад год је то могуће.

Пример 1. *Када је Дарко из прве кесице бомбона пребацио четири бомбоне у другу кесицу у обе је било по 117 бомбона. Колико је бомбона било у свакој кесици пре пребацивања?*

Први корак при решавању задатка је, као што смо раније навели, анализа текста. Непозната нам је количана бомбона у првој и у другој кесици, али знамо да после пребацивања у обе имамо по 117 бомбона. Зато кад приступамо визуелизацији крећемо од познатог податка, а то је да после пребацивања имамо две идентичне кесице бомбона.

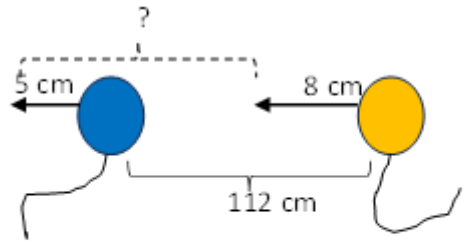
Шематски приказ су два подударна правоугаоника, а онда илуструјемо пребацивање бомбона. Као модел користимо обичан дечији цртеж али без сувишних детаља. У првој кесици је било 4 бомбоне више, па их пребацујемо у другу кесицу у којој је баш те 4 недостајало да се напуни до исте количине (Слика 19). Сада када ученик погледа добијени шематски приказ лако закључује да је у првој кесици пре пребацивања било 117 + 4 = 121 бомбона, а у другој 117 – 4 = 113 бомбона.



Слика 19. *Решење примера 1 когнитивно-визуелним приступом уз коришћење слободног цртежа у процесу решавања задатка*

Пример 2. *Два балона се налазе на растојању 112 cm један од другог. Задувао је ветар и померио их оба у истом смеру, први балон за 5 cm, а други за 8 cm. Колико је сада растојање између њих?*

Започињемо, као и у претходном примеру, анализом текста задатка. Циљ је да дате податке визуелизујемо дечијим цртежом Податак који нам је познат јесте да су два балона на растојању 112 cm један од другог, то приказујемо визуелним шематским цртежом са унетим податком за растојање. Затим на цртеж уносимо промену растојања тако што померамо оба балона у истом смеру, први за 5 cm и други за 8 cm. Како одредити ново растојање, после померања балона? Уочити на цртежу да кад померимо први балон за 5 cm на пример у лево растојање ће се повећати за 5 cm, али кад померимо и други у истом смеру, лево, за 8 cm растојање ће се смањити. Решење је приказано на слици 20.



112 cm +5 cm – 8 cm = 117 cm – 8 cm =
= 109 cm

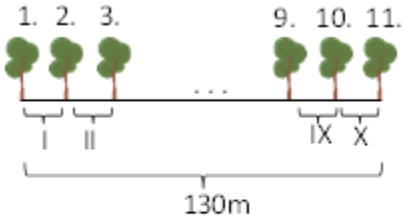
(може и 112 cm – 3 cm = 109 cm)

Слика 20. *Решење примера 2 когнитивно-визуелним приступом уз коришћење слободног цртежа у процесу решавања задатка*

Поред проблема у којима визуелизујемо промене реалне ситуације и уочавамо везу између података пре и после промене модел шематског цртежа успешно се може користити и у проблемима где се очигледност управо постиже цртежом и решење добија директно из визуелизације. Такав је проблем наведен као пример 3.

Пример 3. *Крај пута дужине 130 m, на једнаком растојању, засађено је 11 стабала ораха. Колико је растојање између свака два узастопна стабла?*

Анализом текста овог проблема долазимо до закључка да нам је познато да је 11 ораха засађено дуж пута и да је растојање између суседних једнако, то и треба представити цртежом. Деца обично цртају стабло са крошњом, али може се нацртати и само 11 усправних линија на једнаком међусобном растојању. Како је дужина пута 130 m потребно је унети и тај податак на цртеж, означити растојање од првог до последњег стабла. Ученици ће уз помоћ наведене визуелизације и унетих података уочити да постоји 10 једнаких размака и да је потребно дужину пута поделити са 10, као што је приказано на слици 21.



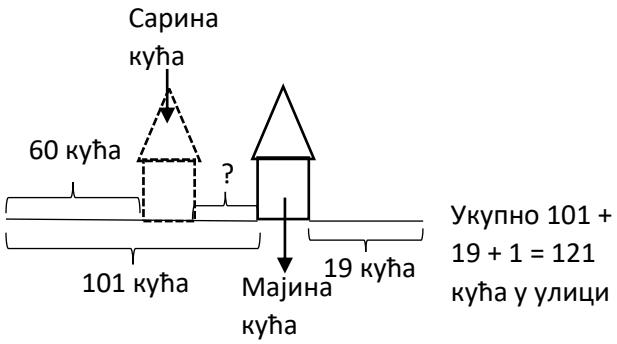
130 m : 10 = 13 m

Слика 21. *Решење примера 3 когнитивно-визуелним приступом уз коришћење слободног цртежа у процесу решавања задатка*

Задатке са великим обимом података чије је праћење у оквиру самог текста отежано, а посебно превођење у симболички запис неопходно је визуелизовати како би уочили когнитивни пут до решења.

Пример 4. *Маја и Сара живе у истој улици. Са једне стране Мајине куће има још 101 кућа, а са друге стране 19. Сара живи у кући која је тачно на средини те улице. Колико кућа има између Мајине и Сарине куће?*

Пажљивим читањем и анализом текста проблема издвајамо прво оно што су нам познате варијабле. Најпре на цртежу означавамо Мајину кућу. Мајина кућа је постављена тако да са једна стране има 101 кућа, а са друге 19 кућа. То приказујемо цртежом и на основу цртежа закључујемо да је у улици укупно 121 кућа. На цртеж треба додати Сарину кућу, она је на средини улице. Пошто смо закључили да је 121 кућа у улици значи да је лево и десно од Сарине по 60 кућа, њена је 61. по реду. Кад и то додамо на цртеж решење нам је очигледно (Слика 22).



Сарина је 61. кућа, тако да између
ње и Маје има 40 кућа.

Слика 22. *Решење примера 4 когнитивно-визуелним приступом уз коришћење слободног цртежа у процесу решавања задатка*

Модел шематског дечијег цртежа у оквиру експерименталног програма нашег истраживања користили смо при решавању математичких проблема у којима је било промена у реалном контексту, као и у задацима у којима има више података или у којима текстуално објашњење садржи више релационих информација (односа). Фокус на дечији цртеж као модел кључан је зато што он представља спонтани израз дететовог унутрашњег менталног модела, а не само репродукцију наметнуте шеме. Када ученик самостално црта елементе проблема, он врши индивидуалну интерпретацију математичких односа, што му омогућава да апстрактне количине преведе у њему блиске, опипљиве симболе. Тиме цртеж престаје да буде само илустрација и постаје средство за мишљење које директно развија

компетенцију "математичког моделовања" и решавања проблема. Кроз овај процес, дете учи како да преведе текст у сопствену визуелну структуру, чиме се развија капацитет за самостално откривање решења и дубинско разумевање структуре задатка.

3.2.2. Модел ваге као визуелна репрезентација алгебарских односа

Један од кључних дидактичких изазова у почетној настави математике јесте како ученицима приближити високу апстрактност алгебарских садржаја. Када се са конкретних рачунских операција (аритметике) пређе на симболички језик алгебре, ученици се суочавају са озбиљним потешкоћама тврде Маричић и Милинковић (2017). У оквиру овог прелаза, посебно место и важност заузима проблем разумевања знака једнакости. Традиционално усвојена навика у млађим разредима да се знак једнакости посматра искључиво као налог за рачунање и уписивање резултата касније онемогућава развој било каквог алгебарског мишљења. Аутори истичу да се кроз адекватне визуелне моделе (као што је модел ваге) знак једнакости мора трансформисати у свести ученика у симбол релације и еквиваленције. Тек када ученик разуме да лева и десна страна израза морају бити у балансу, поставља се чврста основа за успешно разумевање једначина, структура и за даљи развој математичке писмености.

По речима Гринса и Финдела ученици су развили алгебарско математичко резоновање ако су у стању да тумаче алгебарске једначине користећи сликовне, графичке и симболичке репрезентације (Greenes, Findell, 1999). Они препоручују представљање алгебарских израза помоћу модела ваге како би се промовисало релационо размишљање ученика. Марјановић једначине сматра помоћним средством које ученицима омогућава манипулацију словима и изразима са словима у смислу развијања идеје о променљивој (Марјановић,1996).

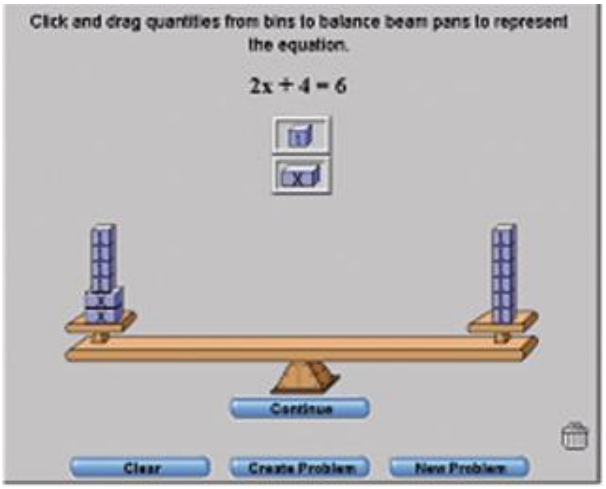
Кад ученици приступе решавању једначина једнакост добија ново значење. Анализирајмо истраживање које проверава разумевање једнакости код деце предшколског узраста, старости од 5 до 6 година (Hodnik Čadež et al., 2014). Пошто су деца претходно стекла довољно искуства руковања вагом васпитачице су их питале шта би учинили да вага буде у равнотежи ако је са једне стране шест, а са друге четири куглице, све куглице су исте масе. Евидентиране су три стратегије којима су деца дошла до решења:

1. "увид + и – " – стратегија пребацивања једне куглице из посуде са шест куглица у посуду са четири куглице;
2. "увид + " – стратегија додавања две куглице у посуду са четири куглице;
3. "увид –" – стратегија узимања две куглице из посуде са шест куглица (Hodnik Čadež et al., 2014).

У овом експерименту вага деци дозвољава да додавањем и одузимањем куглица, што су динамичке операције, остваре једнакост између леве и десне стране. На тај начин могу повезати значење једнакости као операције са значењем једнакости као релације. Вага им, у овом случају, даје тренутну повратну информацију о једнакости и на тај начин их подстиче да наставе тражити једнакост (Hodnik Čadež et al., 2014).

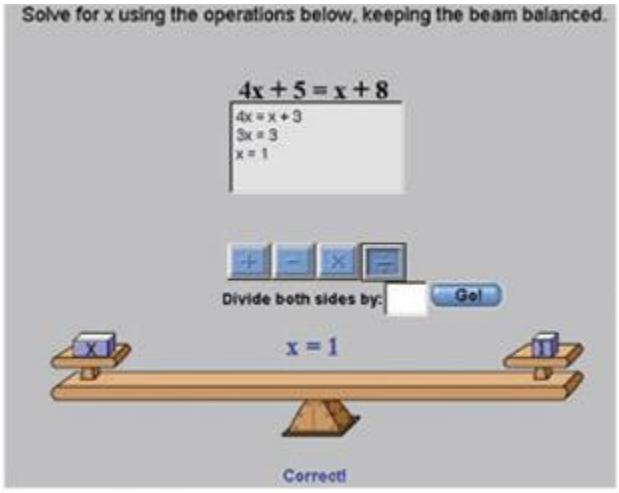
Модел ваге је визуелна репрезентација која се користи за два темељна математичка појма, а то су појам једнакости и очувања једнакости и појам непознате. Ученици прво треба да се упознају са особинама праве ваге и проблемом при одржавању равнотеже тј. постизања једнакости додавањем, односно одузимањем масе тега. Они лако схвате да је тег на ваги репрезентација позитивног броја у једнакости, али како представити негативан број, односно одузимање? За негативан број обично се могу користити балони, јер ако би додали балон на једну страну ваге то би значило одузимање масе тега на тој страни ваге или подизање те стране јер се тежина на том тасу смањила. На овај начин се могу визуализовати рачунске операције у једнакостима. Карактеристике физичких, али и виртуелних манипулатива могу бити корисне у различитим контекстима и за различите математичке садржаје.

О употреби манипулатива као физичког приказа током наставе математике се деценијама расправља у литератури за математичко образовање. Балка описује корист употребе манипулатива тврдећи да употреба манипулатива омогућава ученицима да направе важне везе између концептуалног и процедуралног знања, да препознају односе између различитих области математике и да виде математику као интегрисану целину, да истражују проблеме користећи физичке моделе и да повежу процедуре у еквивалентну репрезентацију (Balka, 1993). Међутим, Капут је упозорио да ученици не повезују увек аутоматски своје поступке са манипулативом и своје поступке са симболима (Kaput, 1989). Једно од могућих објашњења за ову неповезаност је да је когнитивно оптерећење наметнуто током активности са манипулацијама превелико за ученике, односно да ученици нису у могућности да прате своје радње са манипулативима и не виде везу између ових радњи и акција које предузимају на симболима. Ипак расте број истраживања о употреби виртуелних манипулатива као репрезентација за наставу математике у учионицама. Виртуелни манипулативи се могу дефинисати као "компјутерски засновани прикази уобичајених математичких манипулација и алата" (Dorward, 2002: 329) и "интерактивна, веб-базирана визуелна репрезентација динамичког објекта која представља могућности за конструисање математичког знања" (Moyer et al., 2002: 373). По наводима National Council of Teachers of Mathematics (2000) мала деца при раду са виртуелним манипулативима могу проширити физичко искуство и развити почетно разумевање софистицираних идеја као што је употреба алгоритама. Постоји аплет виртуелне алгебарске ваге (National Library of Virtual Manipulatives, http://matti.usu.edu/nlvm/nav/) која се користи за решавање линеарних једначина, приказана је на слици 23.



Слика 23. *Виртуелна манипулативна алгебарска вага (Suh, Moyer, 2007: 161)*

Јединични блокови, који су представљени коцкама означеним са 1 и x – коцке, које представљају непознату x, постављени су на тасове ваге. Кад се вага уравнотежи она представља дату линеарну једначину. Ученици могу да изаберу да изврше било коју аритметичку операцију, све док изводе исту операцију на обе стране једначине (на оба таса ваге), одржаваће на тај начин тасове у равнотежи. Ако једначина није избалансирана, вага ће се нагети на једну страну. Циљ аплета је да вага буде у равнотежи и да се на једној страни добије једна x коцка, а на другој страни износ који је потребан за баланс, што уствари даје вредност непознате. Предност нових технолошких алата је њихова интерактивност и могућност представљања више репрезентација у исто време на екрану. На пример, неки виртуелни манипулативни аплети представљају динамичке визуелне објекте, симболичке или нумеричке изразе и писана објашњења истовремено на екрану. То омогућава кориснику да има истовремено увид у визуелне и писане изразе истог математичког концепта или процеса (Suh, Moyer, 2007). При коришћењу поменуте виртуелне алгебарске ваге на екрану се истовремено појављује динамички визуелни објекат ваге који се мења одабиром аритметичке операције, која је такође понуђена на екрану. У издвојеном прозору се налази симболички запис обављених корака, а испод ваге и одговор да ли је добијени резултат тачан (Слика 24).



Слика 24. *Представљање више репрезентација истовремено на екрану (Suh, Moyer, 2007: 164)*

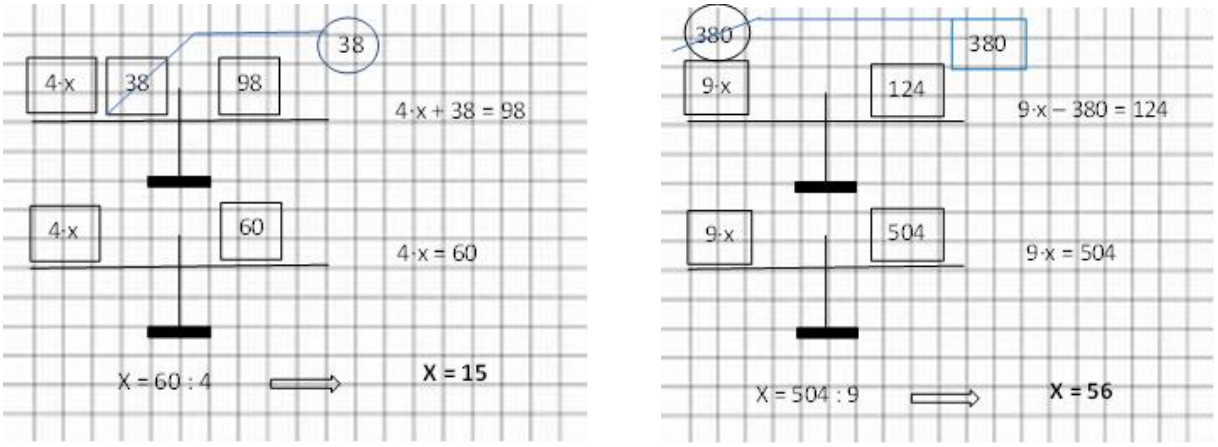
Постоји и физички манипулатив алгебарске ваге под називом Hands-On Equations® (Borenson, 1997). Осмислио га је Хенри Боренсон (Henry Borenson) и представља визуелни и кинестетички наставни материјал помоћу ког ученици од трећег до осмог разреда упознају алгебарске појмове. Сет за наставнике садржи стационарну пластичну вагу, пластичне коцке са бројевима и фигуре "пешака", а сет за ученике уместо ваге садржи подлогу са нацртаном вагом за представљање алгебарске једначине (Слика 25.)



Слика 25. *Hands-On Equations® (Suh, Moyer, 2007: 161)*

Пешачке фигуре представљају непознату вредност, а коцке са бројевима представљају бројеве у једначини. Када ученик уклони пешака или коцку са бројем са једне стране, исти број пешака или бројчаних коцки мора бити уклоњен са друге стране ваге да би једначина била уравнотежена. Овај систем за практично учење једначина поставља конкретне темеље и увод у алгебру. Користећи једноставне манипулације овај метод личи на игрицу, али пружа право разумевање алгебре.

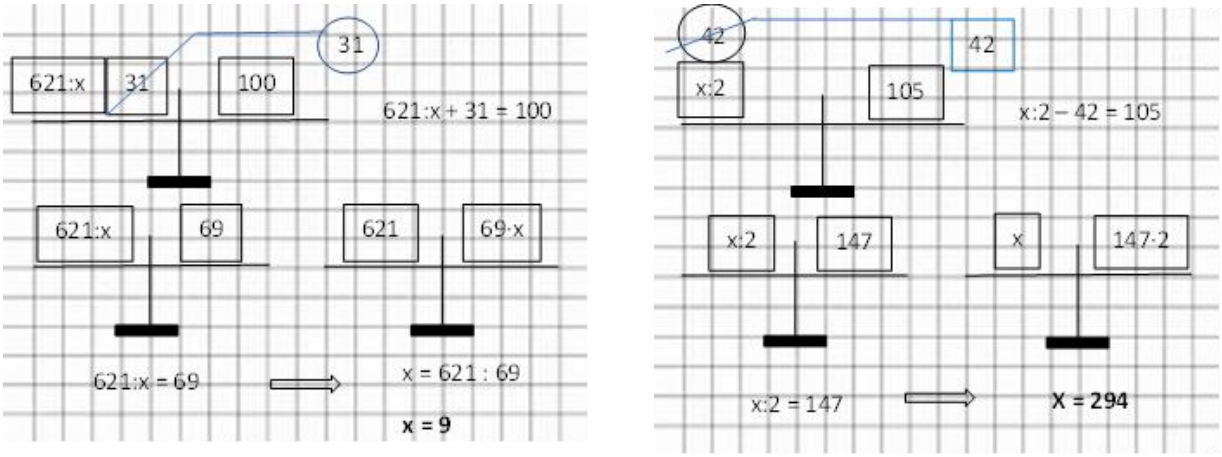
Модел ваге који користимо у оба наведена манипулатива, и виртуелном и физичком, може се представити и помоћу квадратне мреже. Квадратна мрежа је ученицима увек доступна док за поменути виртуелни манипулатив морају имати JAVA програм, а поменути физички манипулатив није доступан на нашем тржишту. Користићемо исту идеју и тасове ваге, која је у равнотежи, представити на истој линији квадратне мреже. Вредности које сабирамо представљаћемо у правоугаоницима, а оне које одузимамо у круговима јер би представљале поменуте балоне који могу умањити масу или вредност на тасу ваге.



Слика 26. *Примена модела ваге у решавању једначине са две рачунске операције, множење и сабирање (лево) и множење и одузимање (десно)*

На слици 26. приказане су две једначине са решењем. Значајан корак при коришћењу овог модела јесте да се иста аритметичка операција обавља са обе стране ваге како би се задржао положај тасова, зато се у примеру лево одузима 38 на обе стране, а у примеру десно додаје 380. Када дођемо до ситуације да на једном тасу ваге имамо више од једног x ($4 \cdot x$, односно $9 \cdot x$), довољно је поделити обе стране тим истим бројем и добићемо вредност непознате.

Ако се у једначини појави операција дељења она се множењем обе стране ваге делиоцем лако преведе на облик једнакости који смо имали у претходном примеру. На слици 27. приказана су два примера једначина у којима се појављује и операција дељења, као и поступак решавања коришћењем модела ваге уз пратећи алгебарски запис.



Слика 27. *Примена модела ваге у решавању једначине са две рачунске операције, дељење и сабирање (лево) и дељење и одузимање (десно)*

Хигинсон истиче значај иконичке представе једначине описујући Русоов (Jean-Jacques Rousseau 1712–1778) приступ алгебри и алгебарским садржајима (Higginson,1982). Русо није веровао у тачност формуле за квадрат бинома све док је није потврдио представљајући је одговарајућим геометријским цртежом на папиру. Изјавио је: ”Није да сам имао мржњу према алгебри, као према апстрактној ствари, већ сам желео операцију да видим графички представљену, другачије то нисам никако могао да разумем” (Higginson,1982: 240).

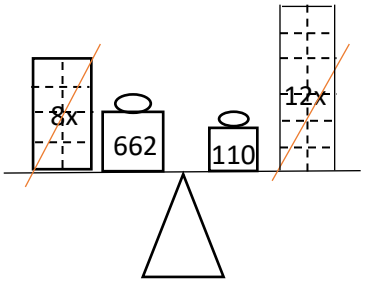
Иако Боеро и Бацини тврде да се у већини земаља неједначине обрађују на часовима као споредни садржај наставе математике у односу на једначине, ми сматрамо да је овладавање поступком и начином решавања неједначина једнако важно као и поступак и начин решавања једначина у почетној настави математике (Boero, Bazzini, 2004). Слично наведеном визуелном моделу решавања једначина могу се решавати и линеарне неједначине у скупу природних бројева. У том случају се чува положај у ком је вага постављена на основу дате неједначине, а не у равнотежном положају. Израз, односно страна неједнакости која је већа мора се поставити на тас ваге који је нижи.

У когнитивно-визуелном приступу решавању проблема може се користити и модел ваге, али при решавању проблема у којима је то експлицитно наглашено или у којима поредимо количине. Визуелизација једначина уз помоћ модела ваге може помоћи ученицима да усвоје поступак за решавање чак и сложенијих једначина. Навешћемо неколико примера задатака са часова одржаних у оквиру експерименталног програма нашег истраживања у којима је илустрован и објашњен модел ваге при решавању.

Пример 5. *Тања је замислила један број. Ако тај број помножимо бројем 8 и додамо му број 662 добићемо исту вредност као и кад би га помножили бројем 12 и додали број 110. Који број је Тања замислила? (користи модел ваге и једначину).*

Једначину односно задатак приказујемо визуелно, на основу података из текста проблема, тако што непознати број представимо квадратићем, а тегове нацртамо и поставимо све на одговарајуће тасове ваге. Вага је у равнотежи па представља једнакост

између онога што је на левом и онога што је на десном тасу. Равнотежа се неће нарушити ако склонимо исту вредност и са леве и са десне стране, зато одузимамо 8*x* да би на левој страни остао само тег (Слика 28.). Сада је преосталих 4*x* исто што и 552, јер одузмемо тег на коме пише вредност 110 и са леве и са десне стране. Дакле циљ решавања једначине, визуелно уз помоћ ваге, јесте да се на једном тасу нађе само непозната вредност, а на другом тег тј. позната вредност. Када смо добили вредност 4*x* да је 552, вредност једне непознате је четири пута мања, односно 138. Када би ученик трећег разреда добио као задатак да реши симболички задату једначину 8x + 662 = 11 + 12x не би знао да је реши без помоћи визуелног модела. Помоћ модела ваге и њених особина диктира ученику кораке когнитивног тока доласка до решења. Ученици на тај начин са лакоћом и успешно решавају и сложеније задатке (једначине) и стичу самоувереност и компетентност што доприноси и бољој мотивисаности за савладавање математичких садржаја.



$4 \cdot x + 110 = 662$

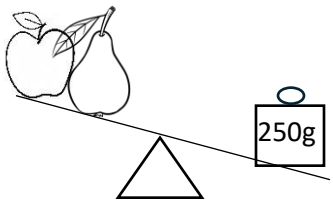
$4 \cdot x = 662 - 110 = 552$

$x = 552 : 4 = 138$

Слика 28. *Решење примера 5 когнитивно-визуелним приступом уз коришћење модела ваге у процесу решавања задатка*

Осим једначина, односно једнакости, модел ваге може се користити и код решавања проблема неједнакости.

Пример 6. *Трговац је мерио масу једне јабуке и једне крушке и приказао то на слици. Ако јабука има масу 125 g, колика може бити маса крушке?*



У овом примеру цртеж је дат у самом задатку. На основу слике и текста задатка записујемо неједначину 125g + x < 250g . Када би вага била у равнотежи (125 + x = 250) крушка би имала масу: x = 250g – 125g = 125g. Како вага ипак није у равнотежи и како је збир маса јабуке и крушке мањи од 250g онда и маса крушке мора бити мања од 125g (јер да би се збир смањио мора се смањити и сабирак).

У задацима у којима се користи једнакост не мора се експлицитно цртати вага већ модел примењујемо коришћењем особина ваге и њеног равнотежног положаја.

Пример 7. *Продавац је продао 5 заштитних фолија за телефон и 3 кабла за пуњач за 828 динара. Ако је цена заштитне фолије за телефон 20 динара нижа од цене кабла за пуњач колико кошта заштитна фолија? (користи једначину).*



Слика 29. *Решење примера 7 когнитивно-визуелним приступом уз коришћење модела ваге у процесу решавања задатка*

Анализирамо текст задатка и долазимо до једнакости између цене 5 заштитних фолија, 3 кабла за пуњач и износа од 828 динара. Пошто се цена кабла и цена заштитне фолије разликују за 20 динара (кабл је скупљи) додавањем 5 · 20 динара на цену фолије или одузимањем 3 · 20 динара на цену кабла имали би исти износ за сваки од 8 купљених производа. Због "чувања" једнакости исту операцију морамо применити и на 828 динара. Једно могуће решење приказано је на слици 29.

Коришћење модела ваге у почетној настави математике представља један од најефикаснијих начина за демистификацију концепта једнакости и алгебарског мишљења. За разлику од статичних приказа, модел ваге уводи принцип равнотеже као директну физичку метафору за знак једнакости, што ученицима олакшава разумевање да лева и десна страна једначине морају имати исту "вредност". Модел ваге смо одабрали у нашем истраживању јер је посебно погодан за примену код ученика млађег школског узраста за стицање компетенција релационог мишљење јер ученици престају да посматрају знак

једнакости као наредбу за израчунавање, већ га разумеју као однос баланса између две стране. Такође, олакшава решавање једначина јер манипулацијом теговима или предметима, дете визуелно и тактилно схвата правило да се равнотежа одржава само ако се иста операција изврши на обе стране, што је основа за касније решавање линеарних једначина у старијим разредима. Вага развија и логичку апстракцију омогућавајући прелазак са конкретних предмета на апстрактне бројеве, чиме се развија капацитет за математичко доказивање и проверу тачности путем логичког закључивања.

Увођењем овог модела ваге, математички проблем престаје да буде апстрактна формула и постаје динамичан систем у којем ученик активно учествује у успостављању хармоније бројева.

3.2.3. Сингапурски модел правоугаоника као визуелна репрезентација аритметичких и алгебарских проблема

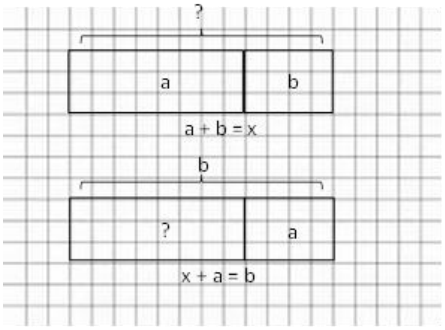
Истражујући и анализирајући основне одлике и својства модела Новотна је закључила да модел мора да: покрене мисаону активност ученика, буде једноставан и јасан, визуализује апстрактне информације из задатка и буде флексибилан како би се уз лаку модификацију могао користити за различите проблеме у групи сличних проблема (Novotná, 1997*)*. Управо те наведене особине поседује сингапурски модел правоугаоника. Постоје три врсте цртежа за модел правоугаоника који се уче у сингапурским школама, а то су: *део – целина*, *поређење* и *модели множења и дељења* (Ng, Lee, 2009).

Модел део – целина се може користити за решавање аритметичких задатака сличних Примеру 8 или алгебарских текстуалних проблема облика задатка датог Примером 9.

Пример 8. *Марија има 120 перли више од Саре. Ако Сара има 68 перли, колико перли има Марија?*

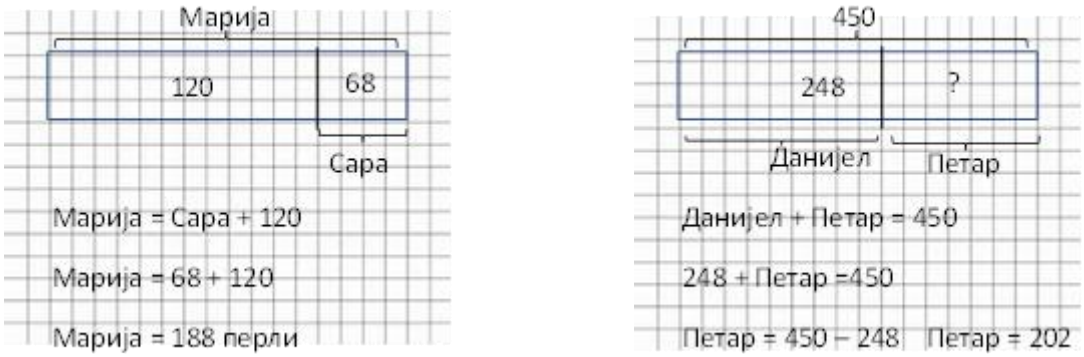
Пример 9. *Данијел и Петар имају 450 кликера. Ако Данијел има 248 кликера, колико кликера има Петар?*

Модел део – целина може се користити за представљање аритметичке ситуације у којој је $a + b = x$ и тад се цртеж састоји од два правоугаоника различитих дужина који представљају величине a и b. Непознати збир x представља се заградом која обједињује два правоугаоника и добија се сабирањем вредности a и b. Модел се користи и за алгебарске задатке у којима је $x = b - a$ (Слика 30).



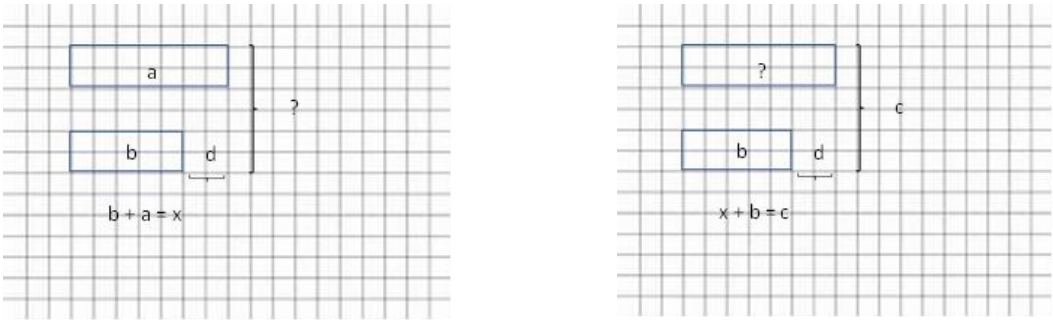
Слика 30. *Модел део – целина: Аритметички (горе) и алгебарски (доле)*

Решења Примера 8 и Примера 9 дата су на слици 31., коришћен је модел део – целина.



Слика 31. *Решење задатка у Примеру 8 (лево) и задатка из Примера 9 (десно)*

Модел поређења користи се за уочавање односа између две или више величина које се пореде. Аритметички задаци који се решавају коришћењем овог модела представљају ситуације у којима је $a = b + d$ и збир a и b је x (Слика 32).

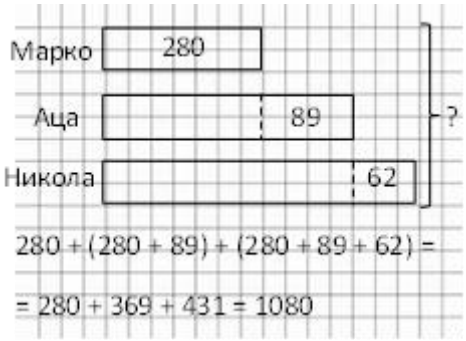


Слика 32. *Модел поређења за аритметичке (лево) и алгебарске задатке (десно)*

Цртеж алгебарског модела има исту структуру као и цртеж аритметичког, а може се користити за решавање проблема облика $x + b = c$ где је правоугаоник са знаком питања вредност која би представљала непознату x.

Пример аритметичког задатка је задатак из Примера 10.

Пример 10. *Марко, Аца и Никола су скупљали сличице фудбалера. Ако Марко има 280 сличица, Аца за 89 сличица више од Марка, а Никола 62 више од Аце. Колико сличица имају заједно?*(Слика 33).



Слика 33. *Решење задатка из Примера 10 моделом поређења*

Пример сложенијег алгебарског задатка који се решава помоћу модела поређења је задатак дат у Примеру 11.

Пример 11. *Крава тежи 150 kg више од пса. Коза тежи 130 kg мање од краве, а све три животиње теже 410 kg. Колико је тешка крава?* (Ng, Lee, 2009) (Слика 34).



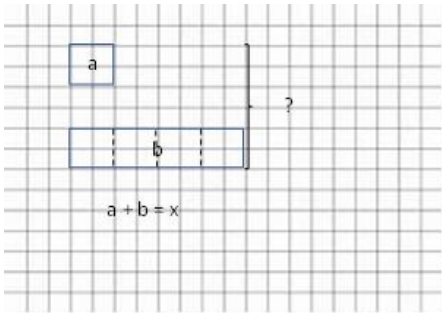
Слика 34. *Решење задатка из примера 11 моделом поређења*

Коришћење модела за решавање аритметичких проблема је директан процес јер укључује сабирање нумеричких улаза представљених правоугаоницима, као што је приказано у наведеном примеру аритметичког задатка. Решавање алгебарских задатака, са непознатим улазом, захтева другачији начин размишљања. Да би одредили непознати улаз сва стања или правоугаоници морају се размотрити заједно. У нашем решењу задатка са масама животиња представили смо и масу пса и масу козе преко тражене масе краве и на тај начин дошли одмах до потребне вредности. Задатак се може решити и ако се за масу преко које изражавамо преостале две узме вредност (правоугаоник) масе пса или козе, али би потом морали додатно израчунати потребну масу краве.

Модел множења и дељења користи се за представљање аритметичких проблема који укључују множење и дељење, као и разломке.

Пример 12. *Маја је добила џепарац од 1250 динара, а Сања стипендију која је четири пута већа од Мајиног џепарца. Колико новца имају заједно?*

Овај пример представља аритметичку ситуацију $4 \cdot a = b$ и $a + b = x$ (Слика 35).

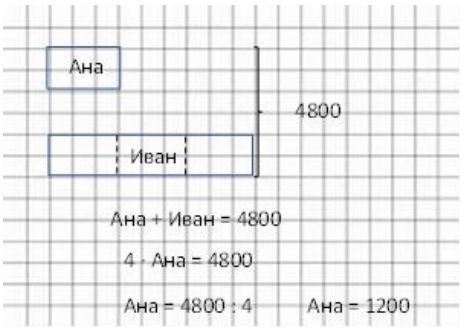


Слика 35. *Модел множења и дељења за аритметичке задатке*

Да би дошли до решења постављеног задатка, односно до укупног износа треба Мајин џепарац помножити са 5 па је решење $5 \cdot 1250 = 6250$ динара.

Овим моделом множења и дељења може се приказати и алгебарска ситуација $x + b = a$ и $b = n \cdot a$, где n представља мултипликативни однос између a и b. Дакле збир је дат, али је један од делова непознат. Правоугаоник у ком је знак питања представљаће основу за поређење.

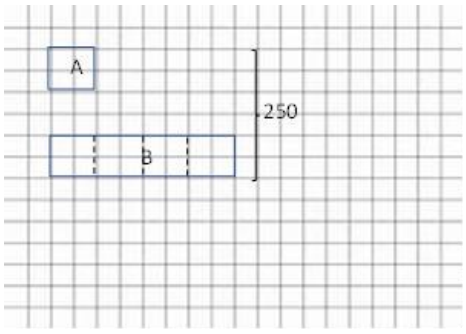
Пример 13. *Ана и Иван имају укупно 4800 динара. Ако Иван има три пута више новца од Ане, колико новца има Ана?*(Слика 36).



Слика 36. *Модел множења и дељења за Пример 13 алгебарског задатка*

Као што је поменуто модел множења и дељења може се користити у решавању задатака који укључују разломке. Овај модел пружа ученицима могућност да уместо рада са разломцима користе концепте природних бројева и оперишу са њима. За објашњење може послужити Пример 14 који су навели Нг и Ли (Ng, Lee, 2009: 289), а користе га у петом разреду основне школе.

Пример 14. *Ако је запремина воде у посуди A ¼ запремине воде у посуди B, а укупна запремина воде у обе посуде је 250 l, одредите запремину воде у посуди A.* (Слика 37).



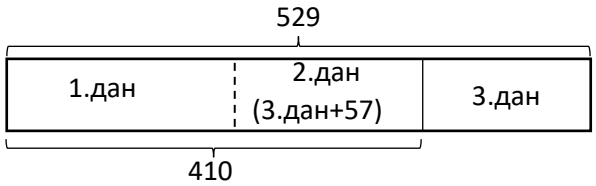
Слика 37. *Модел множења и дељења за Пример 14 који укључује разломке*

Дакле, један правоугаоник представља запремину А, док В представљамо са четири правоугаоника исте величине као А. Са цртежа је очигледно да постоји 5 једнаких делова, онда је 5 јединица = 250 *l*, па је 1 јединица = 50 *l*. Значи запремина А је 50 *l*. Модел множења и дељења се може користити за решавање алгебарских ситуација у којима је $x + b = c$ и $x = 1/n \cdot b$, као у наведеном примеру.

Примену сингапурског модела правоугаоника који се може користити са једном од наведене три варијанте цртежа увели смо као активност на часовима у оквиру осмишљеног експерименталног програма нашег истраживања. Пример проблема који се решава цртежом "део – целина" је Пример 15.

Пример 15. *Филип је за три дана аутомобилом прешао 529 километра. Прва два дана је прешао 410 километара, а другог дана је прешао 57 километара више него трећег дана. Колико километара је Филип прешао сваког дана?*

Проблем овог типа ниједан ученика неће решавати визуелно, осим ако се то од њега захтева. На часовима примене когнитивно-визуелног приступа при решавању математичких проблема инсистирали смо да ученици овај задатак реше уз помоћ модела правоугаоника. Визуелна репрезентација и решење приказани су на слици 38.



3.дан = 529 – 410 = 119

2.дан = 119 + 57 = 176

1.дан = 410 – 176 = 234

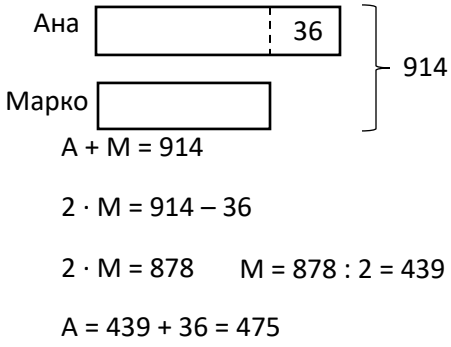
Слика 38. *Решење примера 15 когнитивно-визуелним приступом уз коришћење сингапурског модела правоугаоника у процесу решавања задатка*

Пример проблема који се решава цртежом "поређења" је Пример 16.

Пример 16. *Ана и Марко укупно имају 914 динара. Ако Ана има 36 динара више од Марка, колико динара има Ана, а колико Марко?*

Визуелна репрезентација овог проблема подразумева два правоугаоника од којих један представља Анин новац и он је дужи од другог који представља Марков новац. На цртежу обавезно означавамо разлику у правоугаоницима, односно износу новца између Ане и Марка и укупну суму новца коју они имају заједно јер су нам то познате варијабле. Оваквим приказом желимо да постигнемо да ученик чим погледа цртеж зна како да одреди

непознату величину. Кад погледамо цртеж непозната величина је представљена Марковим правоугаоником и очигледно је да кад саберемо два таква правоугаоника и 36 добијамо 914. Дакле, два Маркова новчана износа су 878 динара па Марко има 439, а Ана за 36 динара више, што је 475 динара (Слика 39).

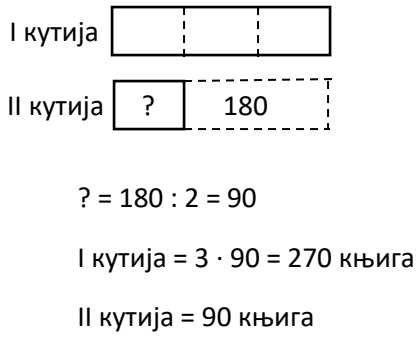


Слика 39. *Решење примера 16 когнитивно-визуелним приступом уз коришћење сингапурског модела правоугаоника у процесу решавања задатка*

Пример проблема који се решава моделом "множења и дељења" је Пример 17.

Пример 17. *У две кутије спаковане су књиге. У другој кутији има 180 књига мање него у првој, а у првој три пута више него у другој. Колико књига има у првој, а колико у другој кутији?*

Више пута је наглашено да се текст проблема мора пажљиво читати и анализирати. Визуелизација овог примера креће такође цртежом поређења, јер прву кутију приказујемо једним правоугаоником, а другу правоугаоником који је краћи, а разлику у величини приказујемо испрекиданом линијом, јер то је део који недостаје. Даљи текст проблема даје нам податак да је у првој кутији три пута више књига него у другој, тако да коригујемо величине правоугаоника, ако је потребно, тако да први правоугаоник буде три пута дужи од другог. Испрекидана разлика и даље остаје и мора да допуни други правоугаоник до величине првог (Слика 40). Позната варијабла, 180 књига, је разлика представљена испрекиданим правоугаоником, па је ту и бележимо на цртежу. Овако добијена визуелна репрезенатација пружа нам очигледно решење. Број књига у другој кутији добијамо када 180 поделимо са два. У другој кутији је 90 књига, а у првој три пута више, што је 270 књига.



Слика 40. *Решење примера 17 когнитивно-визуелним приступом уз коришћење сингапурског модела правоугаоника у процесу решавања задатка*

Сингапурски модел правоугаоника представља моћно визуелно-схематско средство које ученицима омогућава да деконструишу сложене текстуалне задатке на јасне логичке делове. Његова специфичност лежи у томе што користи правоугаонике различитих дужина за приказ односа између познатих и непознатих величина, чиме се апстрактни бројни односи преводе у прегледан геометријски облик што олакшава прелаз ка математичким симболима и операцијама. Коришћење овог модела код ученика млађег школског узраста кључно је за развој компетенција за визуелизацију структуре проблема јер ученик уместо насумичног погађања рачунске операције уз помоћ цртања правоугаоника јасно види да ли решава однос сабирањем/одузимањем или множењем/дељењем. Модел правоугаоника је добра припрема за алгебру, јер интуитивно уводи ученике у концепт променљиве. Правоугаоник који представља непознату вредност заправо је визуелна замена за касније x, чиме се значајно олакшава решавање сложенијих проблема у старијим разредима.

Применом овог модела правоугаоника, ученици развијају критичко размишљање и аналитичке вештине, јер задатак више не решавају "напамет", већ кроз разумевање унутрашње архитектуре математичког односа.

3.3. Улога учитеља при креирању и коришћењу когнитивно-визуелног приступа у развијању компетенција ученика за решавање проблема

Примена когнитивно-визуелног приступа у настави математике највише зависи од учитеља. Учитељ би требао да има улогу координатора у процесу конструисања и формирања математичких модела који су резултат стваралачког и креативног односа ученика према датом проблему. Као координатор он мора да води наставни процес и обрати пажњу да сваки модел који одабере буде примерен развојним карактеристикама ученика одређене старосне доби, односно његовом узрасту. Ако ученици успешно користе одабране моделе показаће и више интересовања, као и већу мотивацију при суочавању са

новим проблемским задацима и тако ће лакше и брже усвојити нова знања (Barbosa, 2006). Ако ученици науче да користе више репрезентација имаће могућност да постављени проблем посматрају са различитих становишта, а ако правилно бирају и формирају репрезентације, они ће градити математичка знања која ће им помоћи да ефикасно осмисле стратегију и решавају нове проблеме (Di Sessa, 2002). Тервел и сарадници су у својој студији показали да су деца која уче да креирају сопствене репрезентације било уз помоћ вршњака или под вођством наставника успешнија у решавању нових сложених математичких проблема. Односно, да је креирање сопствених репрезентација од стране ученика значајно за трансфер учења јер се ученици боље сналазе у новим проблемским ситуацијама користећи научено (Terwela et al., 2009). Модели су значајни за развој интелектуалних способности ученика јер се, како наводи Пинтер (Pinter, 1997), пројектују кроз мисаоне операције као што су анализа и синтеза, апстракција и конкретизација, индукција и дедукција, упоређивање и аналогија. У *Правилнику о програму наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања* (2019) такође се наводи да је визуелизација бројева и особина аритметичких операција коришћењем бројевне праве или површина одговарајућих димензија један вид припреме за геометријско решавање аритметичких проблема. Овакве активности визуализације помажу развој способности математичког моделовања код ученика и примене математике у решавању проблема реалног контекста или из других предмета. При решавању задатака посебно се истиче важност селекције значајних информација за решавање проблема и уочавање односа између познатих и непознатих величина. "Бирање задатака у складу са принципом поступности оснажиће ученике у решавању проблема у којима је критичан корак формирање математичког записа (израза или једначине) на основу проблемске ситуације" (стр. 35).

При моделовању у процесу решавања математичких проблема неопходно је коришћење више репрезентација. Кад репрезентације уводимо симултано, а то је у ситуацијама када се ученици суочавају са непознатим, новим искуствима, препоручљиво је да наставник контролише коришћење репрезентација и успостављање веза међу њима. Чим ученици развију одређени ниво разумевања репрезентација треба да им ту контролу постепено препушта. Да би ученици стекли знања коришћењем вишеструких репрезентација, морају изградити референтне везе између структурних елемената из различитих репрезентација. То је когнитивно захтеван процес зато поједини ученици имају потешкоће у разумевању међусобне повезаности вишеструких репрезентација и зато не користе све репрезентације, већ се концентришу на једну, најчешће ону која им је позната или разумљива. У репрезентацијама које су ученицима мање разумљиве или непознате они уочавају само површинске карактеристике и не могу да концептуално идентификују релевантне структуре и/или да укључе сложене делове информација (Seufert, 2003). Велики број математичких репрезентација укључује две или више повезаних идеја. Потешкоће које ученици не могу да превазиђу изазване су недовољним концептуалним разумевањем што доводи до тога да ученици раде са репрезентацијама спроводећи увежбане процедуре, поступке, без потпуног разумевања. То је још један од разлога због ког учитељ треба да помогне ученицима како би превазишли наведене потешкоће у

процесу стицања знања и на најбољи начин искористили потенцијале вишеструких репрезентација.

Наставници су ти који треба да креирају најкорисније начине представљања и формулисања садржаја учења, како би ученицима олакшали учење (Shulman, 1986). На основу познавања садржаја који ученицима представља потешкоће и уобичајених грешака које се могу очекивати, наставници могу одабрати репрезентације којима ће компликоване математичке идеје и апстрактне појмове приближити ученицима тако да их могу разумети (Fennema, Franke, 1992). Искусни наставници који добро познају садржаје које предају поседују читав спектар репрезентација које су корисне за учење тих садржаја. Одабир репрезентације која ће се користити и начин на који се користи утичу на процес учења ученика. Било да су сложене или једноставне репрезентације су важан део учења кад се уводе нови појмови јер помажу при илустрацији процеса решавања проблема и стварају везе између појмова (Костић, 2017). Мора се развити способност да се изабере приступ који је најприкладнији за одређени проблем и да се разумеју ограничења (Zimmerman, Cunningham, 1991). Постоји мноштво различитих репрезентација многих математичких појмова и процеса, али свака од тих репрезентација пружа само неке информације, наглашава одређене аспекте, а сакрива друге. Зато је битно да при одабиру репрезентације наставници знају које предности и која ограничења има одабрана репрезентација при презентовању конкретних наставних садржаја и реализацији циљева, односно исхода наставе. При избору репрезентације, према мишљењу Килпатрика и сарадника, наставник би требао обратити пажњу на следеће:

- транспарентност – степен колико је уочљива идеја коју жели приказати репрезентацијом;
- ефикасност – способност репрезентације да омогући ефикасну комуникацију и коришћење;
- општост – степен применљивост репрезентације на шире класе објеката;
- јасноћа – ниво јасности и једноставности репрезентације за употребу;
- прецизност – тачност вредности репрезентације (Kilpatrick et al., 2001: 99-101).

Дакле, наставник мора бити квалитетан и компетентан да би креирао мултирепрезентативно окружење за учење. Он мора да планира, обликује, организује и реализује различите активности које ће унапредити способности и вештине ученика за успешно коришћење различитих репрезентација.

Способност ученика да користе различите репрезентације као математичка средства и да их примењују када се суочавају са проблемском ситуацијом, сматра се кључном у поступцима решавања проблема. Дакле, при решавању проблема било би пожељно да ученици знају како да одаберу одређени систем представљања и како да га добро искористе (Obradović, Zeljić, 2015). У почетку, приликом привикавања на когнитивно-визуелни приступ, наставник је тај који усмерава ученике избором визуелне репрезентације, али увежбавањем и решавањем различитих примера проблемских задатака

треба постепено препуштати ученицима да сами изаберу који модел визуелне репрезентације ће користити. На тај начин ученици ће стећи компетенције и за избор и конструкцију самог визуелног представљања проблема као и компетенције за његово успешно решавање. Успешност у решавању математичких проблема мотивише ученика да и даље развија своје способности и усавршава се. Задовољан, успешан и мотивисан ученик постаје ефекат који се жели постићи у сваком наставном процесу.

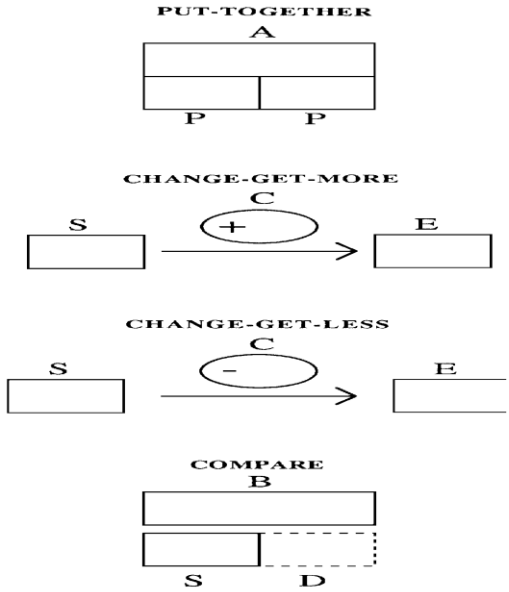
Репрезентације се сматрају алатима за размишљање, објашњавање и оправдавање и због тога наставници и ученици треба да развију норме у учионици које олакшавају објашњење и оправдање, као и употребу репрезентација у служби поткрепљујућих аргумената. Иако је пут изазован, ови увиди ће олакшати промене неопходне за значајну промену праксе у учионици која ће довести до смисленог потпуног разумевања математике (Pape, Tchoshanov, 2001). Према томе, улога наставника у когнитивно-визуелном приступу превазилази пуко приказивање очигледних средстава. Наставник постаје креатор подстицајног дидактичког амбијента у којем визуелни модели прерастају у аутентични језик дечијег размишљања и аргументације.

4. ПРЕГЛЕД ДОСАДАШЊИХ ИСТРАЖИВАЊА

Ако когнитивно-визуелни приступ настави и учењу посматрамо кроз истраживања објављена у свету и код нас приметићемо да је фокус на визуелним репрезентацијама. Визуелизовани задаци чине основу когнитивно-визуелног приступа. Визуелизација објеката и графичко представљање нумеричких информација су важни математички алати који могу помоћи ученицима да реше проблеме и разумеју алгебарске концепте, односно стекну компетенције за решавање математичких проблема. Математички проблеми који су природно апстрактни могу се променити у друге облике који су конкретнији и чине их лакшим за разумевање. Национални савет за наставнике математике (National Council for Teachers of Mathematics NCTM) истиче значај математичких репрезентација за постигнућа ученика и у Стандардима и принципима за наставу математике, сугерише да је начин на који су математичке идеје представљене од суштинског значаја за то како људи разумеју и користе те идеје (NCTM 2000). "Ученици треба да развију и користе различите репрезентације математичких идеја за моделирање проблемских ситуација... Требало би да користе неформалне репрезентације, као што су цртежи, да истакну различите карактеристике проблема... Ове репрезентације служе као алат за размишљање и решавање проблема. Оне такође помажу ученицима да саопште своје мишљење другима" (NCTM 2000: 206.). Употреба визуелних репрезентација треба да кроз очигледност помогне ученицима да проблем разумеју пре него га и реше. Велики број истраживања, експеримената и научних радова из методике наставе математике анализирају улогу визуелних представа у решавању проблемских задатака.

Навешћемо нека од истраживања која су се бавила когнитивно-визуелним приступом у настави и учењу коришћењем, пре свега визуелних, а потом и осталих математичких репрезентација како би истакли значај и могућа ограничења овог приступа.

Још у истраживању Вилиса и Фусона објављеном 1988. године (Willis, Fuson, 1988) истицан је посебан значај шематског цртежа. Ученици два одељења другог разреда основне школе просечног и надпросечног математичког постигнућа (24 надпросечних и 19 просечних) обучавани су да користе различите шематске цртеже за представљање текстуалних проблема са сабирањем и одузимањем. Сам наставни процес био је издељен на више целина и свака наставна јединица обрађивала је по једну проблемску категорију, а направљени су и радни листови. Ученици су увежбавали да у одговарајуће шематске цртеже уносе бројеве из датих задатака и затим да уз помоћ тог цртежа дођу до поступка решавања. У овом раду коришћена су три шематска модела: *целина, промена на више/мање, поређење.*



Слика 41. *Три шематска модела: целина, промена на више/мање, поређење (Willis, Fuson, 1988: 200)*

У почетку су коришћени једноцифрени и двоцифрени бројеви, а потом се прешло и на троцифрене бројеве. Оба дата теста, претест и посттест, имала су по десет тежих текстуалних задатака. На претесту ученицима је било дозвољено да задатке решавају на начин по сопственом избору, а на посттесту захтев је био да направе шематски цртеж за сваки задатак. У оквиру рада постоји и табела класификације такстуалних задатака са сабирањем и одузимањем, а тестираним ученицима су највише проблема правили задаци класификовани као *конфликтни проблеми*. Конфликтни проблеми су текстуални математички задаци у којима је категорија семантичког проблема у сукобу са стратегијом решавања на пример ако у тексту задатка пише "више од", а за решење се користи операција одузимања. Како су на посттесту ученици успешно урадили више различитих врста задатака са сабирањем и одузимањем који се налазе у зони проксималног развоја ученика другог разреда истраживачи су закључили да би и амерички уџбеници могли укључити много теже текстуалне проблеме као што то чине руски уџбеници.

Исти истраживачи, Фусон и Вилис (Fuson, Willis, 1989), објавили су још један рад са сличним садржајем наредне 1989. године. Као и у претходном и у овом истраживању наставници су помагали ученицима другог разреда основне школе из Чикага да науче да користе шематске цртеже за решавање широког спектра задатака са сабирањем и одузимањем који садрже троцифрене бројеве. Узорак је чинило 76 ученика. Претест је имао 24 задатка и подељен је на четири подтеста од по шест задатака, сваки је дат на почетку наставе током четири дана. Посттест са 24 задатка подељен је на два подтеста од по дванаест задатака и сваки је дат посебног дана. Посттестови су у задацима имали троцифрене бројеве и испод сваког текстуалног проблема била су три шематска цртежа као на слици 41. у следећем радоследу, с лева на десно: *Целина, Промени, Упореди*. Ученици су добили инструкције да помоћу цртежа решавају задатке. Цртеж *Целина* коришћен је кад је требало да се додају бројеви, цртеж *Промени* је коришћен да се

одређени износи повећају или смање до датих износа, а цртеж *Упореди* користио се за упоређивање већег броја и мањег како би се одредила њихова разлика. Дошло се до истог закључка да ученици другог разреда у САД-у могу да решавају текстуалне задатке који су много тежи од оних који су у уџбенику, како у погледу структуре проблема, тако и у погледу величине бројева у задацима.

Истраживање у оквиру ког су аутори разликовали два типа визуелно-просторних представа је истраживање које су објавили Хегарти и Козхевников (Hegarty, Kozhevnikov, 1999). Аутори су разликовали шематске приказе који кодирају просторне односе описане у проблему и сликовне репрезентације које кодирају визуелни изглед објеката описаних у проблему. У овој студији анализиран је и објашњен однос између визуелног цртежа, просторне способности и решавања математичких проблема. Идентификацијом два различита типа визуелно-просторних представа које се користе у решавању математичких проблема – шематским и сликовним приказима показано је да су они различито повезани са успехом у решавању математичких задатака. У истраживању је учествовало 33 дечака шестог разреда просечне старости 12 година из Даблина. Као инструмент је коришћен The Mathematical Processing Instrument (MPI) који се састоји од 15 задатака одштампаних на картицама и сваки је праћен низом питања о стратегији која се користи за решавање проблема. Учесници истраживања су решавали математичке задатке и извештавали о својим стратегијама решавања. Способност вербалног закључивања мерена је тестом Drumcondra Verbal Reasoning Test (DVRT; Educational Research Centre, 1968). Овај тест је дизајниран да мери општу вербалну интелигенцију и развијен је као део велике студије о ефектима. То је стандардизован тест за децу узраста од 10 до 13 година са проценама поузданости у распону од 94 до 98 за различите узрасте. Одговарајућим тестовима су мерени и невербално расуђивање и просторна способност. Истраживање јасно показује да неке визуелно-просторне репрезентације промовишу успех у решавању проблема, а друге могу представљати препреку у решавању математичких проблема. Без обзира на просторну способност ученика, могло би бити могуће научити их продуктивним начинима просторног представљања проблемских информација. Закључак истраживача је да упућивање ученика да покушају да "визуализују" математичке проблеме вероватно неће бити успешно. Они тврде да уместо тога настава треба да подстакне ученике да конструишу просторне репрезентације односа између објеката у проблему и да их упозори да не представљају небитне сликовне детаље, јер је употреба шематских просторних приказа повезана са успехом у решавању математичких задатака, док је употреба сликовних просторних приказа у негативној корелацији са успехом у решавању.

Склоност ка необузданом пропорционалном моделовању показала се широко распрострањеном појавом, која утиче на многе ученике различитих узраста и у различитим врстама експерименталних окружења и веома је отпорна на промене. Де Блок и сарадници (De Block et al., 2003) су своју студију фокусирали на две нове експерименталне манипулације за које се очекивало да ће довести до значајног повећања успеха ученика у представљању и решавању ове врсте непропорционалних геометријских проблема. Прво је контекст самог проблема тј. текст задатка да буде привлачан, занимљив ученицима. Друго је да цртежи и дијаграми могу побољшати способност представљања и самог решавања проблема. Циљ ове студије је био да се испита утицај аутентичних контекста и самостално израђених графичких приказа на, како наводе истраживачи, добро документовану склоност ученика да неправилно примењују линеарни модел за представљање и решавање

непропорционалних текстуалних задатака о површини и запремини. Тестиране су различите експерименталне групе ученика, 152 ученика осмог разреда узраста 13-14 година и 161 ученик десетог разреда узраста 15-16 година. Тест садржи шест текстуалних задатака и то два пропорционална и четири непропорционална о односима између дужина, површина и запремина различитих типова праволинијских и неправолинијских фигура. Ученици су подељени у четири групе и свака група је добила своју верзију теста: проблеми давани у или ван аутентичног контекста и окружења и са или без интегрисане инструкције за цртање. Групе за које је планиран био тест са задацима у аутентичном контексту гледале су видео материјали из књиге "Гуливерова путовања" (све дужине 12 пута мање) и сви задаци на тесту су им били за то везани. Групе за које је био планиран тест са задацима ван аутентичног контекста на тесту су решавали класичне задатке као из уџбеника. Групе са цртежом имале су у задацима дат цртеж геометријског објекта који је уведен у задатак и затражено је од ученика да допуне цртеж тако што ће поред нацртати умањену копију користећи задату размеру. Ни експлицитно упућивање ученика да направе скицу или цртеж проблемске ситуације пре израчунавања одговора, нити давање готових цртежа оригинала и увећане фигуре није имало благотворног утицаја на перформансе ученика. Детаљном анализом белешки на листовима за рад, истраживачи су приметили да су ученици често игнорисали упутства за израду цртежа, па чак и дате цртеже. Ипак, они ученици који су стварно користили дате цртеже били су успешнији у откривању нетачности стереотипног, линеарног пропорционалног резоновања и проналажењу тачног решења за непропорционалне ставке. Истраживачи истичу да се због тога што поспешује планирано решење задатка и зато што се може користити и за тумачење и проверу одговора, прављење цртежа или дијаграма може генерално сматрати веома корисним и успешним когнитивним средством у решавању математичког проблема.

Нг и Ли (Ng, Lee, 2005) су у својим истраживањима анализирали сингапурски модел правоугаоника који представља неку врсту когнитивно-визуелног алата посебно при савладавању алгебарских садржаја у нижим разредима основне школе. Истраживање које је тема њиховог рада спроведено је 2003. године. Узорак истраживања чини 151 ученик узраста 10-11 година из пет основних школа. Од ученика је затражено да користе модел правоугаоника да одговоре на текстуалне задатке. Сваки ученик је урадио три паралелне верзије теста из математике. У свакој верзији од ученика је затражено да реше десет текстуалних задатака градацијски тежих користећи 1) модел правоугаоника, 2) било коју методу или 3) било коју методу осим модела правоугаоника. Стопа одговора деце на проблеме од задатка број 6 до задатка број 10 је ниска, па су разматрани одговори само на првих 5 задатака. Један од разлога за ту ниску стопу је што за те задатке треба више од једног цртежа модела. Најуспешније је коришћен модел правоугаоника код аритметичких текстуалних задатака. Код алгебарских текстуалних задатака стопа успеха је опала од текстуалног задатка где је природа односа била хомогена, укључујући две адитивне везе, до оних који укључују нехомогене односе. Ученичке грешке су груписане око релационих фраза као што су "више од", "мање од" и "n пута више од". Ученици који су користили модел правоугаоника за решавање текстуалних здатака који укључују разломке показали су да имају супериорно знање о томе како визуелизовати проблем. Ова студија показује да, иако деца могу да третирају модел правоугаоника као алгоритам, то није алгоритам научен напамет који треба да замени друге алгоритме који се уче напамет за решавање текстуалних проблема. Напротив, то је хеуристика решавања проблема која захтева од деце

да размисле о томе како могу да представе информације описане у задацима, прво у смислу цртежа, а затим као серије аритметичких једначина. Ова уметност представљања прво се мора научити, али је онда одговорност деце да ли ће или не одлучити да ефикасно користе ову хеуристику.

Исти аутори, Нг и Ли (Ng, Lee, 2009) објавили су још један рад који анализира исто истраживање спроведено 2003. године, али овај пут поред дечије примене модела правоугаоника анализирана је и друга студија која испитује и перцепцију наставника. Испитаници у тој другој студији су били 4 наставника представника одељења, главни наставници одељења, и 14 наставника математике из четири од пет школа чији ученици су учествовали у првој поменутој студији, 151 ученик петог разреда. Наставници су решавали истих 10 задатака као и ђаци, али је од њих затражено да задатке на тесту решавају искључиво моделом правоугаоника. Интервјуисани су главни наставници и по један представник наставника из сваке школе. Одговарали су на два питања: Који су то важни детаљи на које треба обратити пажњу приликом цртања модела правоугаоника за дати математички проблем? и Како научити децу да одређују вредност непознате јединице ако их не учимо да конструишу нити да трансформишу једначине? Свака сесија је снимљена на аудио снимку и трајала је око сат времена. Као одговор на прво питање наставници су објаснили да се при цртању модела мора водити рачуна да цео цртеж модела буде смислен, да дужине правоугаоника буду одговарајуће и пропорционалне. Одговор на друго питање био је да све познате информације из задатка треба да буду забележене на моделу, а да се за идентификацију непознатих вредности које треба проценити користе упитници.

Истраживање које су реализовали Поланд и Оџерс (Poland, Oers, 2007), такође на узорку деце у раном детињству, узраста од пет до шест година, испитивало је да ли увођење шематизације у том узрасту даје боље исходе учења каснијих математичких садржаја, оних које уче са седам година. Коришћена је лонгитудинална, квантитативна студија са квази-експерименталним дизајном у којој је експериментална група била изложена активностима шематизације и активно у њима учествовала кроз игру током једне године. У истраживању су учествовали ученици из три холандске основне школе. Експерименталну групу чинило је 75 ученика, а контролну 58 ученика. Дошло се до закључка да су ученици експерименталне групе показали значајно боље резултате у шематизацији и математичким постигнућима. Претест је био тест елементарног разумевања бројева. Тест шематизације је имао и три питања, а одговори ученика су бележени као видео-снимци. Занимљиво је да се за посттест користио CITO тест, холандски стандардизовани тест који мери математичке способности деце упоређивањем резултата са просечним резултатом теста у Холандији. Истраживање је показало да су деца која су користила шематизацију постигла значајно боље резултате у решавању сложених математичких задатака, нарочито оних који захтевају разумевање односа између бројева. Ово истраживање наглашава важност увођења шематизације у наставни процес.

Студију која испитује серију дечијих цртежа (“Нацртај за математичке задатке”) објавили су Еденс и Потер (Edens, Potter, 2007). Они су покушали да утврде однос између просторног разумевања ученика и решавања математичких проблема. Ученички цртежи су подељени у две категорије: шематске и нешематске. Шематским цртежом се сматра цртеж који укључује пропорционалне детаље, а нешематски је онај без пропорционалних детаља. У оквиру овог истраживања уметничка учионица је важан контекст за развијање просторног разумевања и способности пропорционалног мишљења ученика повезаних са

уметничким и математичким способностима. Истраживачи предлажу и специфичне стратегије за јачање заједничких напора стручњака за уметност и њихових колега да интегришу смислене математички засноване активности цртања. Истраживање је спроведено на часовима ликовне уметности на узорку од 214 ученика четвртог и петог разреда основне школе (101 ученик четвртог и 113 ученика петог разреда). Сврха студије је била да се испита инструментална употреба неколико задатака цртања у вези са решавањем математичких проблема. Анализиран је однос нивоа просторног разумевања и употребе шаматских цртежа за решавање математичких задатака. За процену нивоа просторног разумевања примењене су Кејсове (Case, 1985) централне концептуалне структуре фокусиране на логичко-научно мишљење. Кејс је водећи теоретичар когнитивног развоја у неопијажевском стилу, пружа другачији објектив за разматрање начина на које се дечији цртежи из учионице уметности могу користити да би се разумело како то дете "размишља просторно". Ученици су добили задатке за цртање и неколико задатака из математике. У оквиру математичких задатака ученици су правили цртеже који су им помогли у решавању. Примећено је да су ниво просторног разумевања и коришћење шематских цртежа били значајно повезани са перформансама решавања проблема.

Активност ученика при конструисању цртежа показала се као значајна за разумевање и решавање проблемских текстуалних математичких задатака, а анализирана је у истраживању Тервела и сарадника (Terwela et al., 2009). Узорак истраживања било је десет одељења од укупно 238 ученика петог разреда основних школа у Холандији, то су деца узраста 10-11 година. У истраживању је учествовало и десет наставника који предају у тим одељењима. У експерименталној групи у којој је био 121 ученик уз инструкције од стране наставника ученици су заједнички конструисали репрезентације као алат за учење процената и графикона. Деца из експерименталне групе надмашила су децу из контролне која су користила готове репрезентације на посттесту који је проверавао трансфер знања, односно способност коришћења наученог у новим ситуацијама. У оквиру експерименталне групе примећен је напредак како ученика са високим тако и оних са нижим постигнућима. Ова студија показује да су деца која уче да дизајнирају сопствене репрезентације уз помоћ вршњака и под вођством наставника у бољој позицији да разумеју слике, графиконе и моделе. Они су успешнији у решавању нових сложених математичких задатака. Овим истраживањем се посебно истиче значај дизајнирања сопствених репрезентација од стране ученика за трансфер учења, ученици се боље сналазе у новим проблемским ситуацијама користећи научено.

Студија чији су аутори Ахмада и сарадници (Ahmada et al., 2010) испитивала је употребу визуелних представа које су правиле велике потешкоће у већем броју математичких задатака. Узорак истраживања је чинио 381 ученик четвртог разреда из осам школа. За инструмент је коришћен тест са 15 текстуалних задатака (The Mathematical Processing Instrument (MPI)) аутора Хегарти и Козхевникова (Hegarty and Kozhevnikov, 1999) , наведен је у њиховом раду раније поменутом. Резултати су показали да је мање од два процента задатака решено помоћу сликовног приказа, а већина ученика је радије користила шематска решења. Истраживачка питања која су навели истраживачи ове студије била су следећа: Колики је ниво постигнућа у решавању математичких текстуалних задатака међу ученицима четвртог разреда?, Коју стратегију визуелизације користе ученици четвртог разреда у покушају решавања математичких задатака?, Каква је веза између врсте стратегије визуелизације коју ученици користе у решавању текстуалних

задатака и њиховог математичког постигнућа? Закључили су да је преференција ученика у визуелизацији математичких текстуалних проблема шематска, а не сликовна или комбинација сликовног и шематског. Преференције ученика углавном зависе од тога шта их је наставник научио на часу.

Иако се употреба модела сматра једном од најефикаснијих стратегија за решавање проблема, у више образовних истраживања примећено је да ученицима недостаје спонтаност у коришћењу модела чак и када наставници екстензивно користе моделе у упутствима и настави. Студија Уесаке и сарадника (Uesaka et al., 2010) је истраживање ефикасности вербалног охрабривања и праксе у цртању модела, као додатак типичним часовима математике, за промовисање спонтане употребе модела код ученика када покушавају да реше проблеме. У истраживању је учествовало 86 ученика осмог разреда који су били распоређени у једну од четири наставне групе: прва група је на часовима математике имала вербално охрабривање и праксу цртања модела од стране наставника (24 ученика), друга група била је изложена само вербалном охрабривању (19 ученика), трећа само пракси у цртању модела (21 ученик), а четврта је имала типичну наставу без промена и представљала контролну групу од 22 ученика. Највеће побољшање у спонтаној употреби модела примећено је у првој групи. Овај налаз сугерише да је за промовисање спонтаности у коришћењу модела од стране ученика важно помоћи ученицима да увиде вредност употребе модела као и развију процедурално знање у коришћењу модела. Перцепција ученика о ефикасности стратегије утиче на употребу те стратегије. Тако је у овој студији као део интервенције укључено охрабрење које има за циљ да побољша перцепцију ученика о ефикасности коришћења модела, а да би се развиле вештине ученика у конструисању модела пружена им је могућност да стварно конструишу и користе моделе као алате за решавање проблема и то се чинило кључним. У експерименту су коришћене три категорије математичких задатака. Прву категорију чине "проблеми са сликом", за које је ефикасно решавање конструисање механичке или геометријске илустрације. Другу категорију чине "проблеми са моделом правоугаоника", за које се решавање олакшава коришћењем модела правоугаоника који се користи за представљање важних величина, популарно у јапанским образовним окружењима. Трећу категорију чинили су "табеларни проблеми", за које се црта табела која приказује односе између величина. Те три категорије задатака коришћене су током првог, другог и трећег дана наставе, а ученици су решавали по три задатка из додељене категорије. Експериментална настава је организована и обезбеђена током пет дана на Универзитету у Токију. Свакодневне сесије су трајале око 50 минута. Анализа анкета након наставе показала је да је вербално охрабрење које је дао наставник побољшало перцепцију ефикасности модела, а анализа квалитета модела произведених у сесији након наставе показала је да је пракса цртања модела побољшала способности конструисања модела.

Истраживање које у фокусу има развијање стратегија решавања текстуалних задатака са нагласком на улогу визуелних репрезентација у математичком моделовању је истраживање које су реализовали Цикош и сарадници (Csíkos et al., 2011). У експерименту је учествовало пет експерименталних одељења од укупно 106 ученика и шест контролних одељења од укупно 138 ученика трећег разреда узраста 9-10 година. У оквиру експерименталног програма обрађено је 20 лекција са 73 текстуална задатка. Претест и посттест састојали су се од два теста, тест аритметичких вештина и тест текстуалних задатака. Тест текстуалних задатака је уз шест текстуалних задатака садржао и питања која

се односе на ставове ученика и циљеве учења. Обзиром да је циљ експеримента био помагање ученицима да стекну свест о улози и значају израде цртежа који се односе на текстуалне математичке задатаке, наставници су подстицали ученике да цртају чак и у случају најједноставнијих или наизглед једноставних задатака. Такође је мењана пракса у учионици тако што су наставници замољени да користе технику размишљања наглас у неким од задатака како би демонстрирали могуће кораке у процесу решавања текстуалних проблема, а на неким часовима су ученици радили у хетерогеним групама од по пет до шест ученика и заједно конструисали цртеже. Како је контролна група на претесту односно почетку периода интервенције имала значајну предност и у аритметичкој вештини и у тесту текстуалних задатака, успех експеримента је у томе што на посттесту није било значајне резлике у постигнућу експерименталне и контролне групе. Спроведени програм је био успешан у томе да су ученици експерименталне групе били свеснији значаја израде цртежа за математичке текстуалне задатке.

Поред истраживања у којима се истиче значај визуелних репрезентација које су креирали ученици у истраживању Цанкој и Оздер (Cankoy, Özder, 2011) дошло се до закључка да и понуђен визуелни приказ математичког проблема може бити од помоћи ученицима. Њихова студија имала је за циљ да испита учинак решавања проблема ученика петог разреда на математичким текстуалним задацима у познатом и непознатом контексту са или без визуелних репрезентација. У истраживању је учествовало 867 ученика петог разреда из Турске. Тест који су ученици решавали састојао се од тридесет текстуалних задатака и то шест у познатом контексту, оперативни задаци као из уџбеника, а остали су задаци у непознатом контексту који се могу решити у два корака, множењем праћеним сабирањем или одузимањем. Ученици су показали боље перформансе у решавању познатих текстуалних задатака, него у решавању упоредивих непознатих текстуалних задатака. Резултати су такође показали да је присуство визуелних представа у текстуалним задацима снажно утицало на перформансе ученика у решавању проблема на позитиван начин. Примећено је да визуелни прикази много доприносе успешности решавања проблема, посебно када је контекст текстуалног проблема непознат.

Колико је у настави математике значајан и сам стил наставника у вођењу и осмишљавању наставног процеса показује студија Гулера и Цилтаса (Güler, Çiltaş, 2011). Та студија је имала за циљ да утврди однос између нивоа употребе визуелне репрезентације наставника математике у основним школама у решавању задатака који не укључују фигуру, слику, графички и сличан приказ и нивоа употребе визуелне репрезентације код њихових ученика у сличним задацима. У истраживању је учествовало 6 наставника и 121 ученик шестог разреда којима су ови наставници предавали. У студији је коришћено 6 питања из раније поменутог The Mathematical Processing Instruments-MPI теста који се састоји од 15 питања који су развили Хегарти и Козхевников (Hegarty, Kozhevnikov, 1999) и упитник Ликертовог типа који се састоји од 14 питања. Утврђена је позитивна веза између нивоа употребе визуелне репрезентације наставника и ученика у решавању математичких проблема. Такође је утврђено да су ученици чији наставници користе визуелне представе често успешнији у решавању проблема и да имају позитивна уверења о употреби визуелних представа у решавању текстуалних математичких задатака. У процесу решавања текстуалних проблема много је већи фокус на концептуално знање, јер ученик треба да прође кроз когнитивни процес као што је разумевање проблемске реченице, одабир потребних података за решење, избор одговарајућег плана за решење,

одговор на проблем и одлучивање да ли је тај одговор разуман или не, проширивање проблема и предлагање алтернатива је од суштинског значаја. Поред ученика који су решавали задатке из MPI теста и од наставника је затражено да решавају задатке на MPI тесту, али на исти начин као што то раде у учионици за сличне задатке. Упитник Ликертовог типа је коришћен за четири различита мерења. Прво је спроведено са циљем утврђивања уверења ученика у корисност употребе визуелних представа у процесу решавања текстуалних задатака; друго је усмерено на утврђивање тренутних знања и уверења ученика о томе како настају визуелне представе у решавању текстуалних математичких задатака; треће је имало за циљ да утврди да ли наставници довољно јасно користе визуелне представе у решавању текстуалних математичких задатака на својим предавањима математике, а последње мерење је извршено са циљем да се утврди да ли ученици преферирају визуелне представе које стварају њихови наставници у решавању текстуалних задатака док решавају сличне математичке задатке.

Истраживање о ефектима модела и контекстуалних илустрација на решавање тригонометријских проблема објавили су у свом раду Купер и Алибали (Cooper, Alibali, 2012). Уџбеници математике користе широк спектар визуелних приказа, укључујући моделе, табеле, графиконе, украсне слике и фотографије. С обзиром на честу употребу уџбеника од стране ученика и велики број визуелних представа у овим уџбеницима, разумевање како различите врсте визуелних представа утичу на решавање проблема и учење је од кључног значаја. Узорак истраживања обухватио је 93 студента. Сваки учесник је добио четири задатка: први у ком је присутан и модел и илустрација; други у ком је присутан само модел; трећи у ком је присутна само илустрација и четврти без модела и без илустрације само текст задатка. Након што су завршили са решавањем задатака, оценили су колико је сваки проблем тежак, колико је јасан и колико би били вољни да раде више таквих проблема. На крају, учесници су попунили упитник о свом ставу према математици, својим математичким способностима и свом математичком образовању. Модели су помогли свим учесницима, али ефекат контекстуалних илустрација зависио је од порекла студената, јер су међу учесницима неки били претходно школовани у САД-у, а неки у азијским замљама.

Аутор истраживања које тражи одговор на питање "Како се решавање математичких проблема може предавати ученицима узраста од осам година?" је Нивоудт (Nieuwoudt, 2015). У оквиру овог истраживања ученици су прво попуњавали упитник у вези са својим знањем о решавању задатака из математике, ставовима према решавању проблема као и искуствима у решавању задатака. Одговори ученика на том упитнику су открили општа негативна уверења о решавању проблемских задатака као и недостатак знања о томе шта то решавање у математици подразумева. Наставник је затим укључио ученике у програм учења решавања различитих врста математичких проблема кроз рад у кооперативним групама од по шест ученика. Групе су редовно учествовале у дискусијама о различитим стратегијама које су користиле за решавање одређеног проблема и успевале су да формулишу генерички модел решавања који би могли назвати својим и ефикасно су га користили за решавање и других различитих математичких проблема. Решавајући проблемске задатке ученици су користили визуелизацију као један од корака у моделу. Метода коју је истраживач користио је метода квалитативног истраживања путем студије случаја. У периоду од осам месеци све наставне теме из математике предаване су кроз решавање задатака на овај начин.

Бакар и сарадници (Bakar et al., 2016) су у свом раду објавили студију која је део већег пројекта који анализира разноликост и употребу математичких репрезентација од стране шестогодишњака у њиховој првој години школовања у Малезији. Сврха ове студије била је да се истражи сколоност деце према цртању у математици, врсте цртежа и начин на који су деца користила цртеж у решавању проблема. Деца нису посебно учена како да цртају, него су била подстакнута да креирају и користе сопствене цртеже за решавање задатака са сабирањем. Одабрано је шесторо деце, различитих нивоа раног математичког постигнућа из једног одељења. Истраживач је током студије радио само са овом групом деце, а наставник са остатком одељења. У периоду од пет недеља истраживач их је уводио у процес додавања, односно сабирања, кроз моделовање коришћењем различитих манипулатива. Позив на израду цртежа ради решавања задатака који се односе на сабирање резултирао је стварањем две врсте цртежа: пиктографског и иконичког. Пиктографски цртеж има реалистичне приказе објеката наведених у задатку, а иконички садржи линије и једноставније облике за представљање потребних објеката. Без обзира на врсту, пиктографски или иконички, цртеж је допринео успешности процеса решавања проблема. Он је деци омогућио да моделирају проблемску ситуацију, а затим га искористе као алат за бројање како би дошли до одговора. Налази ове студије подржавају предност коришћења цртежа при решавању проблема, али истичу индивидуалне разлике у раним дечијим покушајима да користе математичко цртање. Такође, уочено је да прелазак на цртеж као математичку репрезентацију у првој години школовања није природан и спонтан, већ захтева намерну педагошку активност од стране наставника.

У својој докторској дисертацији Костић (Kostić, 2017) је проучавала ефекте примене когнитивно-визуелног приступа при обради наставних садржаја који се односе на функције и њихову примену. У свом истраживању користила је иновативне наставне материјале и рачунарску технологију. Ауторка је осмислила и креирала оргиналне дидактичко-методичке моделе помоћу којих је реализовала наставне садржаје из области математичке анализе (функције, изводи функције), проблема смеше (мешање раствора) и линеарне функције и њене примене на решавање проблема (проблеми из алгебре, физике и реалног окружења). Костић је спровела емпиријско истраживање у оквиру ког је реализовала пет педагошких експеримената, а когнитивно-визуелни приступ је имплементирала у средњошколску и високошколску наставу математике. Закључила је да примена когнитивно-визуелног приступа који је заснован на графичком и динамичком представљању функције у презентовању математичких садржаја и решавању проблема у рачунарском окружењу значајно и позитивно утиче на квалитет знања ученика, односно студената и разумевање наставних садржаја из области функција, као и њихове примене у решавању проблема.

Колико је значајан тип самог цртежа у визуелној репрезентацији математичког проблема истраживали су Реленсман и сардници (Rellensmann et al., 2017). Њихов чланак извештава о резултатима квантитативне анализе која је примењена да се истраже улоге које стратешко знање о цртежу и тачност различитих типова цртежа играју у перформансама математичког моделирања. У истраживању је учествовао шездесет и један ученик деветог и десетог разреда узраста између 15 и 16 година. Они су замољени да направе цртеж ситуације описане у задатку (ситуациони цртеж) и цртеж математичког модела описаног у задатку (математички цртеж) пре решавања задатка моделирања. Тест коришћен у истраживању садржао је пет задатака математичког моделирања и уз сваки по пет

понуђених цртежа. Ученици су бирали цртеж који сматрају најкориснијим за решавање проблема. За сваки задатак су поред осталих нетачних цртежа били приказани исправни ситуациони и математички цртеж. Да би била процењена тачност цртежа који су правили сами ученици и њихов учинак моделирања радили су и тест са осам задатака математичког моделирања који се могу решити помоћу Питагорине теореме. За сваки од тих осам задатака добили су инструкцију да нацртају ситуациони цртеж, математички цртеж и да реше задатак. Тачност ситуационог цртежа била је само посредно повезана са перформансом док је тачност математичког цртежа била снажно повезана са учинком ученика. Да би се побољшала способност ученика да ефикасно користе цртеже вежбање у учионици треба да ојача стратешко знање ученика о цртању и њихову компетенцију да креирају цртеже високе тачности. Ако ученици знају шта је цртеж од помоћи и како да конструишу и користе такав цртеж, већа је вероватноћа да ће направити одговарајући цртеж високе прецизности. То ће повећати њихове перформансе моделирања убудуће. Ученичке вештине цртања могу се унапредити пружањем подршке у настави и довољно вежбања у цртању.

Визуелна репрезентација у студији коју су објавили Утами и сарадници (Utami et al., 2019) представљена је као способност ученика да креирају геометријске цртеже како би разјаснили проблем и олакшали његово решавање. Ова студија имала је за циљ да идентификује способност визуелног представљања ученика у решавању задатака из геометрије. Примењена је дескриптивна квалитативна метода, а узорак су чинили 33 ученика осмог разреда. Подаци су прикупљени кроз тестове способности визуелног математичког репрезентовања и интервјуе. Анализа података је показала да 27,27% ученика има високу способност визуелног представљања, 33,33% имало је средњу визуелну заступљеност, а 39,40% ниску визуелну заступљеност. Закључено је да већина ученика има ниске способности визуелног представљања.

Коришћење више различитих репрезентација при решавању проблема анализирали су Милинковић и сарадници (Milinkovic et al., 2019). У свом раду истражују врсте репрезентација које користе једанаестогодишњаци са високим успехом у својој аргументацији у процесу решавања математичких задатака. У емпиријском истраживању испитиван је узорак од 109 једанаестогодишњака који су се пласирали и учествовали у финалном кругу републичког такмичења "Мислиша" из математике у Србији. У студији је анализиран подскуп од осам проблема у којима се од ученика експлицитно тражило објашњење. За тих осам задатака урађена је дескриптивна статистика. Анализирано је укупно 656 решења проблема. Резултати до којих су дошли истраживачи показују да су ученици користили и често комбиновали инвентивне иконичке и конвенционалне нумеричке, односно симболичке представе у својој аргументацији. Циљ рада је да скрене пажњу на значај проучавања различитих репрезентативних приступа ученика при решавању задатака. Постоји значајан однос између броја коришћених репрезентација и исправности решења. Ученици су често комбиновали различите представе у решавању задатака. У тим случајевима обично су почињали са сликовним приказом, па су се окренули вербалном и симболичком представљању. Коришћење сликовног приказа омогућило им је једноставније објашњење. Закључак је да успешни решавачи проблема конструишу знатно више репрезентација од неуспешних решавача проблема.

Утами је са другом групом сарадника (Utami et al., 2021) објавио и истраживање чија је сврха била да окарактерише ученике са визуелним стиловима учења способности

математичког представљања при решавању задатака који укључују односе и функције. У овој студији коришћен је квалитативни приступ. У истраживању је учествовало 34 ученика деветог разреда који су добили материјал о односима и функцијама као субјектима истраживања. Истраживачи су прикупили податке користећи као инструменте упитник који је класификовао стилове учења ученика, као и тестове вештина математичког представљања и интервјуе. Постоје три стила учења: аудитивни, визуелни и кинестетички и три аспекта математичког представљања: визуелни приказ у облику дијаграма, графикона, табела и слика; једначине, симболички или математички изрази; писане речи или текст. Визуелни ученици су у овом истраживању дефинисани као они који уче визуелно, посебно гледајући слике или дијаграме. Детаљно су анализирани одговори три визуелна ученика. Налази студије су показали да су ученици визуелног стила учења боље овладали способностима математичког представљања у визуелним аспектима, али им је недостајало сналажење у вербалним аспектима.

Барбоса и Вале (Barbosa, Vale, 2021) су у свом чланку говорили о значају визуелних модела у решавању проблема у оквиру скупа рационалних бројева. Да би ученици били математички компетентни и креативни морају бити способни не само да решавају традиционалне рачунске проблеме, већ и да користе моделе/визуелне репрезентације приликом решавања свих врста математичких задатака, укључујући и оне у којима визуелна компонента није евидентна. Ово је квалитативна студија заснована на дидактичком искуству у којој је учествовало 14 будућих наставника који су похађали курс *Дидактике математике* који је укључивао модул о решавању проблема са нагласком на визуелни приступ. Подаци су прикупљени посматрањем и писаним радом учесника. Закључак је да су будући наставници пре интервенције тежили да предност дају аналитичком приступу, а након наставног искуства почели су да вреднују визуелне приступе, што је довело до повећања продукције која укључује ову врсту решења. Дакле, визуелна решења се схватају као начин на који се математичке информације представљају и/или обрађују у почетном приступу проблему или током решавања проблема. Она укључују употребу различитих приказа визуелне природе као суштинског дела процеса долажења до решења. Ова студија је имала за циљ да анализира како наставници иницијалног образовања решавају проблем у оквиру рационалних бројева пре и после модула о решавању проблема који наглашава визуелне приступе. Традиционално, настава математике фаворизује аналитичке приступе, који се често сматрају главним или јединим могућим путем за решавање проблема. Наставници су решили пет задатака о рационалним бројевима пре и после модула интервенције о решавању проблема са акцентом на визуелне приступе. Визуелни приказ моделом правоугаоника дао је више самопоуздања учесницима као решавачима, али и будућим наставницима, јер су били потпуно уверени у моћ оваквог визуелног приступа да помогне у разумевању математике. Закључак је да наставник мора да има широк репертоар задатака које може предложити ученицима како би истакао неке од идеја о којима је било речи у овом чланку.

Прављење цртежа може помоћи ученицима да избегну и превазиђу потешкоће са којима се сусрећу приликом решавања проблема из стварног света или моделирања. Међутим, многи ученици, као што смо већ поменули, не праве цртеж спонтано. Студија коју су објавили Реленсман и његови сарадници (Rellensmann et al., 2022) дала је одговор на четири значајна питања: 1) Како ситуационе и математичке инструкције за цртање утичу на употребу цртежа код ученика и њихов просечни учинак моделирања у домену

геометрије? 2) Како је стратешко знање о цртању повезано са упутствима за цртање, употребом цртежа и просечним перформансама моделирања? 3) Како је употреба цртежа повезана са моделирањем специфичним за проблем перформансе? 4) Како тачност цртежа може објаснити однос између употребе цртежа и перформанси моделирања специфичних за проблем под инструктивним и спонтаним условима цртања?. Узорак истраживања је обухватио 74 ученика деветог и 58 ученика десетог разреда, дакле укупно 132 ученика. Ученици су насумично распоређени у експерименталне групе "са ситуационим (45 ученика) или математичким (46 ученика) упутствима за цртање", односно у контролну групу "без инструкција за цртање (41 ученик)". У експерименталним условима ученицима је дат огледни ситуациони или математички цртеж за један задатак моделовања, а инструкције током експеримента су дате написмено, да се направи ситуациони цртеж, односно да се направи математички цртеж, а затим да се реши сваки задати проблем моделирања. Ученицима је презентовано осам проблема из реалног света, након којих је сваки био праћен по једним ситуационим и једним математичким цртежом, то је укупно 16 задатака. За сваки проблем била су обезбеђена три цртежа. Цртежи који су достављани систематски су се разликовали у погледу њихове тачности у представљању објеката и односа и у мери у којој су у потпуности представљали бројеве из датог проблема. Од ученика је затражено да процене колико је сваки цртеж био од помоћи за решавање проблема из реалног света. Да би проценили перформансе моделирања ученика, од њих је на тесту затражено да раде на осам проблема моделирања који би се могли решити применом Питагорине теореме. За сваки проблем моделирања оцењивана је присутност односно одсуство једног или више цртежа. Вишеслојне анализе су показале да су математичка упутства за цртање имала позитиван укупни ефекат на перформансе, а ефекат се преносио коришћењем цртежа. Такође, стратешко знање о цртању имало је позитиван укупни ефекат на перформансе коришћењем цртежа.

Врло занимљиву студију објавили су Де Конинг и сарадници (de Koning et al., 2022). Они су тестирали ефикасност цртања и коришћења модела правоугаоника за текстуалне проблеме код којих релационе кључне речи у тексту самог проблема нису у складу са аритметичким операцијама неопходним за решавање истог. Седамдесет пет ученика петог разреда, узраста између 9 и 10 година, из три основне школе у Холандији решавало је конзистентне и недоследне текстуалне задатке, при чему су охрабривани да цртају модел правоугаоника. Ученици у школи у оквиру плана и програма наставе математике обрађују и користе модел правоугаоника. Тест је садржао 24 текстуална задатка и сваки тај текстуални проблем се састојао од три реченице. Прва реченица садржала је изражену вредност прве варијабле, друга реченица садржала је релациони исказ који изражава вредност друге варијабле у односу на прву, а трећа реченица тражила је од ученика да наведе вредност друге варијабле. У пола задатака (12 задатака) релациона кључна реч коришћена у другој реченици била је у складу са потребном математичком операцијом, док је у другој половини задатака релациона кључна реч била недоследна са потребном математичком операцијом. Сваки текстуални задатак је процењен по типу проблема (доследан/недоследан), перформансама (тачан/нетачан) и моделу правоугаоника (тачан/нетачан/без цртежа). Закључак је да је цртање модела правоугаоника повезано са повећаним перформансама и у конзистентним и неконзистентним текстуалним проблемима, али су најјаче предности цртања уочене за недоследне текстуалне проблеме. За недоследне текстуалне проблеме тачност модела правоугаоника је јасније била повезана

са перформансама него за конзистентне текстуалне проблеме. Цртање модела правоугаоника пружа ефикасну графичку подршку за решавање недоследних текстуалних проблемских задатака. Графичко представљање текстуалног задатка утиче на когнитивну репрезентацију проблемске ситуације, а самим тим и на математичку операцију коју сматра одговорном за текстуални проблем. Решавање без цртежа или цртање нетачног модела правоугаоника највише омета перформансе решавања текстуалног задатка у недоследним такстуалним проблемима.

Насрун и сарадници (Nasrun et al., 2023) су као инструмент у свом истраживању користили тест са преведеним задацима из сингапурских уџбеника. Њихова студија је имала за циљ да опише како ученици конструишу различите репрезентације у решавању текстуалних задатака. У истраживању су користили квалитативну дескриптивну методу, квалитативни приступ са дизајном студије случаја. Узорак је обухватио 75 ученика петог разреда узраста 10 – 11 година. Коришћени инструменти били су тест са текстуалним задацима и лист за интервју. Установљено је да ученици формирају три облика репрезентације: вербални, сликовни и симболички облик. Задаци за тест су преведени на индонежански, а то су задаци коришћени као задаци за решавање проблема у трећем и петом разреду основних школа у Сингапуру. Издвојена су два рада ученика за које је утврђено да решавају текстуалне задатке и проналазе тачан одговор коришћењем различитих приказа (усмено-писани-графички-симболички и вербално-писани-симболички-табела) и та два рада су анализирана.

II МЕТОДОЛОШКИ ОКВИР ИСТРАЖИВАЊА

1. ПРОБЛЕМ И ПРЕДМЕТ ИСТРАЖИВАЊА

Примарни циљ учења математике је оспособљавање ученика за примену математичких знања у решавању проблема. Међутим, бројне студије указују да ученици не развијају у потпуности ове компетенције и да на задацима у којима треба да их испоље постижу слабије резултате од очекиваних. Анализе међународних истраживања TIMSS (2011., 2015., 2019.) и PISA (2012., 2018., 2022.) показују да су постигнућа наших ученика испод просека, односно да ученици не умеју да примене стечена знања у решавању проблема реалног контекста. Поред тога, бројна истраживања (Novotna, Rogers, 2003; Boonen et al., 2013; Verschaffel et al., 2000; Novotna, Sarrazy, 2005; Dewolf et al., 2014; Edens, Potter, 2008; Elia et al., 2009; Van Dijk et al., 2003) истичу потребу да се унапреде компетенције ученика и развију код њих способности моделовања и стратегије решавања проблема, разумевања релацијских односа у задацима и прелаз са апстрактног на конкретно и обратно. Узимајући у обзир наведена сазнања, наша полазишта у раду усмерена су на изналажење модела учења који би поставио чврсту основу за развој компетенција ученика за решавање математичких проблема. Будући да је математика по својој природи апстрактна, у настави нижих разреда јавља се императив за увођењем визуелизације као примарног когнитивног оруђа које премошћује јаз између конкретног манипулисања објектима и апстрактног мишљења. Према Брунеровој теорији когнитивног развоја (Bruner, 1966), кључ успешног учења математике лежи у доследном преласку са енактивног на иконички и, коначно, симболички ниво представљања. Стога смо се определили да теоријски истражимо и емпиријски сагледамо ефекте когнитивно-визуелног приступа као методичке концепције која промовише визуелизацију као интегрални ментални процес који олакшава организацију знања. Посебан фокус стављамо на значај повезивања визуелних и симболичких репрезентација, сматрајући да управо њихова синергија омогућава ученику да визуелно моделира проблем пре него што га преточи у апстрактни математички језик (Arcavi, 2003). Овакав приступ омогућава дубље разумевање концепта и ефикаснији трансфер знања, чиме се значајно унапређује способност ученика да самостално проналазе путеве до решења комплексних задатака.

Проблем истраживања је развијање компетенција ученика млађих разреда основне школе за решавање математичких проблема коришћењем когнитивно-визуелног приступа. Намера овог истраживања је да се конципирају дидактичко-методички модели вишеструких репрезентација са обавезном визуелизацијом у оквиру наставних садржаја почетне математике и испита њихов утицај на постигнуће, развијеност способности коришћења визуелних модела и позитивне ставове ученика млађег школског узраста према решавању математичких проблема.

Наше полазиште је утемељено на неколико поставки. Прво, ученици млађих разреда основне школе налазе се на стадијуму конкретних операција, а математика захтева симболичко, апстрактно изражавање за које нису сви ученици спремни. Друго, настава мора бити заснована на реалним ситуацијама блиским ученику и треба обезбедити постепен прелазак са конкретног на апстрактно коришћењем разних модела. Треће, коришћење визуелних модела у процесу решавања проблема доприноси дубљем разумевању проблема, очигледном представљању односа у проблему, а то је пут од

проблема ка решењу, ка математизацији проблема и апстрактном, симболичком означавању.

Основна претпоставка когнитивно-визуелног приступа је коришћење когнитивне функције очигледности кроз визуелизацију задатака која обезбеђује да се организују информације дате у задатку. Важна је селекција значајних информација за решавање проблема и уочавање односа између познатих и непознатих објеката што захтева детаљну анализу текста задатка. Све наведене активности при формирању визуелног модела и поступног решавања задатака представљају подршку при математизацији и утичу на побољшање разумевања задатка од стране ученика и успешније решавање проблема у ком је критичан корак конструисање математичког израза или једначине на основу проблемске ситуације.

Имајући у виду све наведено *предмет* нашег *истраживања је теоријско и експериментално испитивање и проучавање ефеката и сврсисходности примене когнитивно-визуелног приступа подржаног моделовањем у развијању компетенција ученика за решавање математичких проблема.*

Савремена педагошка и психолошка истраживања истичу да је способност решавања проблема једна од кључних компетенција за формирање функционалног математичког знања, али да традиционални облици наставе ретко омогућавају ученицима развој дубљег разумевања, моделовања и математизације ситуација јер се фокусирају на алгоритамско решавање задатака. Управо зато ово истраживање доприноси премошћавању значајне теоријске и емпиријске празнине у нашој дидактичкој пракси.

Слаби резултати ученика у TIMSS и PISA тестирањима указују на то да систем образовања захтева промену приступа математичком образовању. Истраживање доприноси научном утемељавању једног могућег решења у унапређивању компетенција ученика за решавање проблема кроз структуиран приступ који подржава развој компетенција за решавање проблема, а тиме индиректно одговара на кључне захтеве међународних образовних стандарда. Овакви научни увиди значајни су за креирање наставних програма, унапређивање курикулума и подршку професионалном развоју наставника.

Научна вредност истраживања огледа се у томе што се добијени налази могу користити за развијање методичких смерница за наставнике; креирање наставних материјала заснованих на когнитивно-визуелном приступу; обликовање предлога за допуну планова наставе и учења који подржавају развој компетенција за решавање проблема.

Научни значај огледа се и у методолошком доприносу, јер истраживање развија и примењује експериментални модел наставе који обухвата: систематичну употребу вишеструких репрезентација, структурисано увођење визуелизације као обавезног корака у решавању проблема, педагошки дизајниране активности моделовања, валидне инструменте за процену ученичких постигнућа у решавању проблема.

Теоријски допринос истраживања огледа се у концептуалном развијању и прецизирању когнитивно-визуелног приступа као методичког оквира који интегрише

различите врсте репрезентација: конкретне, визуелне и симболичке у процесу решавања математичких проблема. У академској литератури већ постоје значајни увиди који указују на потешкоће ученика у преласку са конкретног на апстрактно, у разумевању релацијских односа или у математизацији ситуација. Међутим, мало је радова који нуде систематизован и емпиријски проверен модел наставе заснован на когнитивно-визуелним стратегијама.

Ово истраживање стога пружа нова теоријска полазишта о улози визуелних модела у активирању когнитивних механизама очигледности, селекције релевантних информација, структурирања односа и изградње модела решавања проблема. Развијени теоријски оквир може послужити као упориште будућим истраживањима, као основа за даље моделовање наставних приступа или за проширено испитивање трансфера знања на друге математичке садржаје.

Друштвени значај овог истраживања огледа се у томе да се организовањем наставних активности утиче на развијање сарадње и размену идеја које су значајне за решавање проблема и развој когнитивно-визуелних способности ученика. Ученик има могућност да на различите начине, кроз различите репрезентације приступа проблему и своје идеје размењује са друговима из одељења и учитељем. У различитим проблемским ситуацијама ученици разговарају, размењују идеје за различите репрезентације проблема и тако заједнички, прелазећи са једне на другу репрезентацију, постављају пут ка новим сазнањима. Кроз наведене активности ученици не усвајају неупотребљива и издвојена знања, већ развијају начин размишљања који ће им пружити прилику да увек трагају за новим могућностима и новим начинима решавања проблема.

2. ЦИЉ И ЗАДАЦИ ИСТРАЖИВАЊА

У савременој настави математике спроводе се иновације у различитим доменима као што су наставне методе, методичке трансформације садржаја који се изучавају, облик рада и средства. Приоритетан домен овог истраживања је методичка трансформација одабраних садржаја из аритметике и алгебре (рачунске операције у скупу природних бројева до 1000 и једначине и неједначине) који се обрађују у трећем разреду основне школе применом когнитивно-визуелног приступа заснованог на коришћењу вузуелизованог моделовања и у складу са достигнућима методике наставе математике, као и емпиријска евалуација креираног дидактичко-методичког модела за реализацију тих садржаја.

Циљ истраживања је утврдити ефекте примене когнитивно-визуелног приступа на развој компетенција ученика за решавање проблема у настави математике у млађим разредима основне школе.

Наведени циљ операционализоваћемо на следеће задатке истраживања:

1) Утврдити ефекте примене когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција ученика за решавање математичких проблема;
2) Утврдити ефекте примене когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција ученика за решавање проблема у области аритметике;
3) Утврдити ефекте примене когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција ученика за решавање проблема у области алгебре;
4) Утврдити ефекте примене когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција ученика за израду визуелних репрезентација проблема;
5) Утврдити ефекте примене когнитивно-визуелног приступа на развијање позитивних ставова ученика према решавању проблемских задатака, мотивацији за решавање проблемских задатака и коришћењу визуелних модела при решавању математичких проблема.

3. ХИПОТЕЗЕ ИСТРАЖИВАЊА

На основу предмета и циља истраживања долазимо и до формулације *опште хипотезе истраживања*: *Примена когнитивно-визуелног приступа доприноси развијању компетенција ученика да решавају проблеме.*

Полазећи од задатака истраживања постављамо *посебне хипотезе* путем којих ћемо проверити општу хипотезу истраживања:

1) Когнитивно-визуелни приступ доприноси развијању компетенција ученика за решавање математичких проблемских задатака;
2) Когнитивно-визуелни приступ доприноси развијању компетенција ученика за решавање проблема у области аритметике;
3) Когнитивно-визуелни приступ доприноси развијању компетенција ученика за решавање проблема у области алгебре;
4) Когнитивно-визуелни приступ доприноси развијању компетенција ученика за визуелизацију проблема;
5) Когнитивно-визуелни приступ доприноси развијању позитивних ставова ученика према решавању проблемских задатака, мотивацији за решавање проблемских задатака и коришћењу визуелних модела при решавању математичких проблема

4. ВАРИЈАБЛЕ ИСТРАЖИВАЊА

Варијабле, према функцији коју ће имати у раду, можемо поделити на зависне и независне варијабле.

Зависну варијаблу представљаће:

- компетенције ученика за решавање проблема изражене кроз успешност на тестовима пре и након реализације експерименталног програма на садржајима аритметике и алгебре у трећем разреду основне школе;

- компетенције ученика за визуелизацију проблема пре и након експерименталног програма;

- мишљења и ставови ученика о приступу који се мере после деловања експерименталног програма;

- мишљења и ставови учитеља о улози, значају и методичким вредностима когнитивно-визуелног приступа развоју компетенција ученика за решавање проблема.

Независну варијаблу представљаће:

- когнитивно-визуелни приступ изражен кроз идеју коришћења цртежа и модела при решавању проблема из аритметике и алгебре за трећи разред основне школе;

- оцена из математике постигнута на крају првог полугодишта трећег разреда основне школе: одличан (5), врло добар (4), добар (3), довољан (2) и недовољан (1);

- пол ученика.

5. УЗОРАК ИСТРАЖИВАЊА

Узорак истраживања чине ученици из популације ученика трећег разреда две основне школе са територије општине Бајина Башта. У питању је циљани репрезентативни узорак тј. ученици трећег разреда основних школа "Свети Сава" и "Рајак Павићевић". Узорак има елементе случајног, стратификованог и групног узорка. Случајан је јер смо случајним избором одабрали основне школе за експерименталну и контролну групу, стратификован јер нам је важна и варијабла оцена из математике и пол, а групни јер смо одабрали већ формиране групе ученика тј. одељења. Ученици прве наведене школе представљаће експерименталну групу (91 ученик), а ученици друге школе контролну групу (84 ученика) (Табела 1).

Табела 1. *Структура узорка ученика по школи и одељењу*

Експериментална група				Контролна група			
Школа	Одељење	N	%	Школа	Одељење	N	%
ОШ "Свети Сава"	III_1	25	14,3	ОШ "Рајак Павићевић"	III_1	18	10,3
	III_2	20	11,4		III_2	20	11,4
	III_3	20	11,4		III_3	21	12
	III_4	26	14,9		III_4	25	14,3
Укупно		91	52			84	48

Структура узорка ученика у односу на пол представљена је у Табели 2. Од укупно 175 ученика обе школе у експерименталној групи коју чини 91 ученик је 56% девојчица и 44% дечака, а у контролној од 84 ученика девојчица је 45,2% док дечака има 54,8%.

Табела 2. *Структура узорка ученика у односу на пол*

	Експериментална група		Контролна група		Укупно	
Пол	N	%	N	%	N	%
Дечак	40	44	46	54,8	86	49,1
Девојчица	51	56	38	45,2	89	50,9
Укупно	91	100	84	100	175	100

У Табели 3 представљена је структура узорка у односу на оцену из математике закључену на крају првог полугодишта. Примећујемо да је у контролној групи више од половине ученика (56%) оцењено као *одличан (5)*, док је у експерименталној групи таквих ученика скоро па дупло мање (29%). Оцењених као *врло добар (4)* је приближно исти проценат, у контролној групи 28,6%, а у експерименталној 35,2%. Што се тиче оцене *добар (3)* у експерименталној групи их је 20,9%, а у контролној скоро дупло мање 10,7%. Оцену *довољан (2)* у експерименатној групи има 14,3% ученика што је много више него 4,8% ученика у контролној групи. Велике разлике у оценама из математике ученика експерименталне и контролне групе узете су у обзир при уједначавању група.

Табела 3. *Структура узорка ученика у односу на оцену из математике*

	Експериментална група		Контролна група		Укупно	
Оцена	N	%	N	%	N	%
Довољан (2)	13	14,3	4	4,8	17	9,7
Добар (3)	19	20,9	9	10,7	28	16
Врло добар (4)	32	35,2	24	28,6	56	32
Одличан (5)	27	29,7	47	56	74	42,3
Укупно	91	100	84	100	175	100

Групе су уједначене у погледу броја, пола и успеха ученика и уједначене су у погледу социјалног статуса ученика. Одлучили смо да узорак чине ученици трећег разреда јер су за овај разред Наставним планом и програмом предвиђене тематске целине значајне за наше истраживање: Сабирање и одузимање бројева до 1000, Множење и дељење бројева до 1000 и Једначине и неједначине. Уједначеност група контролисали смо и анализом коваријансе. Применом анализе коваријансе могуће је упоређивање резултата финалног теста експерименталне и контролне групе, пошто се у обзир узима одређена регресија која постоји на резултатима иницијалног мерења.

Узорак ученика за потребе скалирања чине ученици трећег разреда који су учествовали у експерименталном програму.

Узорак учитеља за фокус групу чине учитељи који су учествовали у реализацији осмишљеног методичког приступа, односно учитељи који предају у одељењима ученика експерименталне групе.

6. МЕТОДЕ, ТЕХНИКЕ И ИНСТРУМЕНТИ ИСТРАЖИВАЊА

У педагошком истраживању користили смо методу теоријске анализе, дескриптивну, експерименталну и статистичку методу.

Методу теоријске анализе – користили смо за преглед, анализу и проучавање теоријских поставки које се односе на проблематику истраживања.

Дескриптивну методу – применили смо приликом утврђивања теоријских основа и практичних решења предмета истраживања, анализе садржаја програма математике, при обради података, интерпретацији резултата истраживања и извођењу закључака.

Експерименталну методу – користили смо да утврдимо каузалну везу између примене когнитивно-визуелног приступа и унапређивања компетенција ученика за решавање математичких проблема. Реализовали смо је по моделу експеримента са паралелним групама. Прво смо обавили иницијално тестирање ученика обе групе, експерименталне и контролне, како бисмо утврдили иницијални ниво компетенција за решавање проблемских задатака. Након тога смо применили експериментални програм. Обе групе су током истраживања радиле по истом Програму наставе и учења за трећи разред основне школе и користиле су исти уџбеник, чиме је обезбеђена уједначеност садржаја. Разлика се огледала искључиво у дидактичко-методичком приступу током обраде и утврђивања наставних тема: *Сабирање и одузимање бројева до 1000*, *Множење и дељење бројева до 1000*, *Једначине и неједначине*. Експериментални програм садржао је 20 часова који су конципирани према принципима когнитивно-визуелног приступа решавању проблема (Прилог 5) и на тим часовима ученици су обучавани да апстрактне математичке релације трансформишу у визуелне моделе и приликом решавања проблема користе моделе засноване на визуалуацији. Коришћење слободног дечијег цртежа подстицано је као примарна фаза разумевања проблема, где су ученици самостално графички представљали елементе задатка пре превођења у нумерички израз. Модел ваге примењиван је у решавању проблема у оквиру наставне теме *Једначине и неједначине* ради визуелизације концепта равнотеже и проналажења непознате вредности. Сингапурски модел правоугаоника коришћен је за представљање адитивних и мултипликативних структура и односа део–целина. Ученици контролне групе исте наставне садржаје реализовали су на стандардни начин. Под овим се подразумева традиционални приступу у настави математике који се доминантно ослања на вербално-текстуалну анализу задатака и преурањено превођење текста задатка у математичке операције што представља алгоритамски приступ, без систематског и намерног обучавања ученика да користе специфичне визуелне алате и репрезентације. Визуелизација је у овој групи коришћена спорадично, само у мери у којој је предвиђена основним илустрацијама у уџбенику. Након обрађених садржаја по два модалитета обављено је финално тестирање ученика обе групе.

Статистичку методу – користили смо за обраду и анализу података које смо добили експерименталним истраживањем. Статистичка метода обухвата прикупљање, груписање и статистичку обраду података, анализу статистичких показатеља, тестирање хипотеза и статистичко закључивање.

У истраживању је примењена квантитативна и квалитативна анализа података добијених коришћењем истраживачких техника:

- *тестирања*
- *скалирања*
- *интервјуисања* ,

уз инструменте: *тест, скала ставова* и *интервју*.

Технику тестирања користили смо за прикупљање података у експерименталном делу истраживања. За потребе тестирања израђена су два теста: *иницијални* (Прилог 1) и *финални* (Прилог 2). Тестирања су обављена у одељењима и трајала су по два школска часа. Пре примене тестова обављено је њихово пилотирање и стандардизација. Тестови су пилотирани на узорку од 60 ученика трећег разреда који су сличних карактеристика као и ученици са којима је рађено истраживање. Пилотиран је и иницијални и финални тест и након анализе, у сарадњи са ментором, урађене корекције како би се отклонили уочени недостаци. Иницијални и финални тест су тестови еквивалентне форме, имају исти број задатака истог типа. Оба теста имају два субтеста. Први субтест садржи 6 задатака којима испитујемо развијеност компетенција ученика за решавање проблема у области аритметике. То су задаци у којима визуелизација није тек помоћно средство, већ суштинска когнитивна стратегија која омогућава очигледност релација. Ученик не решава проблем сабирања или дељења, већ проблем просторне и логичке организације, где математичка операција долази тек као финална потврда већ изграђеног и визуелно провереног модела. Други субтест има 8 задатака којима испитујемо развијеност компетенција ученика за решавање проблема у области алгебре. У другом субтесту два задатка проверавају примену моделовања на ваги (седми и осми задатак на тесту), два задатка проверавају разумевање једнакости (девети и десети задатака на тесту) и четири задатка садрже релационе кључне речи у тексту самог проблема које јесу/нису у складу са аритметичким операцијама неопходним за решавање истог (једанаести, дванаести, тринаести и четрнаести задатак на тесту). Сваки задатак из теста вреднован је према јединственом кључу. Задаци на оба теста имали су за циљ да испитају како способност ученика да користи визуелне моделе у представљању односа и релација у проблемима као помоћ за решавање проблема утиче на развијеност компетенције ученика за решавање математичких проблема. Зато смо вредновали и визуелизацију задатака, односно да ли је ученик при решавању користио визуелну репрезентацију и ако јесте да ли је коришћени цртеж шематски или сликовни.

Скалирањем уз коришћење *скале ставова* испитани су ставови ученика експерименталне групе о решавању проблема когнитивно-визуелним приступом, мотивацији за решавање проблема као и о визуелизацији и њеној примени при решавању. Ставови ученика представљају важан део идентитета ученика, а у литератури ставови представљају научне предиспозиције или тенденције појединца да одговори позитивно или негативно на неку ситуацију, предмет, концепт или неку другу особу (Vidić, 2016). Скала ставова коју смо користили садржи 14 ставова са понуђеном четворостепеном (“не”, “најчешће не”, “углавном да”, “да”) скалом на којој ученици бележе свој одговор (Прилог 3). Намера скале је да се испитају ставови, навике и самопроцењена ефикасност ученика у решавању математичких проблемских задатака кроз примену когнитивно-визуелног

приступа. Она показује како ученици "виде" математички проблем и у којој мери користе цртеж као мост између текста проблема и његовог математичког решења. Питања на скали могу се груписати у четири групе, на основу онога што мере:

- прва група питања (питања 1, 6, 7, 8) мери афективни однос и мотивацију, односно мери ниво самопоуздања, упорност и евентуални страх/отпор према проблемским задацима (нпр. да ли их воле више од рачунских задатака);
- друга група питања (питања 2, 4, 5, 9) мери метакогнитивне стратегије и самосталност, односно мери начин на који ученик приступа проблему (читање више пута), степен зависности од туђе помоћи и склоност ка одустајању када се наиђе на препреку;
- трећа група питања (питања 3, 10, 11, 14) мери примену визуелизације, когнитивно-визуелни аспект, односно мери колико ученици самоиницијативно користе цртеж, да ли препознају цртеж као олакшицу и да ли верују да поседују вештину да текст преточе у слику;
- четврта група питања мери утицај наставног контекста (питања 12, 13). Мери перцепцију ученика о томе колико модел учитеља и његови савети подстичу коришћење визуелних приказа.

Интервјуисање је примењено у фокус групи учитеља експерименталне групе. Коришћен је припремљен *интервју* који садржи 4 питања за покретање групне дискусије кроз коју су учитељи изнели своја запажања о утицају когнитивно-визуелног приступа на унапређивање компетенција ученика за решавање проблемских задатака, разумевање математичких проблема и мотивацију (Прилог 4).

7. ПРОВЕРА МЕТРИЈСКИХ КАРАКТЕРИСТИКА ИНСТРУМЕНАТА ИСТРАЖИВАЊА

Метријске карактеристике тестова одређене су утврђивањем њихове *валидности, објективности, дискриминативности* и *релијабилности.*

Валидност теста постигнута је применом логичке и садржајне валидације, а оне се односе на утврђивање усклађености тестова са захтевима наставног програма и садржајима на које се односе. Тест се може сматрати ваљаним ако мери знање из области на коју се односи, што је постигнуто овим истраживањем кроз вишеструку валидацију. Ова вишеструка валидација постигнута је конструисањем тестова (од пилот теста до финалног теста) у сарадњи са учитељима из одељења која су учествовала у тестирању и професором са предмета Методика наставе математике.

Објективност теста постигнута је постављањем сваког ученика у приближно једнаку ситуацију при испитивању, јер су независни испитивачи поступали по истим упутствима и оцењивање задатака је извршено на исти начин помоћу унапред одређеног кључа. Објективност иницијалног и финалног теста проверена је утврђивањем степена слагања резултата аутора и професора, два независна процењивача.

Дискриминативност (осетљивост) теста представља његову способност да региструје и најфиније разлике међу испитаницима у оквиру предмета мерења. У овом истраживању, примарни циљ анализе дискриминативности био је да се утврди да ли иницијални и финални тест поседују задовољавајућу осетљивост, односно да ли распон и дистрибуција остварених скорова омогућавају јасно разликовање ученика према нивоу њиховог знања. Валидација осетљивости спроведена је кроз анализу расподеле учесталости постигнутих резултата. Тестирањем хипотезе о нормалности расподеле испитано је у којој мери емпиријски подаци одступају од теоријског модела нормалне криве.

Табела 4. *Тестирање нормалности иницијалног и финалног теста*

Група	Тест	Skewness	Sde	Kurtosis	Sde
Експериментална група	Иницијални	1,424	0,253	1,615	0,500
	Финални	0,256	0,253	-0,989	0,500
Контролна група	Иницијални	1,222	0,263	0,775	0,520
	Финални	1,586	0,263	2,723	0,520

У Табели 4 су дескриптивни показатељи облика расподеле постигнућа на иницијалном и финалном тесту. Ови параметри пружају први увид у то како су се

резултати ученика груписали пре и након примењеног експерименталног програма. Увидом у вредности асиметрије (Skewness) и спљоштености (Kurtosis), уочавају се специфичне промене у структури знања. У експерименталној групи, иницијално мерење указује на изразиту позитивну асиметрију (Skewness = 1,424), што говори о доминантном груписању резултата у зони нижих постигнућа. Међутим, у финалном мерењу ове групе, вредност асиметрије се значајно смањује и приближава нули (Skewness = 0,256), што сугерише да је расподела постала симетричнија. Негативна вредност спљоштености (Kurtosis = – 0,989) указује на нешто већу распршеност резултата, што потврђује да је инструмент успешно диференцирао ученике према нивоу постигнућа након третмана.

Насупрот томе, код контролне групе уочава се удаљавање од нормалне расподеле. Асиметрија која је била умерена при иницијалном мерењу (Skewness = 1,222) у финалном мерењу додатно расте (1,586), уз изразит скок спљоштености (Kurtosis = 2,723). Овако висока вредност куртозиса указује на изразито згушњавање резултата око просека, што имплицира да у контролној групи није дошло до значајног раслојавања у знању ученика.

На основу ових налаза може се закључити да је финални тест у експерименталној групи постигао значајно бољу дискриминативност у односу на контролну. То указује да је примењена интервенција допринела развоју различитих нивоа знања, чиме је омогућила тесту да у пуној мери испољи своју осетљивост и разликује ученике.

Поред анализе асиметричности и спљоштености, нормалност расподеле резултата на иницијалном и финалном тесту испитана је и применом Колмогоров–Смирновљевог теста, који процењује да ли се емпиријска расподела скорова статистички разликује од теоријске нормалне расподеле.

Табела 5. *Колмогоров-Смирнов тест за испитивање нормалности расподеле резултата мерења*

Група		Kolmogorov-Smirnov		
	Мерење	Statistic	df	Sig.
Експериментална група	Иницијално	0,261	91	0,000
	Финално	0,131	91	0,001
Контролна група	Иницијално	0,198	84	0,000
	Финално	0,201	84	0,000

Резултати Колмогоров-Смирновљевог теста у потпуности потврђују претходно изнете дескриптивне индикаторе (Табела 5). У експерименталној групи, иницијални тест значајно одступа од нормалности (K–S = 0,261; p = 0,000). Финални тест такође показује статистичко одступање (K–S = 0,131; p = 0,001), али је величина тест статистике мала, што

узимајући у обзир осетљивост Колмогоров–Смирновљевог теста на велике узорке (Field, 2013), указује на практично прихватљиву близину нормалне расподеле.

У контролној групи, иницијални (K–S = 0,198; p < 0,01) и финални тест (K–S = 0,201; p < 0,01) конзистентно и значајно одступају од нормалне расподеле. С обзиром на то да је у свим мерењима (осим финалног у експерименталној групи) значајност p = 0,000, формална претпоставка о нормалности се одбацује. Међутим, пошто је узорак већи од 30 испитаника по групи, на основу Централне граничне теореме можемо тврдити да дистрибуција средњих вредности тежи нормалној без обзира на облик оригиналне дистрибуције (Pallant, 2017). Ово омогућава наставак анализе применом параметарских статистичких поступака.

Ови налази сугеришу да је примењена интервенција у експерименталној групи допринела бољој диференцијацији постигнућа, чиме је финални тест у овој групи могао да испољи своју пуну дискриминативну функцију.

Релијабилност (поузданост) теста утврдили смо помоћу Кромбах алфа коефицијента јер је он показатељ поузданости иницијалног и финалног теста. Добијене вредности Кромбах алфа коефицијента за иницијални и финални тест (Табела 6) су веће од 0,7 тако да су прихватљиве, а пожељно је да буду веће од 0,8. Дакле, вредности релијабилности за иницијални тест су прихватљиве јер је вредност Кромбах алфа коефицијента 0,709 док је коефицијент за финални тест 0,822 и представља пожељну вредност релијабилности (Pallant, 2017).

Табела 6. *Вредности Кромбах алфа коефицијента за иницијални и финални тест*

	Crombach`s Alpha	Crombach`s Alpha Based on Standardized Items	N of Items
Иницијални тест	0,709	0,687	14
Финални тест	0,822	0,827	14

Дакле, коришћени тестови дају реалну слику и поуздан су показатељ утицаја когнитивно-визуелног приступа на развој компетенција ученика за решавање проблема у млађим разредима основне школе.

8. ОРГАНИЗАЦИЈА И ТОК ИСТРАЖИВАЊА

Експериментално истраживање је реализовано у току школске 2023/2024. године. Обухваћена су по 4 одељења трећег разреда из две градске школе у Бајиној Башти, ОШ "Рајак Павићевић" и ОШ "Свети Сава", које ће представљати контролну и експерименталну групу.

Пилот тестирање спроведено је на почетку истраживања и на основу добијених резултата смо кориговали инструменте и израдили коначну форму иницијалног и финалног теста. Након тога, уследили су договори са директорима школа, стручном педагошко-психолошком службом и учитељима чија одељења ће представљати контролну и експерименталну групу у истраживању. Учитељи су детаљно упознати са предметом и циљем истраживања као и садржајем и циљем експерименталног програма.

Након иницијалног тестирања почели смо са увођењем експерименталног програма у експерименталну групу. Експериментални програм реализован је на 20 часова редовне наставе математике у трећем разреду основне школе и пратио је предвиђени наставни програм математике. Посебно је припремљен и разрађен редослед вежби по наставним јединицама и дата детаљна методичка упутства о самој реализацији когнитивно-визуелног приступа у решавању проблемских задатка (Прилог 7). При обради методички трансформисаних садржаја дат је посебан нагласак визуелизованим задацима у којима је коришћен цртеж, модел правоугаоника и модел ваге. У оквиру трансформисаних садржаја коришћени су визуелизовани задаци у којима је слика тј. визуелна репрезентација део услова или решења задатка, сугерише начин решавања проблема, даје подршку при сваком кораку у решавању задатка и непосредно или посредно прати цео поступак решавања. Ученици су решавањем на такав начин организованих проблема имали прилику да размишљају и схвате суштинске карактеристике визуелних репрезентација као математичког алата.

Експериментални програм је реализован у оквиру следећих наставних тема (Табела 7):

- Сабирање и одузимање бројева до 1000 – 10 часова
- Множење и дељење бројева до 1000 – 6 часова
- Једначине и неједначине – 4 часа

Након завршетка примене експерименталног програма у експерименталној групи обављено је финално тестирање у експерименталној и контролној групи, а прикупљени подаци су статистички обрађени.

Скалирање и испитивање ставова ученика извршено је на узорку ученика експерименталне групе након завршеног експерименталног програма. Дискусија у фокус групи са учитељима који су учествовали у реализацији експерименталог програма у својим одељењима обављена је, такође након завршеног експерименталног програма.

Табела 7. *Вежбе у оквиру експерименталног програма*

Назив наставне теме	Редни бр. вежбе	Наставна јединица
Сабирање и одузимање бројева до 1000	1.	Сабирање троцифреног броја и десетица; одузимање десетица од троцифреног броја
	2.	Сабирање троцифреног и једноцифреног броја; одузимање једноцифреног од троцифреног броја
	3.	Сабирање троцифреног и двоцифреног броја
	4.	Одузимање двоцифреног од троцифреног броја
	5.	Сабирање троцифрених бројева
	6.	Одузимање троцифрених бројева
	7.	Сабирање и одузимање троцифрених бројева
	8.	Зависност збира од промене сабирака. Сталност збира
	9.	Зависност разлике од промене умањеника и умањиоца. Сталност разлике
	10.	Зависност збира и разлике од чланова. Сталност збира и разлике
Множење и дељење бројева до 1000	11.	Множење и дељење бројевима 10 и 100
	12.	Множење двоцифреног броја једноцифреним
	13.	Множење троцифреног броја једноцифреним
	14.	Множење и дељење троцифреног броја једноцифреним
	15.	Зависност производа од промене чинилаца. Сталност производа
	16.	Зависност количника од промене дељеника и делиоца. Сталност количника
Једначине и неједначине	17.	Једначине са сабирањем и одузимањем
	18.	Једначине са множењем
	19.	Неједначине са непознатим сабирком
	20.	Неједначине са непознатим умањеником и умањиоцем

9. СТАТИСТИЧКА ОБРАДА ПОДАТАКА

За статистичку обраду података користили смо софтверски пакет IBM SPSS 23, а за обраду података о визуелизацији при решавању проблема коришћене су фреквеције и проценти. За анализу резултата са скале процене ставова ученика коришћена је дескриптивна анализа као и за анализу дискусије у фокус групи наставника. Статистички поступци које смо користили из наведеног софтвера да би анализирали добијене податке су:

- Колмогоров-Смирновљев тест – за утврђивање нормалности расподеле иницијалног и финалног тестирања и њихове осетљивости у истраживању;
- Кронбах алфа коефицијент – за утврђивање поузданости иницијалног и финалног теста;
- Једнофакторску анализу варијансе ANOVA – да би утврдили статистичку значајност разлике између контролне и експерименталне групе у постигнућима на иницијалном и финалном тесту знања;
- Непараметарски Ман Витнијев У тест – да би додатно оправдали резултат једнофакторске анализе варијансе ANOVA;
- Анализу коваријансе ANCOVA – да би утврдили статистичку значајност разлике између контролне и експерименталне групе при мерењима у којима је уклоњена варијанса у зависној променљивој узрокована коваријантом, на тај начин се контролише уједначеност експерименталне и контролне групе;
- Двофакторску анализу коваријансе – да би утврдили статистичку значајност разлике између контролне и експерименталне групе у способностима решавања проблема зависно од пола и оцене из математике.

Анализирана је фреквенција коришћења шематске или сликовне репрезентације при решавању проблема, као и фреквенције одговора са скале ставова ученика.

III РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА И ЊИХОВА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА

1. УТИЦАЈ КОГНИТИВНО-ВИЗУЕЛНОГ ПРИСТУПА НА РАЗВИЈАЊЕ КОМПЕТЕНЦИЈА УЧЕНИКА ЗА РЕШАВАЊЕ МАТЕМАТИЧКИХ ПРОБЛЕМСКИХ ЗАДАТАКА

Први истраживачки задатак је да утврдимо ефекте примене когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција ученика за решавање математичких проблема који обухватају аритметичке и алгебарске садржаје. Ефекте когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција за решавање математичких проблема пратили смо кроз ученичка постигнућа ученика контролне и експерименталне групе на иницијалном и финалном тесту, а затим смо испитали да ли су ефекти исти код ученика различитог пола и код ученика са различитом оценом из математике. Наведеним истраживањем смо тестирали прву истраживачку хипотезу: *Когнитивно-визуелни приступ доприноси развијању компетенција ученика за решавање математичких проблемских задатака.*

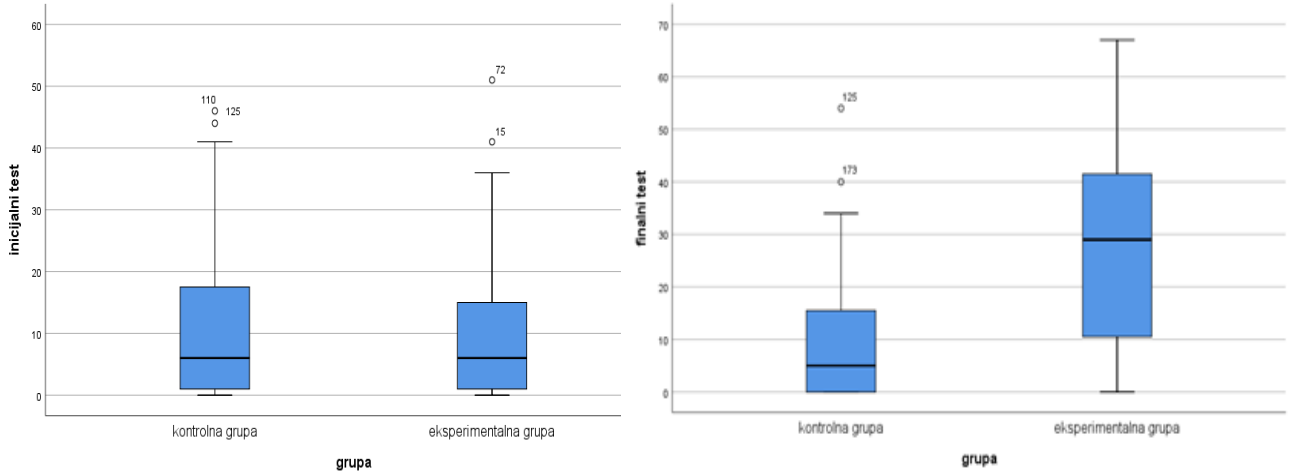
На иницијалном мерењу постигнућа ученика у решавању математичких проблема, поредећи број поена на тесту, утврдили смо да су обе групе постигле приближно исте резултате, експериментална група M = 9,87; SD = 11,234 и контролна група M = 11,05; SD = 12,026 (Табела 8). Максималан број бодова који је ученик могао да постигне на иницијалном тесту је 82 бода, али просек остварених бодова у обе групе је низак.

Табела 8. *Дескриптивни показатељи постигнућа ученика експерименталне и контролне групе у решавању математичких проблема на иницијалном и финалном мерењу*

Тест		N	M	SD
Иницијални тест	Експериментална група	91	9,87	11,234
	Контролна група	84	11,05	12,026
	Укупно	175	10,43	11,602
Финални тест	Експериментална група	91	27,38	18,216
	Контролна група	84	9,24	11,036
	Укупно	175	18,67	17,675

Финално мерење постигнућа ученика у решавању математичких проблема извршено у обе групе након реализације експерименталног програма у експерименталној групи показује другачије резултате. При финалном мерењу приметне су разлике у постигнућима између ученика експерименталне и ученика контролне групе. Ученици експерименталне групе постигли су знатно бољи резултат на финалном мерењу (M = 27,38; SD = 18,216) у односу на резултат иницијалног мерења, док су ученици

контролне групе (M = 9,24; SD = 11,036) постигли резултат који је чак и нижи од резултата постигнутог на иницијалном мерењу (Табела 8). То потврђује и правоугаони дијаграм (Графикон 1).



Графикон 1. *Правоугаони дијаграм резултата иницијалног и финалног теста постигнућа ученика експерименталне и контролне групе у решавању математичких проблема*

Како бисмо утврдили да ли су разлике које су остварене на финалном мерењу између постигнућа ученика експерименталне и контролне групе статистички значајне користили смо једнофакторску анализу варијансе (ANOVA). У Табели 9 приказани су резултати Левеновог теста хомогености варијансе, а у Табели 10 анализа варијансе иницијалног и финалног мерења постигнућа ученика у решавању проблема који обухватају аритметичке и алгебарске садржаје.

Табела 9. *Левенов тест хомогености варијансе иницијалног и финалног мерења постигнућа ученика у решавању математичких проблема*

Тест	Levene Statistic	df1	df2	Sig.
Иницијални тест	0,447	1	173	0,505
Финални тест	33,102	1	173	0,000

Табела 10. *Анализа варијансе иницијалног и финалног мерења постигнућа ученика у решавању математичких проблема*

Тест		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Иницијални тест	Између група	60,767	1	60,767	0,450	0,503
	Унутар групе	23362,227	173	135,042		
	Укупно	23422,994	174			
Финални тест	Између група	14383,658	1	14383,658	62,249	0,000
	Унутар групе	39974,777	173	231,068		
	Укупно	54358,434	174			

Вредност варијансе на иницијалном мерењу (F (1, 173) = 0,450; p = 0,503) показује да не постоји статистички значајна разлика у постигнућима ученика у решавању математичких проблема експерименталне и контролне групе (Табела 10). Наведени резултати су поуздани јер Левенов тест хомогености варијансе (F = 0,447; p = 0,505) потврђује да није прекршена претпоставка о хомогености варијансе (Табела 9).

Варијанса израчуната у финалном мерењу (F (1,173) = 62,249; p = 0,000) показује да постоји статистички значајна разлика између постигнућа ученика експерименталне и контролне групе (Табела 10). Висока вредност варијансе упућује на снажан ефекат групне припадности на финално постигнуће ученика. На финалном тесту утврђено је и статистички значајно одступање од хомогености варијансе (F = 33,102; p < 0,001) (Табела 9), што указује на различиту распршеност резултата између група након деловања експерименталног програма. Ово можемо тумачити као резултат ефекта експерименталног програма на ученике. Да би се резултат анализе варијансе за финално мерење могао сматрати поузданим користили смо Велчов (Welch's ANOVA) и Браун-Форсајтов (Brown-Forsythe) тест, оба су отпорна на кршење претпоставке о хомогености варијансе (Табела 11).

Табела 11. *Welch и Brown-Forsythe тест финалног мерења постигнућа ученика у решавању математичких проблема*

Тест	Statistic[a]	df1	df2	Sig.
Welch	64,611	1	150,074	0,000
Brown-Forsythe	64,611	1	150,074	0,000

a. Asymptotically F distributed.

Резултати оба теста указују на статистички значајну разлику између група на финалном мерењу постигнућа ученика у решавању математичких проблема (Welch = 64,611; p = 0,000; Brown–Forsythe = 64,611; p = 0,000). Подударност добијених вредности статистике и нивоа значајности у оба робусна теста додатно потврђује стабилност и поузданост утврђених разлика између група.

Наведени резултати нам потврђују да су ученици експерименталне групе након примене когнитивно-визуелног приступа у оквиру експерименталног програма побољшали своје компетенције за решавање математичких проблема и тако остварили боља постигнућа на финалном тесту од ученика контролне групе који су радили по устаљеном програму. За додатну оправданост резултата једнофакторске анализе (ANOVA) због раније поменуте нарушене нормалности расподеле користили смо и алтернативни непараметарски Ман Витнијев У тест (Mann-Whitney U) (Табела 12).

Табела 12. *Ман Витнијев У тест постигнућа ученика у решавању математичких проблема*

Test Statistics[a]

	Иницијални тест
Mann-Whitney U	3658,500
Wilcoxon W	7844,500
Z	-0,492
Asymp. Sig. (2-tailed)	0,623

a. Grouping Variable: група

Test Statistics[a]

	Финални тест
Mann-Whitney U	1471,500
Wilcoxon W	5041,500
Z	-7,040
Asymp. Sig. (2-tailed)	0,000

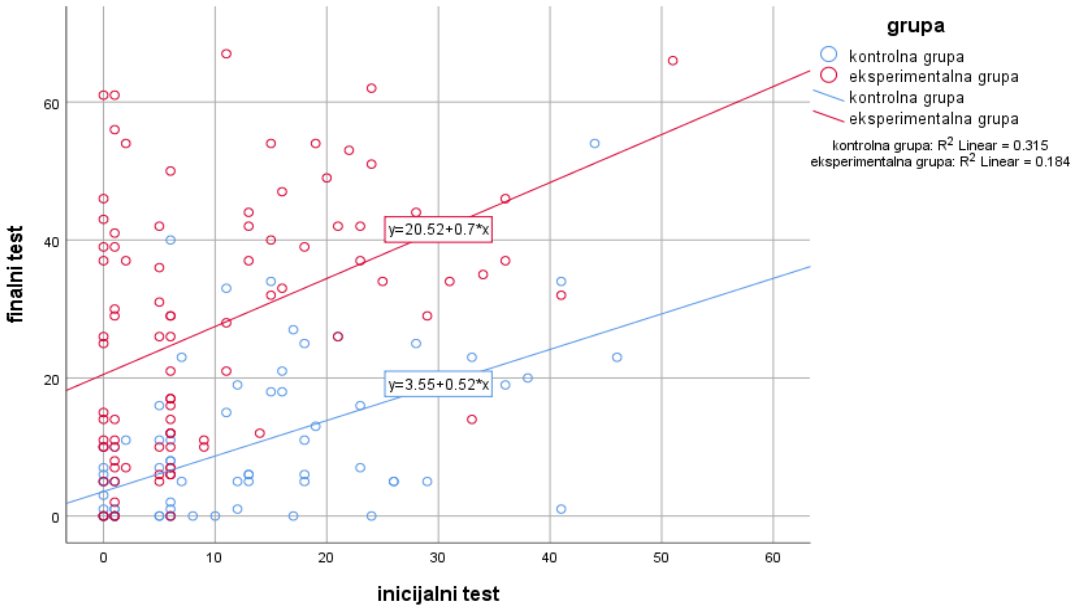
a. Grouping Variable: група

Резултати дати у Табели 12 потврђују да на иницијалном тесту није било значајне разлике међу групама (p = 0,623) док резултати за финални тест решавања математичких проблема показују значајну разлику међу групама (p = 0,000). Статистички показатељ величине утицаја r може се приближно одредити тако што се вредност Z подели са квадратним кореном из укупног броја тестираних ученика. Тако добијена вредност величине утицаја за финални тест је r = 0,532 што се сматра великим утицајем према Коеновом (Cohen, 1988) критеријуму (0,1 мали утицај; 0,3 средњи утицај; 0,5 велики утицај) док је вредност величине утицаја за иницијални тест r = 0,037.

Да бисмо отклонили и најмању сумњу у неуједначеност експерименталне и контролне групе и потврдили поузданост наведених резултата израчунали смо и анализу коваријансе (ANCOVA). Она нам пружа могућност да детаљније истражимо разлике између група, уз статистичко отклањање утицаја додатне (непрекидне) променљиве – резултата иницијалног мерења.

Ковариjат, односно ниво постигнућа ученика на иницијалном тесту решавања математичких проблема који обухватају аритметичке и алгебарске садржаје, измерен је пре почетка експерименталног програма са ученицима експерименталне групе. Његова поузданост утврђена је одређивањем Кронбах алфа коефицијента који је наведен раније у Табели 6.

За проверу линеарности између зависне променљиве и ковариjата користили смо дијаграм растурања представљен на Графикону 2. На дијаграму растурања може се уочити да је однос зависне променљиве и ковариjата, и у контролној и у експерименталној групи, линеаран односно представљен праволинијски. Дакле, на основу представљеног графикона закључујемо да претпоставка о линеарности није нарушена.



Графикон 4. *Дијаграм растурања за проверу линеарности између иницијалног и финалног теста постигнућа ученика у решавању проблема*

Провером хомогености регресионих нагиба утврђујемо да нема интеракције између ковариjата и експерименталног програма. Статистичка провера ове претпоставке представљена је у Табели 13. Претпоставка о хомогености регресионих нагиба није нарушена јер вредност интеракције између ковариjата и зависне променљиве ($F = 1{,}039$; $p = 0{,}310$) није статистички значајна.

Табела 13. *Хомогеност регресионих нагиба*

Зависна променљива: Финални тест

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	23061,525[a]	3	7687,175	42,001	0,000
Intercept	13915,376	1	13915,376	76,031	0,000
Група	6919,269	1	6919,269	37,805	0,000
Иницијални тест	8551,593	1	8551,593	46,724	0,000
Група * Иницијални тест	190,096	1	190,096	1,039	0,310
Error	31296,909	171	183,023		
Total	115386,000	175			
Corrected Total	54358,434	174			

a. R Squared = 0,424 (Adjusted R Squared = 0,414)

Пошто смо проверили све потребне претпоставке можемо наставити анализу коваријансе у истраживању разлика између експерименталне и контролне групе. Након статистичког уклањања утицаја резултата иницијалног теста решавања математичких проблема утврђена је значајна разлика у резултатима експерименталне и контролне групе на финалном тесту обављеном након реализованог експерименталног програма ($F = 84,629$; $p = 0,000$) (Табела 14). Добијени резултат потврђује да разлике на тестовима нису резултат неуједначености група већ резултат настао утицајем експерименталног програма који је примењен у експерименталној групи. Величину утицаја одређује парцијални ета квадрат (Partial Eta Squared) који показује који део варијансе у зависној променљивој објашњава независна променљива. Парцијални ета квадрат је 0,330 што значи да се 33% варијансе у зависној променљивој може објаснити утицајем когнитивно-визуелног приступа решавању математичких проблема кроз експериментални програм што је висок проценат утицаја.

Табела 14. *Анализа коваријансе између иницијалног и финалног мерења постигнућа ученика у решавању математичких проблема*

Зависна променљива: Финални тест

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	22871,429[a]	2	11435,714	62,468	0,000	0,421
Intercept	13857,830	1	13857,830	75,699	0,000	0,306
Иницијални тест	8487,771	1	8487,771	46,365	0,000	0,212
Група	15492,477	1	15492,477	84,629	0,000	0,330
Error	31487,006	172	183,064			
Total	115386,000	175				
Corrected Total	54358,434	174				

a. R Squared = 0,421 (Adjusted R Squared = 0,414)

На основу анализе добијених резултата закључијемо да когнитивно-визуелни приступ позитивно утиче на развијање компетенција ученика за решавање математичких проблема. То потврђује и постављену хипотезу: *Когнитивно-визуелни приступ доприноси развијању компетенција ученика за решавање математичких проблемских задатака.*

Наведену анализу резулатата истраживања утицаја когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција ученика за решавање математичких проблема проширићемо анализом утицаја који тај приступ постиже код ученика различитог пола као и код ученика са различитом оценом из математике.

1.1. Утицај когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција ученика за решавање математичких проблема у зависности од пола

Циљ нашег даљег истраживања је да утврдимо да ли настава усмерена на коришћење когнитивно-визуелног приступа развија компетенције ученика за решавање математичких проблема који обухватају аритметичке и алгебарске садржаје без обзира на пол. У Табели 15. приказани су просечни резултати које су постигли ученици мушког и женског пола на мерењу постигнућа за решавање математичких проблема.

Табела 15. *Постигнућа дечака и девојчица у решавању математичких проблема на иницијалном и финалном тесту*

Група	Пол	Иницијални тест		Финални тест		Укупно
		M	SD	M	SD	N
Експериментална група	Дечаци	12,95	12,376	28,58	17,455	40
	Девојчице	7,45	9,702	26,45	18,912	51
	Укупно	9,87	11,234	27,38	18,216	91
Контролна група	Дечаци	10,70	12,129	8,98	10,884	46
	Девојчице	11,47	12,049	9,55	11,356	38
	Укупно	11,05	12,026	9,24	11,036	84
Укупно	Дечаци	11,74	12,225	18,09	17,296	86
	Девојчице	9,17	10,887	19,24	18,113	89
	Укупно	10,43	11,602	18,67	17,675	175

Ако анализирамо вредности из Табеле 15 примећујемо да су дечаци на иницијалном тесту (M = 11,74; SD = 12,225) постигли у просеку боље резултате од девојчица (M = 9,17; SD = 10,887). Посматрајући по групама девојчице у контролној групи су успешније (M = 11,47; SD = 12,049) од дечака (M = 10,70; SD = 12,129), али како су вредности стандардне девијације и код дечака и код девојчица приближно 12 , што знатно превазилази саму разлику између њихових просека (која износи свега 0,77), може се закључити да унутар контролне групе постоји изузетно велико распршење индивидуалних резултата. Овако високе вредности стандардних девијација указују на то да се распони резултата дечака и девојчица готово потпуно преклапају, што онемогућава извођење закључка о било каквој стварној предности једног пола у овој групи. У експерименталној групи девојчице (M = 7,45; SD = 9,702) су остварile приметно слабија постигнућа од дечака (M = 12,95; SD = 12,376), разлика је 5,50 поена у корист дечака. Иако је варијабилитет резултата и даље висок, нарочито код дечака (SD = 12,376), код девојчица се уочава нешто већа хомогеност у ниским постигнућима (SD = 9,702). Чињеница да је разлика између аритметичких средина у овој групи знатно већа него у контролној, сугерише да у узорку експерименталне групе постоји јасно изражен тренд слабијег постигнућа девојчица у односу на дечаке. Уочавамо да су постигнућа дечака у обе групе на иницијалном тесту слична док су девојчице контролне групе у просеку успешније од девојчица експерименталне групе.

На финалном тесту су постигнућа дечака у експериметалној групи (M = 28,58; SD = 17,455) и девојчица експерименталне групе (M = 26,45; SD = 18,912) приближно иста такође су у контролној групи постигнућа дечака (M = 8,98; SD = 10,884) и девојчица (M = 9,55; SD = 11,356) приближно једнака, али нижа од постигнућа дечака и девојчица у експерименталној групи. Ако посматрамо укупно постигнуће на финалном

тесту девојчице (M = 19,24; SD = 18,113) су у просеку успешније од дечака (M = 18,09; SD = 17,296), али је та разлика само 1,15 поена у корист девојчица. Двофакторска анализа коваријансе показује да су разлике у постигнућима између дечака и девојчица статистички незначајне (Табела 16).

Табела 16. *Двофакторска анализа коваријансе иницијалног и финалног мерења постигнућа ученика у решавању математичких проблема у односу на пол*

Зависна променљива: Финални тест

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	22904,362[a]	4	5726,091	30,948	0,000	0,421
Intercept	13141,361	1	13141,361	71,025	0,000	0,295
IT	8412,703	1	8412,703	45,468	0,000	0,211
Пол	18,780	1	18,780	0,102	0,750	0,001
Група	15211,919	1	15211,919	82,216	0,000	0,326
Пол * Група	13,414	1	13,414	0,072	0,788	0,000
Error	31454,072	170	185,024			
Total	115386,000	175				
Corrected Total	54358,434	174				

a. R Squared = 0,421 (Adjusted R Squared = 0,408)

Двофакторском анализом коваријансе (Табела 16) утврдили смо да не постоји статистички значајан утицај пола на резултате у финалном мерењу компетенција ученика за решавање математичких проблема који обухватају аритметичке и алгебарске садржаје ако је ковариjат иницијално мерење истих компетенција ($F(1,170) = 0,072$; $p = 0,788$). Парцијални ета квадрат у овом случају износи 0,000 што значи да нема утицаја пола (0,0%) на резултате мерења компетенција ученика за решавање математичких проблема.

На основу наведених резултата и анализа закључујемо да се когнитивно-визуелни приступ развијању компетенција ученика за решавање математичких проблема који обухватају аритметичке и алгебарске садржаје може успешно користити у настави и са дечацима и са девојчицама. Ученици оба пола показују бољa постигнућа на тестирању након имплементације експерименталног програма у односу на вршњаке, дечаке и девојчице који су учили по стандардном програму.

Добијени резултати, који указују на то да когнитивно-визуелни приступ подједнако унапређује постигнућа и дечака и девојчица, представљају значајан допринос дебати о родним разликама у математичком образовању. У наставној пракси се често верује у постојање "родног јаза", посебно у доменима аритметике и алгебре који захтевају висок степен апстракције. Анализом података добијених у нашем истраживању, уочавамо да након имплементације експерименталног програма, разлика у постигнућу између дечака и девојчица нестаје или постаје статистички занемарљива, што је у складу са мета-анализама које су спровели Линдберг и сарадници (Lindberg et al., 2010).

Кључ успеха овог модела лежи у његовој способности да "премости" разлике у стратегијама решавања проблема. Истраживања која су спровели Галагер и Де Лизи (Gallagher, De Lisi, 1994) сугеришу да девојчице чешће примењују конвенционалне, алгоритмизоване стратегије, док су дечаци склонији неконвенционалним, интуитивним и просторним приступима. Когнитивно-визуелни приступ који смо применили демистификује апстрактне алгебарске концепте нудећи визуелну структуру чиме се задовољава потреба девојчица за структуром, али се истовремено активирају визуоспацијални капацитети који се традиционално приписују дечацима.

Ако резултате сагледамо у контексту TIMSS 2019 извештаја за Србију, приметићемо да наши ученици генерално остварују добре резултате у домену познавања чињеница, али да долази до пада ефикасности у доменима примене и резоновања (Гашић Павишић, Станковић, 2020). У стандардном програму, којим је обухваћена контролна група у нашем истраживању, дечаци често показују благу предност управо у овим сложенијим когнитивним доменима. Међутим, наш експериментални програм је омогућио девојчицама да кроз визуелизацију остваре исти ниво ефикасности у резоновању као и дечаци. Ово је у складу са налазима које наводе Ловри и Дизман (Lowrie, Diezmann, 2011), истичући да се јаз у просторном резоновању може потпуно елиминисати експлицитним подучавањем визуелним стратегијама.

Прелазак са аритметике на алгебру често се описује као критична тачка у којој многи ученици развијају анксиозност према математици. Наши резултати показују да визуелизација служи као "когнитивна потпора" (scaffolding). Док Фенема и сарадници (Fennema et al., 1998) наводе да дечаци брже усвајају апстрактне стратегије, наше истраживање доказује да када се апстракција утемељи у визуелном моделу, тај прелазак постаје подједнако успешан за оба пола.

Можемо закључити да имплементација нашег модела показује да када се визуелизација користи као когнитивни алат, а не само као илустрација, она подједнако користи и дечацима и девојчицама. Наш резултат, који показује да експериментални програм побољшава постигнуће код оба пола у односу на контролну групу (стандардни програм), сугерише да когнитивно-визуелни приступ директно утиче на оне делове курикулума где ученици обично греше због претеране апстракције. За разлику од TIMSS података који у неким циклусима бележе стагнацију у области алгебре, наш модел нуди методолошки оквир за превазилажење те стагнације кроз структурно представљање проблема.

1.2. Утицај когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција ученика за решавање математичких проблема у зависности од оцене из математике

Утврдићемо да ли настава усмерена на коришћење когнитивно-визуелног приступа развија компетенције ученика за решавање математичких проблема који обухватају аритметичке и алгебарске садржаје без обзира на оцену из математике. У Табели 17. приказани су просечни резултати које су ученици различите оцене из математике постигли на мерењу постигнућа за решавање проблема.

Табела 17. *Постигнућа ученика различите оцене из математике у решавању математичких проблема на иницијалном и финалном тесту*

Група	Оцена	Иницијални тест		Финални тест		Укупно
		M	SD	M	SD	N
Експериментална група	Одличан(5)	20,44	13,142	33,30	18,487	27
	Вр.добар(4)	6,66	7,178	29,50	17,504	32
	Добар(3)	6,05	6,032	23,79	16,689	19
	Довољан(2)	1,38	2,103	15,15	16,309	13
	Укупно	9,87	11,234	27,38	18,216	91
Контролна група	Одличан(5)	15,72	12,931	13,53	12,869	47
	Вр.добар(4)	6,75	8,538	4,67	3,795	24
	Добар(3)	2,44	3,468	3,11	3,756	9
	Довољан(2)	1,25	2,500	0,00	0,000	4
	Укупно	11,05	12,026	9,24	11,036	84

На основу резултата из Табеле 17 можемо приметити да су ученици са оценом одличан (5) из експерименталне групе на иницијалном тесту (M = 20,44; SD = 13,142) постигли бољи просечан резултат него ученици са истом оценом из контролне групе (M = 15,72; SD = 12,931). Такође, ученици са оценом добар (3) из експерименталне групе су на иницијалном тесту (M = 6,05; SD = 6,032) постигли бољи просечан резултат него ученици са истом оценом из контролне групе (M = 2,44; SD = 3,468). Остали резултати по оценама вр. добар (4) (експериментална група: M = 6,66; SD = 7,178; контролна група: M = 6,75; SD = 8,538) и довољан (2) (експериментална група: M = 1,38; SD = 2,103; контролна група: M = 1,25; SD = 2,500) на иницијалном тестирању су приближно исти.

Ако погледамо резултате на финалном тесту уочавамо велике разлике између резултата ученика експерименталне и резултата ученика контролне групе по свим оценама. Ученици експерименталне групе са оценом одличан (5) (M = 33,30; SD = 18,487) имају и даље бољи резултат на тесту од ученика контролне групе са истом оценом (M = 13,53; SD = 12,869), али и остали ученици експерименталне групе са оценама добар (3) (M = 23,79; SD = 16,689) и довољан (2) (M = 15,15; SD = 16,309) имају боље резултате од ученика контролне групе са истим оценама добар (3) (M = 3,11; SD = 3,756) и довољан (2) (M = 0,00; SD = 0,00), а ученици експерименталне групе са оценом вр. добар (4) (M = 29,50; SD = 17,504) показали су највећу разлику у резултату у односу на ученике са истом оценом из контролне групе (M = 4,67; SD = 3,795). Ефикасност експерименталног програма посебно се огледа у чињеници да су ученици са оценом довољан (2) из експерименталне групе (M = 15,15; SD = 16,309) на финалном тестирању остварили виши просечан резултат у односу на ученике са оценом одличан (5) из контролне групе (M = 13,53; SD = 12,869). Иако висока вредност стандардне девијације код ученика са оценом два указује на значајну хетерогеност и варијабилност у постигнућима унутар ове подгрупе, добијена аритметичка средина јасно сугерише позитиван смер деловања примењеног модела на ученике са слабијим почетним успехом.

Табела 18. *Двофакторска анализа коваријансе иницијалног и финалног мерења постигнућа ученика у решавању математичких проблема у односу на оцену из математике*

Зависна променљива: Финални тест

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	24411,082[a]	8	3051,385	16,914	0,000	0,449
Intercept	9638,089	1	9638,089	53,425	0,000	0,243
IT	4703,052	1	4703,052	26,069	0,000	0,136
Оцена	507,374	3	169,125	0,937	0,424	0,017
Група	9207,152	1	9207,152	51,036	0,000	0,235
Оцена * Група	538,555	3	179,518	0,995	0,397	0,018
Error	29947,352	166	180,406			
Total	115386,000	175				
Corrected Total	54358,434	174				

a. R Squared = 0,449 (Adjusted R Squared = 0,423)

Увидом у табеларни приказ просечних постигнућа, уочава се да су ученици експерименталне групе остварили боље резултате након примене експерименталног програма. Ипак, неопходно је испитати да ли је наведено побољшање условљено претходним успехом (оценом) ученика. Како би се утврдило да ли когнитивно-визуелни приступ развоју компетенција ученика за решавање математичких проблема који обухватају аритметичке и алгебарске садржаје остварује различите ефекте у зависности од оцене из математике, примењена је двофакторска анализа коваријансе (ANCOVA) представљена у Табели 18.

Резултати двофакторске анализе коваријансе (Табела 18) показују да школска оцена из математике нема статистички значајан утицај на постигнућа ученика на финалном тесту компетенција за решавање аритметичких и алгебарских математичких проблема, уз контролу ефекта иницијалног тестирања као коваријата ($F(3, 166) = 0,995$; $p = 0,397$). Вредност парцијалног ета-квадрата од 0,018 указује на то да оцена из математике објашњава свега 1,8% варијансе постигнућа на финалном тесту, што се сматра веома малим ефектом.

Добијени резултати потврђују да когнитивно-визуелни приступ у настави математике позитивно утиче на развијање компетенција ученика за решавање математичких проблема који обухватају аритметичке и алгебарске садржаје и да те компетенције не зависе од оцене коју ученици имају из математике. У експерименталној групи која је радила по посебном програму користећи поменути приступ настави приметни су бољи резултати на финалном тесту, чак и ученици са нижим оценама постигли су боље резултате од ученика контролне групе. Анализирајући добијене резултате дошли смо до закључка да се когнитивно-визуелни приступ може успешно примењивати за развој компетенција за решавање математичких проблема код свих ученика без обзира на оцену из математике.

*****

Из наведених резултата истраживања и њихове анализе закључујемо да когнитивно-визуелни приступ остварује значајне позитивне ефекте на стицање компетенција за решавање математичких проблема код ученика млађег школског узраста. Налази указују на то да визуелизација апстрактних аритметичких и алгебарских концепата служи као снажан когнитивни ослонац, што је у складу са теоријом дуалног кодирања (Paivio, 1986), према којој се информације симултано процесуирају кроз вербални и визуелни систем, што погодује формирању трајних менталних репрезентација и њиховој каснијој примени.

Упоређујући наше резултате са сличним студијама (Arcavi, 2003; Mayer, 2005), евидентно је да примена визуелних модела смањује когнитивно оптерећење приликом транзиције са аритметичког на алгебарски начин размишљања. Док традиционална настава често инсистира на процедуралном знању, овај приступ подстиче концептуално разумевање, што је кључно за ученике у конкретно-оперативном периоду развоја.

Посебно значајан налаз произилази из примене двофакторске анализе варијансе (ANOVA) и анализе коваријансе (ANCOVA) у односу на пол ученика и претходни школски успех (оцену). Наше истраживање је показало полну неутралност модела јер

анализа варијансе указује на одсуство статистички значајних разлика у постигнућима између дечака и девојчица у експерименталној групи. Ово је у складу са савременим мета-аналитичким студијама (Lindberg et al., 2010) које демистификују полне разлике у математичким способностима када се примењују иновативни и добро структурирани методички модели. Когнитивно-визуелни приступ се показао као подједнако подстицајан за оба пола.

Поред тога добијени резултати су показали компензаторни ефекат оцене јер је примена ANCOVA анализе открила да оцена из математике нема пресудан утицај на крајњи успех након примене програма. Ово сазнање кореспондира са истраживањима која наглашавају да визуелне стратегије имају ефекат когнитивне подршке, оне највише помажу ученицима који имају потешкоће у разумевању апстрактних симбола (Diezmann, English, 2001). Тиме се потврђује да овај модел делује на "хомогенизацију знања" унутар одељења, смањујући јаз између ученика са различитим почетним успехом.

Наша даља анализа резултата биће усмерена на истраживање ефеката когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција ученика за решавање проблема посебно у области аритметике и посебно у области алгебре.

2. УТИЦАЈ КОГНИТИВНО-ВИЗУЕЛНОГ ПРИСТУПА НА РАЗВИЈАЊЕ КОМПЕТЕНЦИЈА УЧЕНИКА ЗА РЕШАВАЊЕ АРИТМЕТИЧКИХ ПРОБЛЕМА

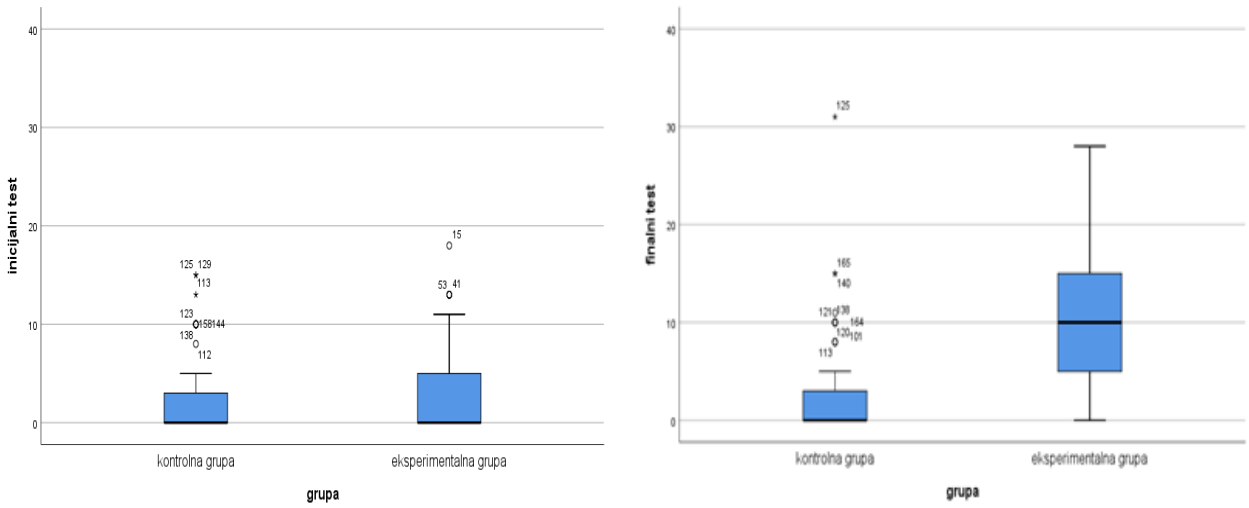
Други истраживачки задатак усмерен је на ефекте примене когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција ученика за решавање проблема у области аритметике. Ефекте когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција за решавање аритметичких проблема пратили смо кроз ученичка постигнућа на првом субтесту, а затим смо испитали да ли су ефекти исти код ученика различитог пола и код ученика са различитом оценом из математике. Истраживањем смо тестирали другу хипотезу: *Когнитивно-визуелни приступ доприноси развијању компетенција ученика за решавање проблема у области аритметике.*

На иницијалном мерењу постигнућа ученика у области аритметике, обе групе су постигле приближно исте резултате поредећи број поена на тесту, експериментална група M = 2,27; SD =3,870 и контролна група M = 2,00; SD = 3,840 (Табела 19).

Табела 19. *Дескриптивни показатељи постигнућа ученика експерименталне и контролне групе при решавању проблема у области аритметике на иницијалном и финалном мерењу*

Тест		N	M	SD
Иницијални тест	Експериментална група	91	2,27	3,870
	Контролна група	84	2,00	3,840
	Укупно	175	2,14	3,847
Финални тест	Експериментална група	91	10,09	7,727
	Контролна група	84	2,30	4,918
	Укупно	175	6,35	7,593

Финално мерење постигнућа ученика у области аритметике извршено након реализације експерименталног програма у експерименталној групи показује другачије резултате. При финалном мерењу приметне су разлике у постигнућима ученика експерименталне и контролне групе. Ученици експерименталне групе постигли су знатно бољи резултат на финалном мерењу (M = 10,09; SD = 7,727) у односу на резултат иницијалног мерења, док су ученици контролне групе (M = 2,30; SD = 4,918) остали на приближно истом резултату постигнутом на иницијалном мерењу (Табела 19). То потврђује и правоугаони дијаграм (Графикон 3).



Графикон 3. *Правоугаони дијаграм резултата иницијалног и финалног теста постигнућа ученика експерименталне и контролне групе у решавању проблема у области аритметике*

Како бисмо утврдили да ли су разлике које су остварене на финалном мерењу статистички значајне користили смо једнофакторску анализу варијансе (ANOVA). Резултати Левеновог теста хомогености варијансе су приказани у Табели 20, а анализа варијансе иницијалног и финалног мерења постигнућа при решавању аритметичких проблема у Табели 21.

Табела 20. *Левенов тест хомогености варијансе иницијалног и финалног мерења за аритметичке проблеме*

Тест	Levene Statistic	df1	df2	Sig.
Иницијални тест	0,134	1	173	0,715
Финални тест	32,515	1	173	0,000

Табела 21. *Анализа варијансе иницијалног и финалног мерења постигнућа ученика у решавању аритметичких проблема*

Тест		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Иницијални тест	Између група	3,297	1	3,297	0,222	0,638
	Унутар групе	2572,132	173	14,868		
	Укупно	2575,429	174			
Финални тест	Између група	2650,881	1	2650,881	62,134	0,000
	Унутар групе	7380,856	173	42,664		
	Укупно	10031,737	174			

Вредност варијансе на иницијалном мерењу за аритметичке проблеме (F (1, 173) = 0,222; p = 0,638) показује да не постоје статистички значајне разлике у постигнућима ученика експерименталне и контролне групе (Табела 21). Наведени резултати су поуздани јер Левенов тест хомогености варијансе (F = 0,134; p = 0,715) потврђује да није прекршена претпоставка о хомогености варијансе (Табела 20).

Варијанса израчуната у финалном мерењу (F (1,173) = 62,134; p = 0,000) показује да постоји статистички значајна разлика између постигнућа ученика експерименталне и контролне групе (Табела 21). Висока вредност варијансе упућује на снажан ефекат групне припадности на финално постигнуће ученика. На финалном тесту утврђено је статистички значајно одступање од хомогености варијанси (F = 32,515; p = 0,000) (Табела 20), што указује на различиту распршеност резултата између група након деловања експерименталног програма. Ово можемо тумачити као резултат ефеката експерименталног програма на ученике. Да би се резултат анализе варијансе за финално мерење могао сматрати поузданим користили смо Велчов (Welch's ANOVA) и Браун-Форсајтов (Brown-Forsythe) тест који су отпорни на нарушавање претпоставке о хомогености варијансе (Табела 22).

Табела 22. *Велчов и Браун-Форсајтов тест финалног мерења постигнућа ученика у решавању аритметичких проблема*

	Statistic[a]	df1	df2	Sig.
Welch	64,287	1	154,141	0,000
Brown-Forsythe	64,287	1	154,141	0,000

a. Asymptotically F distributed.

Резултати оба теста указују на статистички значајну разлику између група на финалном тесту постигнућа ученика у области аритметике (Welch = 64,287; p = 0,000; Brown–Forsythe = 64,287; p = 0,000). Подударност добијених вредности статистике и нивоа значајности у оба робусна теста додатно потврђује стабилност и поузданост утврђених разлика између група.

Табела 23. *Ман Витнијев У тест постигнућа ученика у решавању аритметичких проблема*

Test Statistics[a]

	Иницијални тест аритметика
Mann-Whitney U	3595.000
Wilcoxon W	7165.000
Z	-0.831
Asymp. Sig. (2-tailed)	0.406

a. Grouping Variable: група

Test Statistics[a]

	Финални тест аритметика
Mann-Whitney U	1502.000
Wilcoxon W	5072.000
Z	-7.312
Asymp. Sig. (2-tailed)	0.000

a. Grouping Variable: група

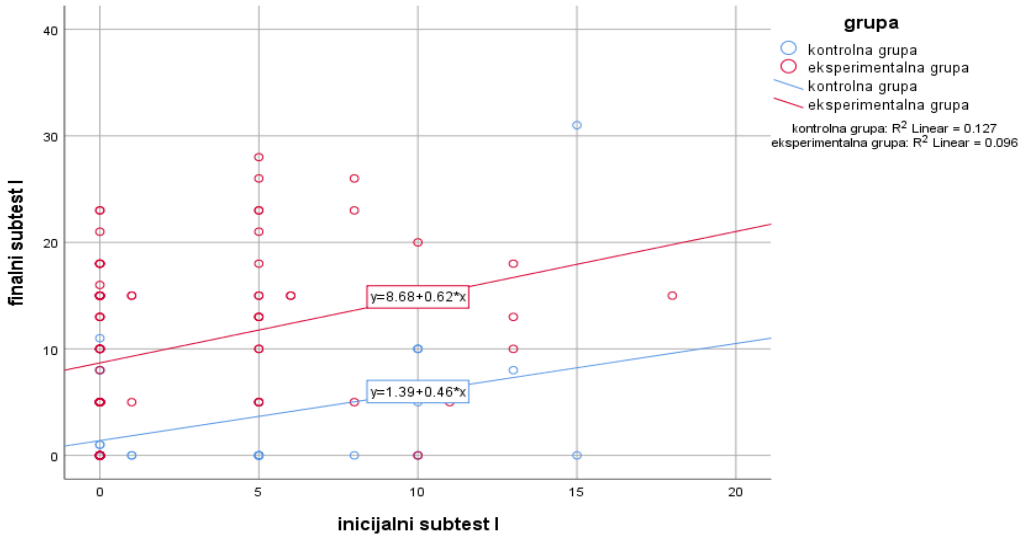
Добијени резултати нам потврђују да су ученици експерименталне групе након примене когнитивно-визуелног приступа у оквиру експерименталног програма побољшали своје компетенције за решавање аритметичких проблема и тако остварили боља постигнућа на финалном тесту од ученика контролне групе који су радили по устаљеном програму. За додатну оправданост резултата једнофакторске анализе (ANOVA) због раније поменуте нарушене нормалности расподеле користили смо и алтернативни непараметарски Ман Витнијев У тест (Mann-Whitney U). Резултати дати у Табели 23 потврђују да на иницијалном тесту није било значајне разлике међу групама (p = 0,406) док резултати за финални тест из аритметике показују значајну разлику међу групама (p = 0,000). Статистички показатељ величине утицаја r може се приближно одредити тако што се вредност Z подели са квадратним кореном из укупног броја тестираних ученика.

Величина утицаја за финални тест је r = 0,553 што се сматра великим утицајем према Коеновом (Cohen, 1988) критеријуму (0,1 мали утицај; 0,3 средњи утицај; 0,5 велики утицај) док је величина утицаја за иницијални тест r = 0,063 што је занемариво мали утицај.

Да бисмо отклонили и најмању сумњу у неуједначеност експериментлане и контролне групе и потврдили поузданост наведених резултата израчунали смо и анализу коваријансе (ANCOVA). Тако смо детаљније истражили разлике између група, уз статистичко отклањање утицаја додатне (непрекидне) променљиве, односно резултата иницијалног мерења.

Коваријат, односно резултат на иницијалном тесту из области аритметике, измерен је пре почетка експерименталног програма. Његова поузданост утврђена је одређивањем Кронбах алфа коефицијента раније у Табели 6.

За проверу линеарности између зависне променљиве и коваријата користили смо дијаграм растурања (Графикон 4). На дијаграму се види да је однос зависне променљиве и коваријата, у обе групе, линеаран (праволинијски). Дакле, претпоставка о линеарности није нарушена.



Графикон 4. *Дијаграм растурања за проверу линеарности између иницијалног и финалног теста постигнућа ученика у области аритметике*

Провером хомогености регресионих нагиба утврђујемо да нема интеракције између коваријата и експерименталног програма. Статистичка провера ове претпоставке представљена је у Табели 24. Претпоставка о хомогености регресионих нагиба није нарушена јер вредност интеракције између коваријата и зависне променљиве (F = 0,431; p = 0,513) није статистички значајна.

Табела 24. *Хомогеност регресионих нагиба*

Зависна променљива: Финални тест (аритметика)

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	3418,488[a]	3	1139,496	29,464	0,000
Intercept	3380,341	1	3380,341	87,406	0,000
Група	1775,629	1	1775,629	45,913	0,000
Иницијални тест	738,461	1	738,461	19,095	0,000
Група * Иницијални тест	16,654	1	16,654	0,431	0,513
Error	6613,249	171	38,674		
Total	17085,000	175			
Corrected Total	10031,737	174			

a. R Squared = 0,341 (Adjusted R Squared = 0,329)

Пошто смо проверили све потребне претпоставке можемо наставити анализу коваријансе у истраживању разлика између експерименталне и контролне групе. Након статистичког уклањања утицаја резултата иницијалног теста са проблемима из области аритметике утврђена је значајна разлика у резултатима експерименталне и контролне групе на финалном мерењу обављеном након експерименталног програма ($F = 66,091$; $p = 0,000$) (Табела 25). Добијени резултат потврђује да разлике на тестовима нису резултат неуједначености група већ резултат настао утицајем експерименталног програма који је примењен у експерименталној групи. Величину утицаја одређује парцијални ета квадрат (Partial Eta Squared) који показује који део варијансе у зависној променљивој објашњава независна променљива. Парцијални ета квадрат је 0,278 што значи да се 27,8% варијансе у зависној променљивој може објаснити утицајем когнитивно-визуелног приступа решавању аритметичких проблема кроз експериментални програм.

Табела 25. *Анализа коваријансе између иницијалног и финалног мерења постигнућа ученика у решавању аритметичких проблема*

Зависна променљива: Финални тест (аритметика)

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	3401,834[a]	2	1700,917	44,127	0,000	0,339
Intercept	3384,249	1	3384,249	87,798	0,000	0,338
Иницијални тест	750,953	1	750,953	19,482	0,000	0,102
Група	2547,554	1	2547,554	66,091	0,000	0,278
Error	6629,903	172	38,546			
Total	17085,000	175				
Corrected Total	10031,737	174				

a. R Squared = 0,339 (Adjusted R Squared = 0,331)

На основу анализе добијених резултата закључујемо да когнитивно-визуелни приступ позитивно утиче на развијање компетенција ученика за решавање проблема у области аритметике. То потврђује и постављену хипотезу: *Когнитивно-визуелни приступ доприноси развијању компетенција ученика за решавање проблема у области аритметике*.

Наведену анализу резулатата истраживања утицаја когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција ученика за решавање аритметичких проблема проширићемо анализом утицаја који тај приступ постиже код ученика различитог пола и ученика са различитом оценом из математике.

2.1. Утицај когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција ученика за решавање аритметичких проблема у зависности од пола

Један од циљева нашег даљег истраживања је да утврдимо да ли настава усмерена на коришћење когнитивно-визуелног приступа развија компетенције ученика за решавање аритметичких проблема без обзира на пол. У Табели 26 приказани су просечни резултати које су постигли ученици мушког и женског пола на мерењу постигнућа за решавање аритметичких проблема.

Табела 26. *Постигнућа дечака и девојчица у решавању аритметичких проблема на тестовима*

Група	Пол	Иницијални тест		Финални тест		Укупно
		M	SD	M	SD	N
Експериментална група	Дечаци	2,50	3,769	11,58	8,230	40
	Девојчице	2,10	3,976	8,92	7,175	51
	Укупно	2,27	3,870	10,09	7,727	91
Контролна група	Дечаци	2,41	4,256	2,65	5,728	46
	Девојчице	1,50	3,253	1,87	3,743	38
	Укупно	2,00	3,840	2,30	4,918	84
Укупно	Дечаци	2,45	4,014	6,80	8,276	86
	Девојчице	1,84	3,677	5,91	6,888	89
	Укупно	2,14	3,847	6,35	7,593	175

Ако анализирамо вредности из Табеле 26 примећујемо да су дечаци на иницијалном тесту (M = 2,45; SD = 4,014) постигли у просеку боље резултате од девојчица (M = 1,84; SD = 3,677). Такође, посматрајући и по групама дечаци су успешнији и у контролној (M = 2,41; SD = 4,256) и у експерименталној групи (M = 2,50; SD = 3,769) од девојчица из контролне (M = 1,50; SD = 3,253) и експерименталне групе (M = 2,10; SD = 3,976). Уочавамо да су постигнућа дечака у обе групе слична док су девојчице експерименталне групе у просеку успешније од девојчица контролне групе.

На финалном тесту су постигнућа дечака и даље боља и у експериметалној (M = 11,58; SD = 8,230) и у контролној групи (M = 2,65; SD = 5,728) од постигнућа девојчица експерименталне (M = 8,92; SD = 7,175) и контролне групе (M = 1,87; SD = 3,743). Ако посматрамо укупно постигнуће на финалном тесту дечаци (M = 6,80; SD = 8,276) су у просеку успешнији од девојчица (M = 5,91; SD = 6,888). Да бисмо утврдили да ли су разлике у постигнућима између дечака и девојчица статистички значајне користили смо двофакторску анализу коваријансе.

Табела 27. *Двофакторска анализа коваријансе иницијалног и финалног мерења постигнућа ученика у решавању аритметичких проблема у односу на пол*

Независна променљива: Финални тест (аритметика)

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	3536,939[a]	4	884,235	23,145	0,000	0,353
Intercept	3474,893	1	3474,893	90,955	0,000	0,349
Иницијални тест	715,440	1	715,440	18,726	0,000	0,099
Пол	80,480	1	80,480	2,107	0,149	0,012
Група	2625,541	1	2625,541	68,723	0,000	0,288
Пол * Група	49,383	1	49,383	1,293	0,257	0,008
Error	6494,798	170	38,205			
Total	17085,000	175				
Corrected Total	10031,737	174				

a. R Squared = 0,353 (Adjusted R Squared = 0,337)

Двофакторском анализом коваријансе (Табела 27) утврдили смо да не постоји статистички значајан утицај пола на резултате у финалном мерењу компетенција ученика за решавање аритметичких проблема ако је коваријат иницијално мерење истих компетенција ($F(1,170) = 1,293$; $p = 0,257$). Парцијални ета квадрат у овом случају износи 0,008 и представља веома мали утицај пола (0,8%) на резултате мерења компетенција ученика за решавање аритметичких проблема.

На основу наведених резултата и анализа закључујемо да се когнитивно-визуелни приступ развијању компетенција ученика за решавање математичких проблема из аритметике може успешно користити у настави и са дечацима и са девојчицама. Оваква полна неутралност модела, коју је потврдила претходно наведена анализа варијансе, указује на то да ученици оба пола остварују значајно боља постигнућа у решавању аритметичких проблема у односу на своје вршњаке који су учили по стандардном програму. Тиме се додатно потврђује да иновативни методички оквир ефикасно превазилази разлике у почетним компетенцијама, чинећи аритметичке концепте подједнако доступним свим ученицима.

2.2. Утицај когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција ученика за решавање аритметичких проблема у зависности од оцене из математике

Утврдићемо да ли настава усмерена на коришћење когнитивно-визуелног приступа развија компетенције ученика за решавање аритметичких проблема без обзира на оцену из математике. У Табели 28 приказани су просечни резултати које су ученици различите оцене из математике постигли на мерењу постигнућа за решавање аритметичких проблема.

Табела 28. *Постигнућа ученика различите оцене из математике на тестовима са аритметичким проблемима*

Група	Оцена	Иницијални тест		Финални тест		Укупно
		M	SD	M	SD	N
Експериментална група	Одличан(5)	5,81	4,962	12,15	8,263	27
	Вр.добар(4)	0,97	1,975	10,81	7,520	32
	Добар(3)	0,47	1,837	9,42	7,523	19
	Довољан(2)	0,77	1,878	5,00	5,401	13
	Укупно	2,27	3,870	10,09	7,727	91
Контролна група	Одличан(5)	2,64	4,281	3,66	6,116	47
	Вр.добар(4)	1,42	3,562	0,46	1,414	24
	Добар(3)	1,11	2,205	1,11	2,205	9
	Довољан(2)	0,00	0,000	0,00	0,000	4
	Укупно	2,00	3,840	2,30	4,918	84

На основу резултата из Табеле 28 можемо приметити да су ученица са оценом одличан (5) из експерименталне групе на иницијалном тесту (M = 5,81; SD = 4,962) постигли бољи просечан резултат него ученици са истом оценом из контролне групе (M = 2,64; SD = 4,281). Остали резултати по оценама на иницијалном тестирању су приближно исти.

Ако погледамо резултате на финалном тесту уочавамо велике разлике између постигнућа ученика експерименталне и ученика контролне групе по свим оценама. Ученици експериметалне групе са оценом одличан (5) (M = 12,15; SD = 8,263) имају и даље бољи резултат на тесту од ученика контролне групе са истом оценом (M = 3,66; SD = 6,116), али и остали ученици експерименталне групе са оценама добар (3) и довољан (2) имају боље резултате од ученика контролне групе, а ученици експерименталне групе са оценом вр. добар (4) (M = 10,81; SD = 7,520) показали су највећу

разлику у резултату у односу на ученике са истом оценом из контролне групе (M = 0,46; SD = 1,414). Колики је ефекат експерименталног програма најбоље илуструје чињеница да је на финалном тесту ученик са оценом довољан (2) у експерименталној групи (M = 5,00; SD = 5,401) у просеку постигао бољи резултат од просечног резултата ученика са оценом одличан (5) из контролне групе (M = 3,66; SD = 6,116). Очигледно је да су ученици експерименталне групе након експерименталног програма постигли боље резултате, али треба проверити да ли то побољшање зависи од оцене коју ученик има. Да бисмо утврдили да ли когнитивно-визуелни приступ стицању компетенција ученика за решавање аритметичких проблема утиче на постигнуће ученика на тесту у односу на њихову оцену из математике, користили смо двофакторску анализу коваријансе.

Табела 29. *Двофакторска анализа коваријансе иницијалног и финалног мерења постигнућа ученика у решавању аритметичких проблема у односу на оцену из математике*

Зависна променљива: Финални тест (аритметика)

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	3826,367[a]	8	478,296	12,795	0,000	0,381
Intercept	1842,049	1	1842,049	49,277	0,000	0,229
Иницијални тест (аритметика)	496,944	1	496,944	13,294	0,000	0,074
Оцена	119,673	3	39,891	1,067	0,365	0,019
Група	1509,724	1	1509,724	40,387	0,000	0,196
Оцена * Група	141,302	3	47,101	1,260	0,290	0,022
Error	6205,370	166	37,382			
Total	17085,000	175				
Corrected Total	10031,737	174				

a. R Squared = 0,381 (Adjusted R Squared = 0,352)

Двофакторском анализом коваријансе у Табели 29 утврдили смо да не постоји статистички значајан утицај оцене из математике на резултате у финалном тестирању компетенција ученика за решавање аритметичких проблема ако је ковариjат иницијално тестирање истих компетенција ($F(3,166) = 1,260$; $p = 0,290$). Парцијални ета квадрат у овом случају износи 0,022 и представља веома мали утицај оцене из математике (2,2%) на резултате финалног теста компетенција ученика за решавање аритметичких проблема.

Добијени резултати потврђују да когнитивно-визуелни приступ у настави аритметике позитивно утиче на развијање компетенција ученика за решавање проблема и да те компетенције не зависе од оцене коју ученици имају из математике. У експерименталној групи која је радила по посебном програму користећи поменути приступ настави приметни су бољи резултати на финалном тесту, чак и ученици са нижим оценама постигли су боље резултате од ученика контролне групе. Анализирајући добијене резултате дошли смо до закључка да се когнитивно-визуелни приступ може успешно примењивати за развој компетенција за решавање аритметичких проблема код свих ученика без обзира на оцену из математике.

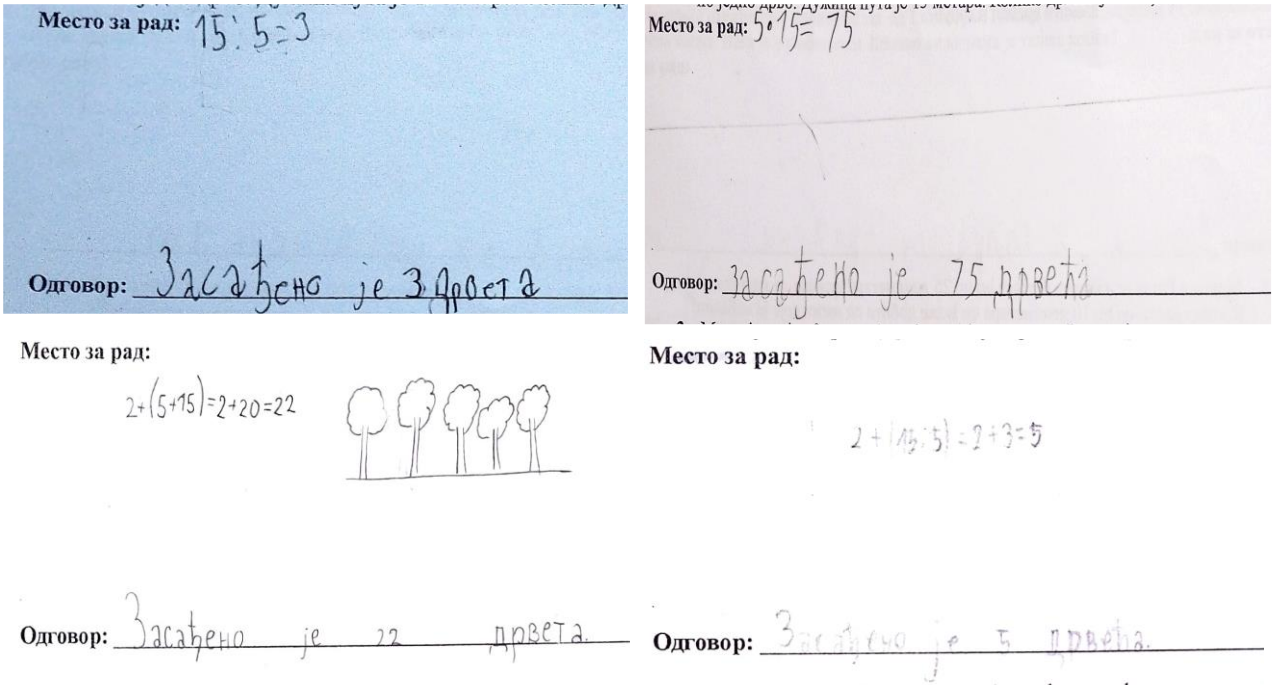
Овакав налаз, према којем когнитивно-визуелни модели показују највећу ефикасност управо код ученика са нижим формалним успехом, пружа снажан допринос научној расправи о тзв. компензаторној улози визуелизације. У настави аритметике, ученици са нижим оценама често имају проблема у домену радне меморије када покушавају да апстрактно процесирају податке. Увођењем шематских приказа, текст аритметичког проблема се екстернализује, чиме се значајно смањује когнитивно оптерећење ученика. Ови резултати су у потпуности у складу са поставкама когнитивне теорије мултимедијалног учења коју заступает Мајер (Mayer, 2005), а која наглашава да интеграција текстуалних и визуелних информација омогућава дубље концептуално разумевање и помаже ученицима са нижим предзнањем да лакше изграде тачне когнитивне шеме. Слично томе, у области решавања текстуалних аритметичких задатака, Елиа и сарадници (Elia et al., 2007) су показали да хијерархијски и релациони дијаграми директно помажу ученицима који иначе имају потешкоћа у математици да превазиђу баријеру неразумевања текстуалног контекста задатка. Поред тога, чињеница да су ученици са нижим оценама у експерименталној групи надмашили своје вршњаке из контролне групе потврђује тезу коју наводе Килпатрик и сарадници (Kilpatrick et al., 2001) да традиционални математички програми пренаглашавају рутинско рачунање на уштрб стратешке компетентности и концептуалног разумевања. Традиционални приступ тиме маргинализује ученике са лошијим оценама јер им не нуди алате за размишљање. Насупрот томе, когнитивно-визуелни приступ развија управо стратешку компетентност. Када се свим ученицима понуди визуелни алат за декомпозицију аритметичког проблема, почетне разлике у предзнању губе на значају, јер визуелизација постаје заједнички когнитивни именитељ који омогућава успешну кодификацију математичких релација. Ови налази пружају емпиријску подршку и домаћим ауторима који се залажу за превазилажење формализма у почетној настави аритметике кроз интезивније ослањање на визуелне семантичке моделе (Ђокић, 2013).

*****

Способност ученика да успешно реше задатке основни је показатељ нивоа математичког развоја ученика и разумевања математичког садржаја. Зато решавање задатака сматрамо основним и најважнијим елементом наставе математике. Узрок лошијих резултата ученика обе групе на иницијалном тестирању је сам приступ процесу решавања аритметичких проблема. Ученици најчешће настоје да, применом већ усвојених поступака и аритметичких операција, што брже дођу до решења, при чему недовољно пажње посвећују анализи самог задатка., а први корак у приступу процесу решавања мора бити анализа самог проблема (Дубљанин, 2010). Илустроваћемо на конкретним примерима решења задатака неке типичне грешке које су ученици правили приликом решавња

проблема у области аритметике. На слици 44 приказали смо неке од грешака при решавању првог задатка на иницијалном тесту.

Текст задатка: *На оба краја правог пута засађено је по једно дрво на сваких 5 метара пута још по једно дрво. Дужина пута је 15 метара. Колико је стабала дрвета засађено?*

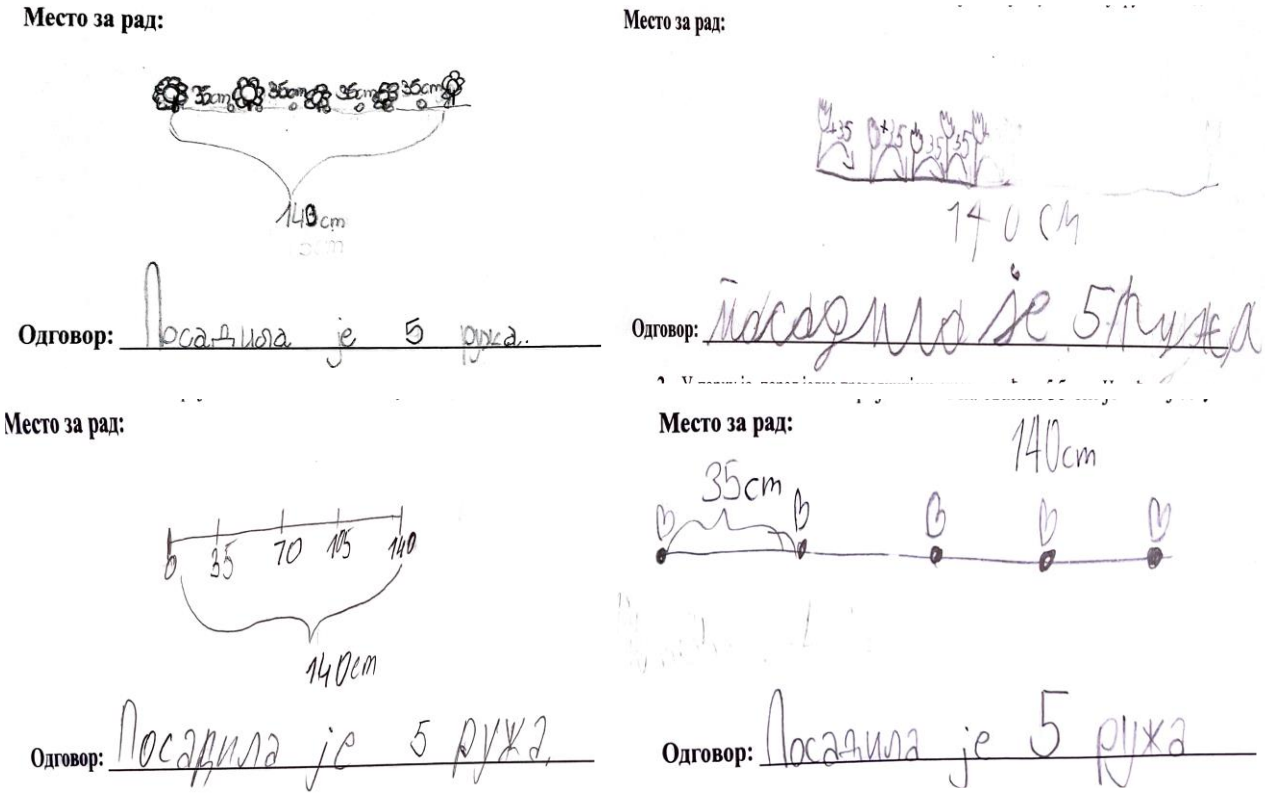


Слика 42. *Грешке при решавању првог задатака на иницијалном тесту*

Може се приметити да приликом решавања наведеног проблема ученици решавању приступају записивањем аритметичког израза. Видимо да је само у једном од наведених решења ученик покушао визуелно да представи проблем. Први погрешан резултат, три дрвета, добијен је механичким дељењем. Ученик је само поделио укупну дужину са размаком. Израчунао је број сегмената на путу, али је потпуно занемарио стабла на почетку и крају пута. Други наведен погрешан резултат, 75 стабала, добијен је погрешном операцијом насумичног множења. Ученик уопште не разуме суштину проблема. Видео је два броја у задатку (5 и 15) и механички их помножио, претпостављајући да тражени број мора бити велики. Трећи од наведених погрешних резултата, 22 дрвета, добијен је формалним комбиновањем бројева. Ученик је препознао реч "оба" као број 2, а затим сабрао све бројеве које је нашао у тексту: 2 + 5 + 15 = 22. Иако је нацртао дрвеће са стране, цртеж је остао само украс и није му помогао у рачуну. Последњи наведени погрешан резултат, 5 стабала, представља делимично разумевање. Ученик је успешно израчунао број размака (15 : 5 = 3), а затим је број 2 из речи "оба краја" механички додао на тај резултат (2 + 3 = 5). Тачан резултат у овом задатку имало је само 19 од укупно 175 ученика у узорку, а то је приближно 11%.

Површан одабир бројева и релационих кључних речи из текста задатка доводи до извршења погрешних аритметичких операција, а конструисање визуелне представе проблема у овом задатку би олакшало разумевање. Разумевање прочитаног, рачунске и математичке вештине су кључни фактори за решавање математичких проблема. Да би решили математички задатак ученицима су потребне вештине читања, посебно разумевање прочитаног и анализа текста (Liljedahl et al., 2016). После рада са ученицима на изради визуелних модела као потпоре у решавању пробелема ученици експерименталне групе су показали боље резултате у решавању одговарајућег првог задатка на финалном тесту јер су због конструкције визуелне репрезентације, коју користе као саставни део когнитивно-визуелног приступа, морали детаљније анализирати проблем као и сам текст задатка (слика 43).

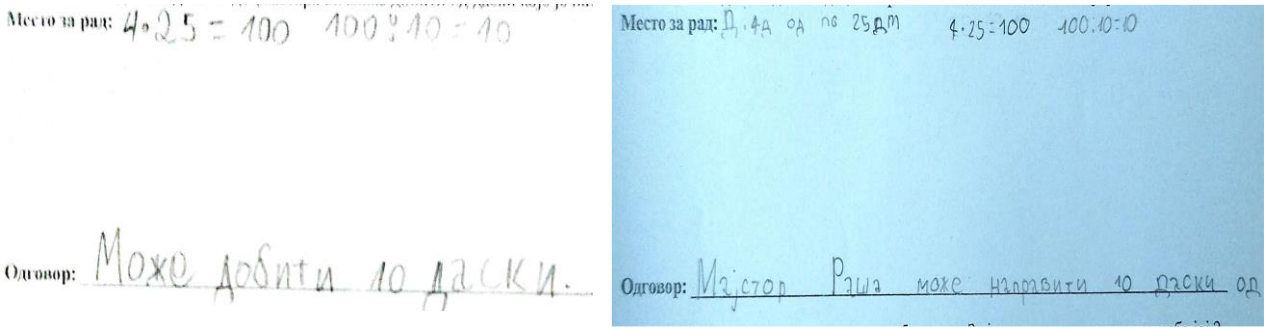
Текст задатка: *Уз стазу дугу 140 ст која води кроз двориште мама је посадила руже на почетак и крај стазе и на сваких 35 ст још по једну. Колико је ружа посадила?*



Слика 43. *Тачно решен први задатак на финалном тесту (експериментална група)*

Компетенције за решавање проблема подразумевају често и логичко резоновање које узима у обзир и сам контекст проблема. Добар пример таквог проблема је пети задатак теста из аритметике.

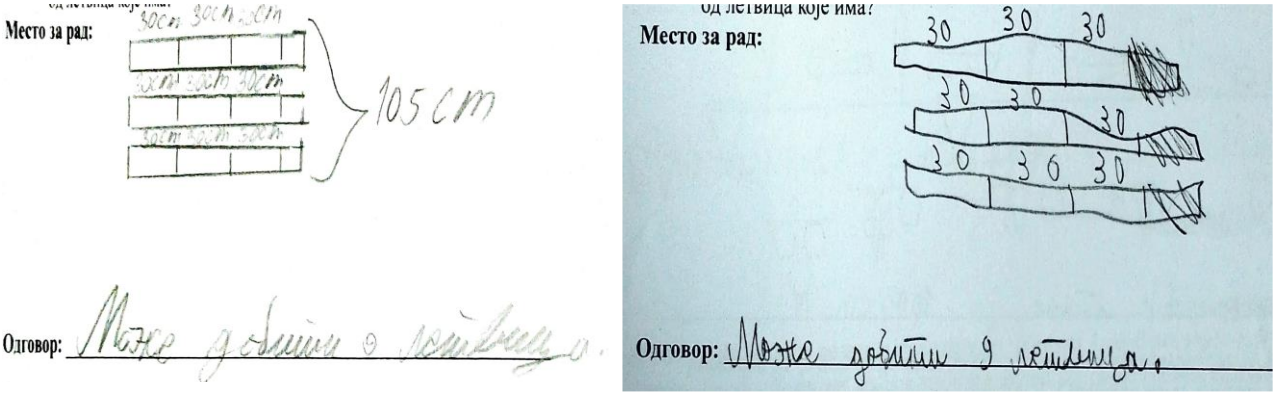
Текст задатка: *Мајстор Раша је набавио 4 даске од по 25 дециметара дужине да направи полицу. Колико даски од по 10 дециметара он може добити од даски које је набавио?*



Слика 44. *Погрешно решен пети задатак на иницијалном тесту*

На Слици 44 је приказан погрешно решен пети задатак са иницијалног теста. Ученик није размишљао о контексту задатка и није користио визуелизацију, од кратких делова даски не може се направити одговарајућа полица. На финалном тесту промењен је текст задатка али је контекст сличан одговарајућем задатку са иницијаног теста, а на Слици 45 приказан је тачан резултат добијен визуелизацијом проблема. Представљајући сваку од три дрвене летвице и приказом одсецања потребне дужине ученик је разумео проблем и добио тачно решење.

Текст задатка: *Дејан има 3 дрвене летвице дужине 105 центиметара. Да би направио рам за слику требају му летвице дужине 30 центиметара. Колико летвица за рам он може добити од летвица које има?*



Слика 45. *Тачно решен пети задатак на финалном тесту (експериментална група)*

Когнитивно-визуелни приступ при решавању аритметичких проблема трансформише визуелизацију из дидактичког помагала у примарну сазнајну стратегију за дешифровање математичких релација. Уместо да само извршава аритметичке операције, ученик се ангажује око просторне и логичке организације тако да је рачунска операција само завршна потврда већ конституисаног менталног модела.

Сви наведени и анализирани резултати не само да потврђују постављену хипотезу да *когнитивно-визуелни приступ доприноси развијању компетенција ученика за решавање проблема у области аритметике* већ и да нема разлике у развијању наведених компетенција код дечака и девојчица као и код ученика са различитим оценама из математике.

На основу теоријске анализе и емпиријских налаза који потврђују да когнитивно-визуелни приступ делује као примарна сазнајна стратегија, потпуно независно од пола ученика и њиховог општег постигнућа из математике, произлазе значајне импликације за образовну праксу, као и конкретне смернице за креаторе образовних политика и саме практичаре. Прва и најважнија импликација односи се на демократизацију и инклузивност наставе математике. С обзиром на то да резултати показују одсуство разлика у развијању компетенција за решавање аритметичких проблема код дечака и девојчица, као и код ученика са различитим оценама, когнитивно-визуелни приступ се афирмише као снажан хомогенизујући фактор. Он успева да превазиђе традиционалне баријере и стереотипе, нудећи сваком ученику једнаку когнитивну основу за разумевање математичких релација, што директно утиче на смањење тзв. "математичке анксиозности". Друга импликација захтева редефинисање улоге наставника. Наставник у оваквом моделу престаје да буде пуки демонстратор рачунских алгоритама и репродуктивног знања, већ постаје дизајнер подстицајног когнитивног простора. Оваква пракса суштински помера фокус са пасивног меморисања процедура на активно ментално моделирање, чиме се настава математике трансформише из репродуктивне у продуктивну и стваралачку делатност (Goldin, 2002).

Да би се потенцијал когнитивно-визуелног приступа максимално искористио, неопходно је спровести неколико системских измена у тренутном концепту наставе аритметике. Наставна пракса не сме пребрзо и прерано прелазити на ниво чисте симболичке апстракције. Препоручујемо дужу и структурално богатију примену когнитивно-визуелних модела, као што су дечији цртеж, модел ваге и модел правоугаоника, који служе као прелазни мост ка апстрактном мишљењу. Савремени уџбеници у делу који се односи на аритметику треба да садрже мање задатака који подстичу механичко рачунање, а знатно више оних који експлицитно захтевају превод текстуалне или семантичке информације у визуелни модел и обратно (Verschaffel et al., 2000). Задаци морају бити дизајнирани тако да стимулишу просторну и логичку организацију проблема. Такође и у процесу оцењивања ученика, већи значај потребно је дати процесу изградње менталног модела, стратегији дешифровања релација и квалитету визуелне репрезентације проблема, у односу на тачност финалног рачунског исхода.

3. УТИЦАЈ КОГНИТИВНО-ВИЗУЕЛНОГ ПРИСТУПА НА РАЗВИЈАЊЕ КОМПЕТЕНЦИЈА УЧЕНИКА ЗА РЕШАВАЊЕ АЛГЕБАРСКИХ ПРОБЛЕМА

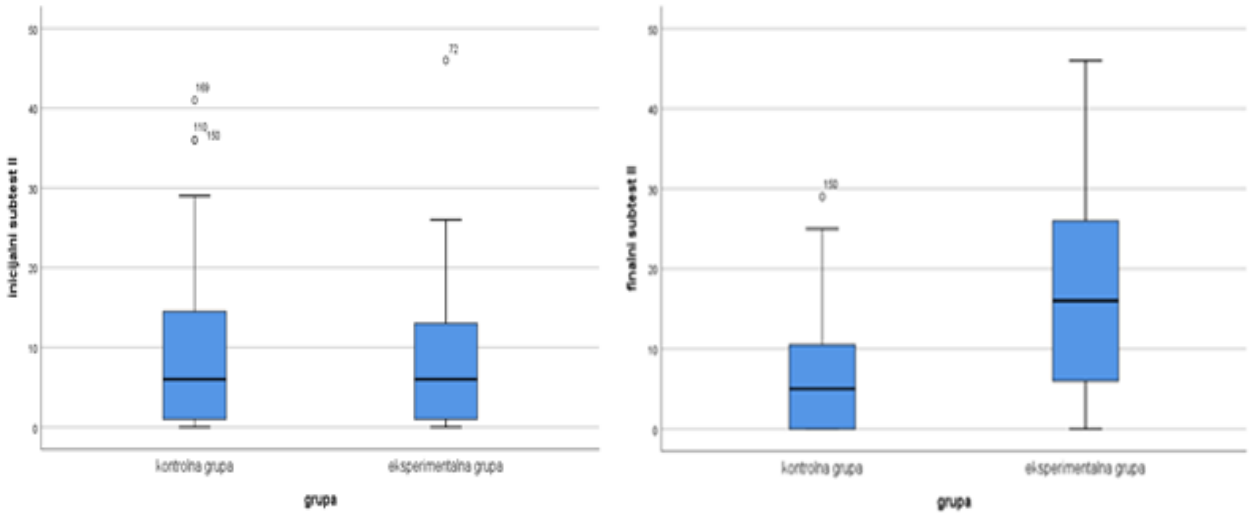
Трећи истраживачки задатак је да утврдимо ефекте примене когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција ученика за решавање проблема у области алгебре. Ефекте когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција за решавање алгебарских проблема пратили смо кроз ученичка постигнућа на другом субтесту, а затим смо испитали да ли су ефекти исти код ученика различитог пола и код ученика са различитом оценом из математике. Истраживањем смо тестирали трећу хипотезу: *Когнитивно-визуелни приступ доприноси развијању компетенција ученика за решавање проблема у области алгебре*.

На иницијалном мерењу постигнућа ученика у решавању проблема у области алгебре обе групе су постигле приближно исте резултате: експериментална група M = 7,57; SD = 8,627 и контролна група мало успешнија са M = 9,05; SD = 9,779 (Табела 30).

Табела 30. *Дескриптивни показатељи постигнућа ученика експерименталне и контролне групе при решавању проблема у области алгебре на иницијалном и финалном мерењу*

Тест		N	M	SD
Иницијални тест	Експериментална група	91	7,57	8,627
	Контролна група	84	9,05	9,779
	Укупно	175	8,28	9,201
Финални тест	Експериментална група	91	17,10	13,414
	Контролна група	84	6,51	7,344
	Укупно	175	12,02	12,122

Ако погледамо резултате на финалном тесту, након експерименталног програма, примећујемо да је експериментална група постигла боље резултате у односу на иницијално мерење (M = 17,10; SD = 13,414) док је контролна група постигла чак и слабији резултат од резултата на иницијалном тесту (M = 6,51; SD = 7,344). Наведене разлике постигнућа међу групама на иницијалном и финалном мерењу као и очигледност напретка експерименталне групе могу се представити правоугаоним дијаграмом (Графикон 5).



Графикон 5. *Правоугаони дијаграм резултата иницијалног и финалног теста у решавању алгебарских проблема*

Како бисмо утврдили да ли су разлике у постигнућу ученика експерименталне и контролне групе које су остварене на финалном мерењу из области алгебре статистички значајне користили смо једнофакторску анализу варијансе (ANOVA). У Табели 31 приказани су резултати Левеновог теста хомогености варијансе, а у Табели 32 анализа варијансе иницијалног и финалног мерења за алгебарске проблеме.

Табела 31. *Левенов тест хомогености варијансе иницијалног и финалног мерења за аритметичке проблеме*

Тест	Levene Statistic	df1	df2	Sig.
Иницијални тест	1,565	1	173	0,213
Финални тест	35,421	1	173	0,000

Табела 32. *Анализа варијансе иницијалног и финалног мерења за алгебарске проблеме*

Тест		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Иницијални тест	Између група	95,185	1	95,185	1,125	0,290
	Унутар групе	14636,095	173	84,602		
	Укупно	14731,280	174			
Финални тест	Између група	4895,851	1	4895,851	40,974	0,000
	Унутар групе	20671,098	173	119,486		
	Укупно	25566,949	174			

Вредност варијансе на иницијалном мерењу за алгебарске проблеме (F (1, 173) = 1,125; p = 0,290) показује да не постоје статистички значајне разлике у постигнућима ученика експерименталне и контролне групе (Табела 32). Наведени резултати су поуздани јер Левенов тест хомогености варијансе (F = 1,565; p = 0,213) потврђује да није прекршена претпоставка о хомогености варијансе (Табела 31).

Варијанса израчуната у финалном мерењу (F (1,173) = 40,974; p = 0,000) показује да постоји статистички значајна разлика између експерименталне и контролне групе (Табела 32), али вредност Левеновог теста хомогености варијансе за финално мерење (F = 35,421; p = 0,000) (Табела 31) не потврђује претпоставку о хомогености варијансе. Да би се резултат анализе варијансе за финално мерење могао сматрати поузданим користили смо два теста Велчов (Welch's ANOVA) и Браун-Форсајтов (Brown-Forsythe) тест који су отпорни на нарушавање претпоставке о хомогености варијансе (Табела 33). Оба теста су потврдила постојање значајне разлике у постигнућима ученика експерименталне и контролне групе на финалном тесту из алгебре (F = 42,789; p = 0,000).

Табела 33. *Велчов и Браун-Форсајтов тест финалног мерења за алгебарске проблеме*

	Statistic[a]	df1	df2	Sig.
Welch	42,789	1	141,738	0,000
Brown-Forsythe	42,789	1	141,738	0,000

a. Asymptotically F distributed.

Резултати које смо добили у истраживању нам потврђују да су ученици експерименталне групе након примене когнитивно-визуелног приступа у оквиру експерименталног програма побољшали своје компетенција за решавање алгебарских проблема и тако остварили боља постигнућа на финалном тесту од ученика контролне групе који су радили без промена. Да би додатно оправдали резултате једнофакторске анализе (ANOVA), због раније поменуте нарушене нормалности расподеле, користили смо и алтернативни непараметарски Ман Витнијев У тест (Mann-Whitney U). Резултати дати у Табели 34 потврђују да на иницијалном тесту из алгебре није било значајне разлике међу групама (p = 0,456) док резултати за финални тест показују значајну разлику међу групама (p = 0,000). Статистички показатељ величине утицаја r може се приближно одредити тако што се вредност Z подели са квадратним кореном броја тестираних ученика. Величина утицаја за финални тест је r = 0,434 што се сматра већим утицајем према Коеновом (Cohen, 1988) критеријуму (0,1 мали утицај; 0,3 средњи утицај; 0,5 велики утицај) док је величина утицаја за иницијални тест r = 0,056.

Табела 34. *Ман Витнијев У тест за алгебру*

Test Statistics[a]

	Иницијални тест
Mann-Whitney U	3574,500
Wilcoxon W	7760,500
Z	-0,746
Asymp. Sig. (2-tailed)	0,456

a. Grouping Variable: група

Test Statistics[a]

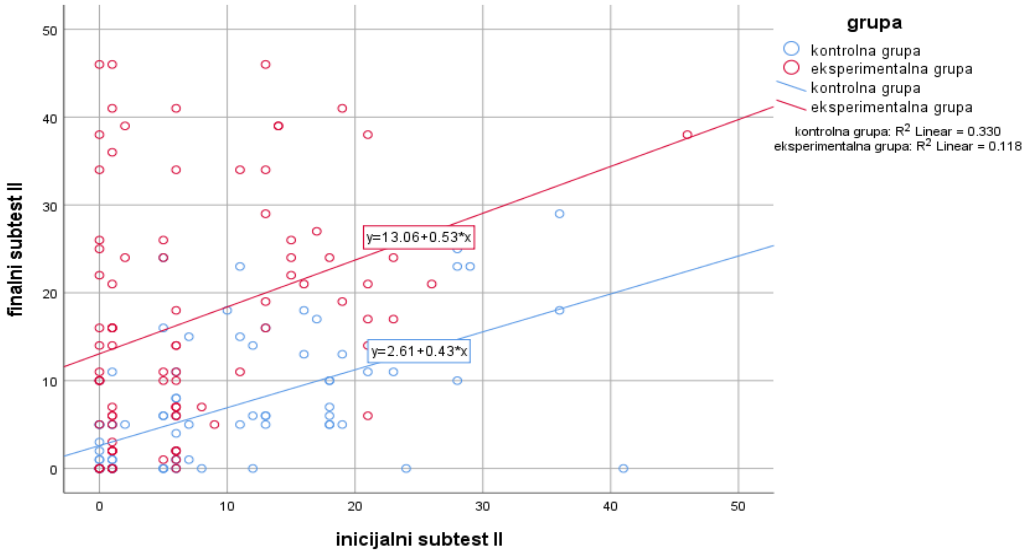
	Финални тест
Mann-Whitney U	1907,000
Wilcoxon W	5477,000
Z	-5,745
Asymp. Sig. (2-tailed)	0,000

a. Grouping Variable: група

Да бисмо потврдили поузданост наших резултата мерења користили смо и анализу коваријансе (ANCOVA) и на тај начин отклонили и најмању сумњу у неуједначеност експерименталне и контролне групе. Истражили смо разлике између група, уз статистичко отклањање утицаја резултата иницијалног мерења.

Поузданост коваријата, односно резултата иницијалног теста, утврђена је раније одређивањем Кронбах алфа коефицијента (Табела 6). Коваријат је измерен пре почетка експерименталног програма.

Линеарност између зависне променљиве и коваријата проверили смо помоћу дијаграма растурања (Графикон 6). На дијаграму примећујемо да је однос зависне променљиве и коваријата, у обе групе, линеаран (праволинијски) на основу чега закључујемо да претпоставка о линеарности није нарушена.



Графикон 6. *Дијаграм растурања за проверу линеарности између иницијалног и финалног теста постигнућа ученика у области алгебре*

Проверили смо хомогеност регресионих нагиба и утврдили да нема интеракције између ковријата и експерименталног програма. Статистичка провера ове претпоставке представљена је у Табели 35. Претпоставка о хомогености регресионих нагиба није нарушена јер вредност интеракције између ковријата и зависне променљиве (F = 0,370; p = 0,544) није статистички значајна.

Табела 35. *Хомогеност регресионих нагиба*

Зависна променљива: Финални тест (алгебра)

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	8280,043[a]	3	2760,014	27,302	0,000
Intercept	5877,277	1	5877,277	58,137	0,000
Група	2617,518	1	2617,518	25,892	0,000
Иницијални тест	3382,758	1	3382,758	33,462	0,000
Група * Иницијални тест	37,444	1	37,444	0,370	0,544
Error	17286,905	171	101,093		
Total	50839,000	175			
Corrected Total	25566,949	174			

a. R Squared = 0,324 (Adjusted R Squared = 0,312)

Након провере свих потребних претпоставки можемо наставити анализу коваријансе у истраживању разлика између експерименталне и контролне групе у области алгебре. Након статистичког уклањања утицаја резултата иницијалног теста утврђена је значајна разлика у резултатима експерименталне и контролне групе на финалном тесту обављеном након реализације експерименталног програма ($F = 54,948$; $p = 0,000$) (Табела 36). Подаци из табеле потврђују да разлике на тестовима нису резултат неуједначености група већ резултат настао утицајем експерименталног програма који је примењен у експерименталној групи. Парцијални ета квадрат (Partial Eta Squared) одређује величину утицаја и показује нам који део варијансе у финалном тесту објашњава независна променљива односно група. Парцијални ета квадрат је 0,242 што значи да се 24,2% варијансе у финалном мерењу може објаснити утицајем когнитивно-визуелног приступа решавању алгебарских проблема кроз експериментални програм у експерименталној групи.

Табела 36. *Анализа коваријансе између иницијалног и финалног мерења за алгебру*

Независна променљива: Финални тест (алгебра)

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	8242,599[a]	2	4121,300	40,917	0,000	0,322
Intercept	5874,706	1	5874,706	58,325	0,000	0,253
Иницијални тест	3346,749	1	3346,749	33,227	0,000	0,162
Група	5534,493	1	5534,493	54,948	0,000	0,242
Error	17324,349	172	100,723			
Total	50839,000	175				
Corrected Total	25566,949	174				

a. R Squared = 0,322 (Adjusted R Squared = 0,315)

На основу анализе добијених резултата можемо закључити да когнитивно-визуелни приступ коришћен у експерименталној групи у оквиру експерименталног програма позитивно утиче на развијање компетенција ученика за решавање проблема у области алгебре. Тиме потврђујемо и постављену хипотезу: *Когнитивно-визуелни приступ доприноси развијању компетенција ученика за решавање проблема у области алгебре.*

Истраживање о утицају когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција ученика за решавање алгебарских проблема проширићемо анализом утицаја који тај приступ постиже код ученика различитог пола и ученика са различитом оценом из математике.

3.1. Утицај когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција ученика за решавање алгебарских проблема у зависности од пола

У нашем даљем истраживању утврдићемо да ли настава усмерена на коришћење когнитивно-визуелног приступа решавању проблема развија компетенције ученика за решавање алгебарских проблема без обзира на пол. У Табели 37 приказани су просечни резултати које су постигли ученици мушког и женског пола на мерењу постигнућа за решавање алгебарских проблема.

Табела 37. *Постигнућа дечака и девојчица у решавању алгебарских проблема на тестовима*

Група	Пол	Иницијални тест		Финални тест		Укупно
		M	SD	M	SD	N
Експериментална група	Дечаци	10,40	9,816	16,55	11,906	40
	Девојчице	5,35	6,884	17,53	14,591	51
	Укупно	7,57	8,627	17,10	13,414	91
Контролна група	Дечаци	8,28	9,425	6,33	7,081	46
	Девојчице	9,97	10,242	6,74	7,741	38
	Укупно	9,05	9,779	6,51	7,344	84
Укупно	Дечаци	9,27	9,611	11,08	10,858	86
	Девојчице	7,33	8,736	12,92	13,228	89
	Укупно	8,28	9,201	12,02	12,122	175

Анализом вредности из Табеле 37 примећујемо да су дечаци на иницијалном тесту (M = 9,27; SD = 9,611) постигли у просеку боље резултате од девојчица (M = 7,33; SD = 8,736). Посматрајући по групама дечаци су приметно успешнији у експерименталној групи (M = 10,40; SD = 9,816) од девојчица (M = 5,35; SD = 6,884) док су у контролној групи девојчице (M = 9,97; SD = 10,242) по просеку успешније од дечака (M = 8,28; SD = 9,425). Уочавамо да су дечаци експерименталне групе на иницијалном мерењу успешнији од дечака контролне групе, док за девојчице важи обрнуто, девојчице контролне групе су успешније од девојчица из експерименталне групе.

На финалном тесту ситуација у експерименталној групи се променила, сада девојчице (M = 17,53; SD = 14,591) имају у просеку боља постигнућа од дечака (M = 16,55; SD = 11,906) док су у контролној групи постигнућа дечака

(M = 6,33; SD = 7,081) и девојчица (M = 6,74; SD = 7,741) приближно иста. Ако посматрамо укупно постигнуће на финалном тесту девојчице (M = 12,92; SD = 13,228) су у просеку успешније од дечака (M = 11,08; SD = 10,858). Да су наведене разлике у постигнућима између дечака и девојчица статистички незначајне утврдили смо користећи двофакторску анализу коваријансе иницијалног и финалног мерења у области алгебре.

Табела 38. *Двофакторска анализа коваријансе иницијалног и финалног мерења постигнића ученика у решавању алгебарских проблема у односу на пол*

Зависна променљива: финални тест (алгебра)

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	8515,257[a]	4	2128,814	21,224	0,000	0,333
Intercept	5106,009	1	5106,009	50,905	0,000	0,230
Иницијални тест	3594,391	1	3594,391	35,835	0,000	0,174
Пол	102,175	1	102,175	1,019	0,314	0,006
Група	5333,536	1	5333,536	53,174	0,000	0,238
Пол * Група	165,349	1	165,349	1,648	0,201	0,010
Error	17051,692	170	100,304			
Total	50839,000	175				
Corrected Total	25566,949	174				

a. R Squared = 0,333 (Adjusted R Squared = 0,317)

Двофакторском анализом коваријансе (Табела 38) утврдили смо да не постоји статистички значајан утицај пола на резултате у финалном мерењу компетенција ученика за решавање алгебарских проблема ако је коваријат иницијално мерење истих компетенција (F(1,170) = 1,648; p = 0,201). Парцијални ета квадрат у овом случају износи 0,010 и представља веома мали утицај пола (1%) на резултате финалног мерења компетенција ученика за решавање алгебарских проблема.

На основу анализе добијених резултата закључујемо да когнитивно-визуелни приступ развијању компетенција ученика за решавање алгебарских математичких проблема можемо успешно користити у настави и са дечацима и са девојчицама. Ученици оба пола показују боља постигнућа на тестирању након имплементације експерименталног програма у односу на дечаке и девојчице који су учили по класичном програму.

3.2. Утицај когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција ученика за решавање алгебарских проблема у зависности од оцене из математике

Утврдићемо да ли настава усмерена на коришћење когнитивно-визуелног приступа при решавању проблема развија компетенције ученика за решавање алгебарских проблема независно од оцене коју имају из математике. У Табели 39 приказани су просечни резултати које су ученици различите оцене из математике постигли на мерењу постигнућа за решавање алгебарских проблема.

Табела 39. *Постигнућа ученика различите оцене из математике на тестовима са алгебарским проблемима*

Група	Оцена	Иницијални тест		Финални тест		Укупно
		M	SD	M	SD	N
Експериментална група	Одличан(5)	14,56	10,497	21,15	12,925	27
	Вр.добар(4)	5,69	5,986	18,13	13,319	32
	Добар(3)	5,58	5,601	14,37	12,212	19
	Довољан(2)	0,62	1,387	10,15	14,206	13
	Укупно	7,57	8,627	17,10	13,414	91
Контролна група	Одличан(5)	13,09	10,541	9,11	8,445	47
	Вр.добар(4)	5,33	6,176	4,21	3,934	24
	Добар(3)	1,33	2,598	2,00	2,345	9
	Довољан(2)	1,25	2,500	0,00	0,000	4
	Укупно	9,05	9,779	6,51	7,344	84

На основу резултата из Табеле 39 можемо приметити да су ученици са оценом добар (3) из експерименталне групе на иницијалном тесту (M = 5,58; SD = 5,601) постигли бољи просечан резултат него ученици са истом оценом из контролне групе (M = 1,33; SD = 2,598). Остали резултати по оценама на иницијалном тестирању су приближно исти.

Ако погледамо резултате на финалном тесту уочавамо значајне разлике између резултата ученика експерименталне и ученика контролне групе по свим оценама. Ученици експериметалне групе са оценом добар (3) (M = 14,37; SD = 12,212) имају и даље бољи резултат на тесту од ученика контролне групе са истом оценом (M = 2,00; SD = 2,345), али и остали ученици експерименталне групе са оценама одличан (5) и довољан (2) имају боље резултате од ученика контролне групе, а ученици експерименталне групе са оценом вр.

добар (4) (M = 18,13; SD = 13,319) показали су највећу разлику у резултату у односу на ученике са истом оценом из контролне групе (M = 4,21; SD = 3,934). Колики је ефекат експерименталног програма најбоље потврђује чињеница да је на финалном тесту ученик са оценом довољан (2) у експерименталној групи (M = 10,15; SD = 14,206) у просеку постигао бољи резултат од просечног резултата ученика са оценом одличан (5) из контролне групе (M = 9,11; SD = 8,445). Очигледно је да су ученици експерименталне групе након експерименталног програма постигли боље резултате, али треба проверити да ли тај резултат зависи од оцене коју ученик има из математике. Да бисмо утврдили да ли когнитивно-визуелни приступ стицању компетенција ученика за решавање алгебарских проблема утиче на постигнуће ученика у зависности од њихове оцене из математике, користили смо двофакторску анализу коваријансе.

Табела 40. *Двофакторска анализа коваријансе иницијалног и финалног мерења постигнућа ученика у решавању алгебарских проблема у односу на оцену из математике*

Зависна променљива: Финални тест (алгебра)

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared
Corrected Model	8719,797[a]	8	1089,975	10,740	0,000	0,341
Intercept	4272,220	1	4272,220	42,095	0,000	0,202
Иницијални тест	1782,295	1	1782,295	17,561	0,000	0,096
Оцена	273,311	3	91,104	0,898	0,444	0,016
Група	3424,929	1	3424,929	33,747	0,000	0,169
Оцена * Група	67,395	3	22,465	0,221	0,881	0,004
Error	16847,152	166	101,489			
Total	50839,000	175				
Corrected Total	25566,949	174				

a. R Squared = 0,341 (Adjusted R Squared = 0,309)

На основу двофакторске анализе коваријансе приказане у Табели 40 можемо утврдити да не постоји статистички значајан утицај оцене из математике на резултате у финалном тестирању компетенција ученика за решавање алгебарских проблема ако је ковариjат иницијално тестирање истих компетенција (F(3,166) = 0,221; p = 0,881). Парцијални ета квадрат у овом случају износи 0,004 и представља веома мали утицај оцене из математике (0,4%) на резултате финалног теста компетенција ученика за решавање алгебарских проблема.

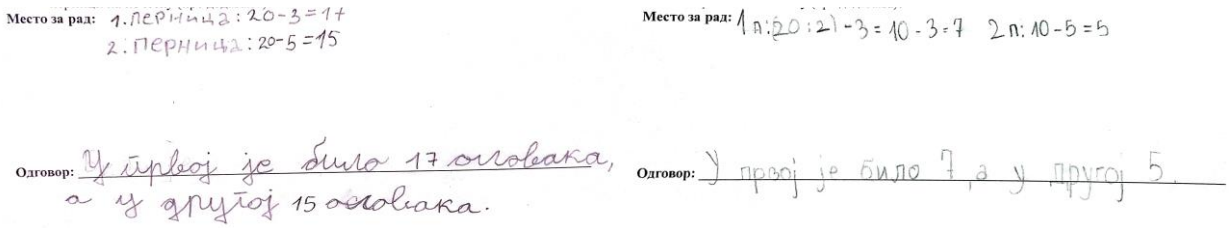
Добијени резултати у овом делу истраживања потврђују да когнитивно-визуелни приступ у настави алгебре позитивно утиче на развијање компетенција ученика за решавање проблема из те области и да стечене компетенције ученика не зависе од оцене коју имају из математике. У експерименталној групи која је радила по посебном програму користећи поменути приступ решавању алгебарских проблема приметни су бољи резултати на финалном тесту, чак и ученици са нижим оценама постигли су боље резултате од ученика контролне групе. Закључујемо да се когнитивно-визуелни приступ може успешно примењивати за развој компетенција за решавање алгебарских проблема код свих ученика без обзира на оцену из математике.

*****

Постоји више фактора који утичу на способност ученика да решавају текстуалне задатке из алгебре, а један од њих је разумевање и сагледавање услова у тексту задатака, односа и релација међу елементима садржаја задатка, сагледавање услова и тражених елемената задатка. Други фактор односи се на препознавање и замишљање контекста у ком је проблем постављен и трећи је трансформација писане речи у математичке операције, односно исказа алгебарског проблема у нумерички облик.

Потешкоће са читањем и разумевањем текста алгебарског проблемског задатка анализираћемо на примеру четрнаестог задатка са иницијалног теста.

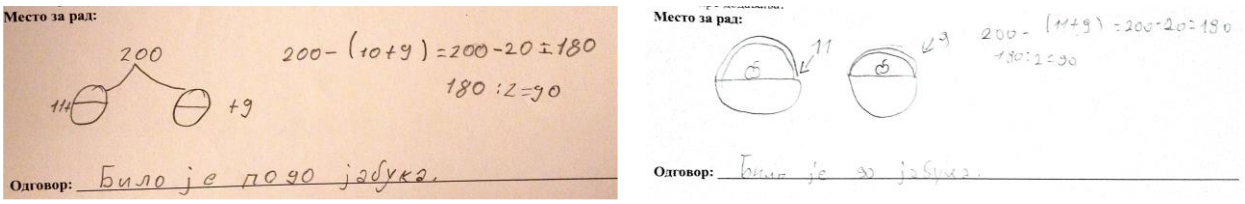
Текст задатка: *У две пернице био је исти број оловака. Кад смо у прву перницу додали још 3, а у другу још 5 оловака, тада је у обе пернице било укупно 20 оловака. По колико је оловака било у свакој перници на почетку (пре додавања)?*



Слика 46. *Погрешна решења четрнаестог задатка на иницијалном тесту*

У наведеним погрешним решењима (Слика 46) ученик се при решавању фокусира на делове реченица, “исти број оловака” и “у обе пернице било укупно 20 оловака”. Не разуме текст проблема и не прати ток и хролошки редослед промена у самом задатку. Када ученици науче да детаљно анализирају текст задатка и илуструју га цртежом или моделом са унетим релацијским односима грешке се ретко дешавају. На Слици 47 је решење четрнаестог задатка са финалног теста ученика експерименталне групе на ком се јасно види разумевање проблема кроз његову илустрацију и пут до тачног решења.

Текст задатка: *У две корпе имамо исти број јабука. Када у прву корпу додамо још 11, а у другу још 9 јабука, тада у обе корпе укупно имамо 200 јабука. По колико је јабука било у свакој корпи пре додавања?*

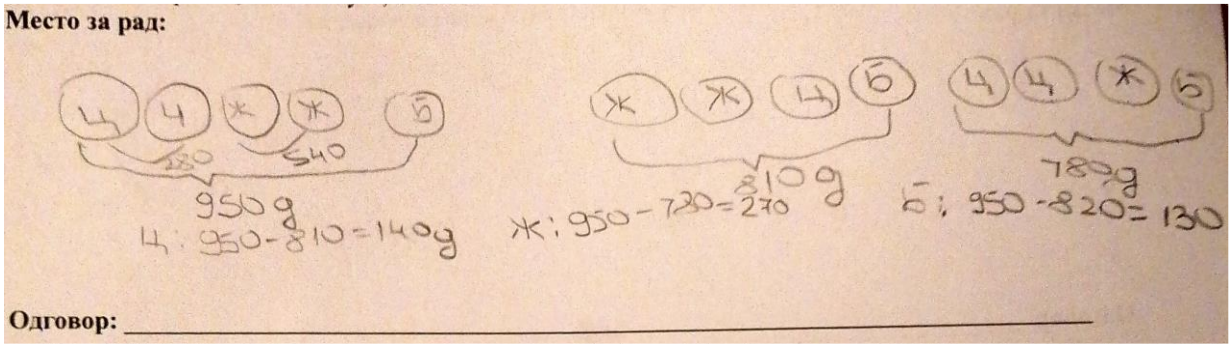


Слика 47. *Тачно решен четрнаести задатак на финалном тесту експериментална група*

Препознавање и замишљање контекста у ком је проблем постављен је други фактор који утиче на способност ученика да реши алгебарске проблеме. Представља фундаментални фактор који обликује способност ученика нижих разреда да дешифрују алгебарске релације. На овом развојном степену, визуелизација контекста делује као кључни посредник између природног језика и математичког симболизма, омогућавајући ученику да конструише кохерентан ментални модел проблемске ситуације (Pape, Tchoshanov, 2001).

Трећи наведени фактор који утиче на способност ученика да решавају текстуалне алгебарске проблеме је трансформација писане речи у математичке операције, односно исказа алгебарског проблема у нумерички облик. Помоћ визуелизације при превођењу текста задатка у алгебарски израз може се уочити при решавању десетог задатка на финалном тесту, а поступак успешног превођења из алгебарског у нумерички облик уз коришћење одговарајућег визуелног модела приказан је на слици 48.

Текст задатка: *Две црвене, две жуте и једна бела лопта укупно имају 950 грама. Две жуте, црвена и бела лопта имају 810 грама. Две црвене, жута и бела лопта имају 780 грама. Колико грама је тешка црвена, колико жута, а колико бела лопта?*



Слика 48. *Тачно решен десети задатак на финалном тесту експериментална група*

Добијени резултати показују да когнитивно-визуелни приступ статистички значајно доприноси успешности решавања алгебарских задатака, независно од пола ученика и њиховог општег математичког постигнућа односно оцене. Овакав налаз пружа снажну подршку когнитивној *Теорији двоструког кодирања* (Paivio, 1986), која сугерише да се информације истовремено процесирају кроз вербални (симболички) и визуелни канал. Када ученици решавају апстрактне алгебарске проблеме, чисто симболички запис често ствара превелико когнитивно оптерећење. Увођењем визуелних репрезентација, когнитивни систем ученика добија додатни извор значења, чиме се олакшава концептуализација апстрактних математичких релација.

Када је реч о утицају пола, наши резултати показују да когнитивно-визуелни приступ помаже и дечацима и девојчицама у подједнакој мери. У литератури се неретко појављују расправе о родно условљеним разликама у спацијалним и визуелним вештинама, међутим наше истраживање потврђује ставове аутора Лоурија и Дизманове (Lowrie, Diezmann, 2011), који наглашавају да када се визуелне стратегије експлицитно и методички правилно интегришу у наставу, оне имају родно-неутралан карактер и пружају једнаке шансе за развој математичких компетенција код оба пола.

Посебно значајан допринос овог рада огледа се у томе што је ефикасност приступа потврђена независно од претходне оцене из математике. Традиционално се сматра да су визуелизације или сувишне за напредне ученике (који брзо апстрахују) или претешке за ученике са слабијим постигнућем који се муче са просторном репрезентацијом. Наши налази демантују ове претпоставке и у складу су са истраживањима Киранове (Kieran, 2004), која указују на то да већина ученичких грешака у алгебри не потиче из лошег рачуна, већ из суштинског неразумевања значења знакова, алгебарских структура и операција. Когнитивно-визуелни приступ делује као моћна наставна подршка (scaffolding), која слабијим ученицима омогућава материјализацију апстрактних појмова, док ученицима са одличним оценама помаже да развију дубљу концептуалну мрежу знања, уместо пуког процедуралног решавања алгоритама. Овиме се потврђују и ставови које наводи Ђокић (Ђокић, 2013) о неопходности превазилажења формализма у настави кроз пажљиво одабране визуелне наставне медије.

4. УТИЦАЈ КОГНИТИВНО-ВИЗУЕЛНОГ ПРИСТУПА НА РАЗВИЈАЊЕ КОМПЕТЕНЦИЈА УЧЕНИКА ЗА ВИЗУЕЛИЗАЦИЈУ ПРОБЛЕМА

Четврти истраживачки задатак односи се на испитивање ефеката примене когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција ученика за визуелизацију проблема. Ефекте когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција за визуелизацију проблема пратили смо кроз учесталост коришћења визуелних репрезентација у виду сликовних и шематских цртежа направљених од стране ученика. Није свеједно који тип цртежа ученик користи јер коришћење шематског цртежа потврђује нам свесност ученика о значају релацијских односа и разумевању проблема. Овим истраживањем смо тестирали четврту хипотезу: *Когнитивно-визуелни приступ доприноси развијању компетенција ученика за визуелизацију проблема*. Пратили смо утицај експерименталног програма на развијеност компетенција ученика за решавање проблема у виду коришћења визуелних репрезентација у области садржаја аритметике и алгебре.

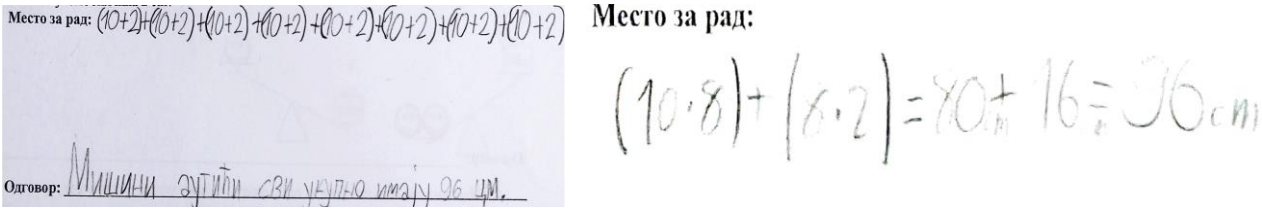
Табела 41. *Дескриптивни показатељи учесталости коришћења визуелних репрезентација међу ученицима контролне и експерименталне групе на иницијалном тесту на садржајима аритметике*

Иницијални тест												
	Контролна група						Експериментална група					
Редни број задатка	Без цртежа		Сликовни цртеж		Шематски цртеж		Без цртежа		Сликовни цртеж		Шематски цртеж	
	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N
1.	63,1	53	29,8	25	7,1	6	79,1	72	8,8	8	12,1	11
2.	77,4	65	19	16	3,6	3	91,2	83	5,5	5	3,3	3
3.	76,2	64	19	16	4,8	4	96,7	88	0	0	3,3	3
4.	77,4	65	16,7	14	6	5	92,3	84	2,2	2	5,5	5
5.	83,3	70	15,5	13	1,2	1	96,7	88	3,3	3	0	0
6.	83,3	70	13,1	11	3,6	3	97,8	89	1,1	1	1,1	1

Ако анализирамо податке из Табеле 41 у којој су фреквенције коришћења визуелних репрезентација од стране ученика обе групе на иницијалном тестирању у првих шест задатака, део у ком су решавани проблеми из аритметике, можемо приметити да је коришћење шематских цртежа уједначено у обе групе док ученици контролне групе чешће него ученици експерименталне групе при решавању користе сликовни цртеж. Веома је

мали проценат ученика који при решавању користе шематски цртеж (од 0% до 12,1%), већина ученика у обе групе уопште не користи визуелизацију у процесу решавања аритметичких проблема (од 63,1% па све до чак 97,8%). Компетентност ученика да користе визуелизацију при решавању математичких проблема потврђује се способношћу да конструишу шематски цртеж јер он садржи селектоване значајне елементе проблема и њихове међусобне релације, док је сликовни цртеж математички безначајан и не помаже при решавању.

Текст задатка (иницијални тест): *Миша је својих 8 аутомобилчића поређао у колону. Колика је дужина те колоне ако је дужина сваког аутомобилчића 10 ст, а растојање између свака два аутомобилчића 2 ст?*



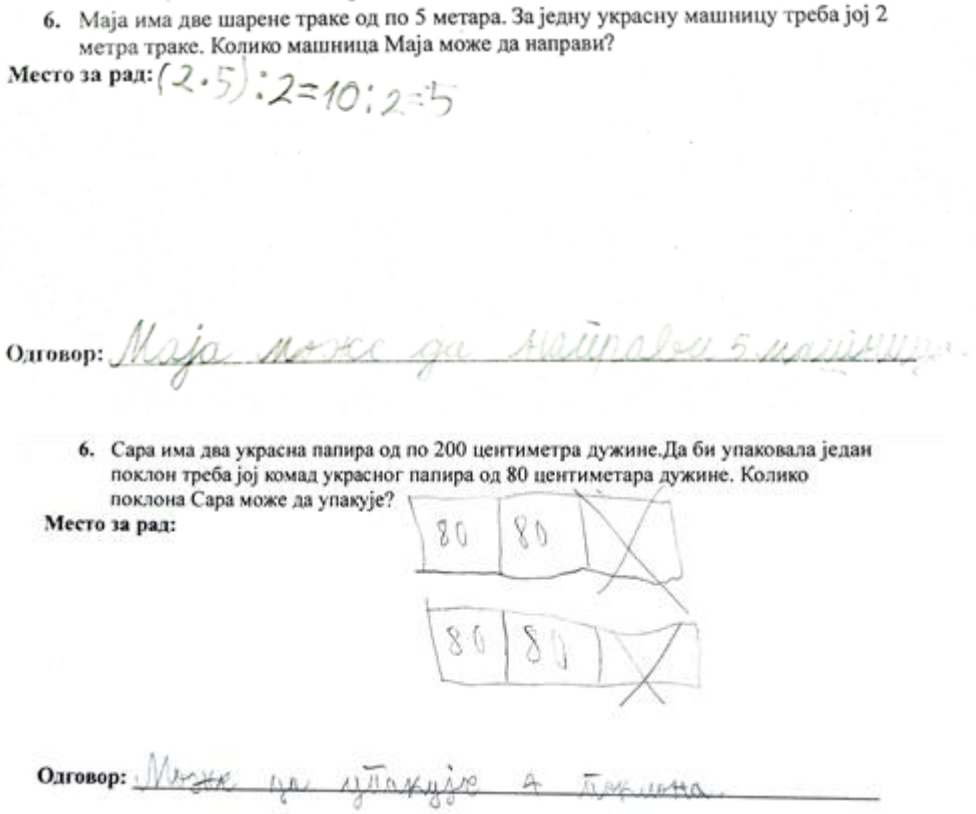
Слика 49. *Погрешно решење другог задатка са иницијалног теста*

На Слици 49 имамо примере погрешно решеног другог задатка са иницијалног теста где примећујемо да ученик решава задатак искључиво аритметички и да не користи помоћ у виду цртежа.

Табела 42. *Дескриптивни показатељи учесталости коришћења визуелних репрезентација међу ученицима контролне и експерименталне групе на финалном тесту на садржајима аритметике*

	Финални тест											
	Контролна група						Експериментална група					
Редни број задатка	Без цртежа		Сликовни цртеж		Шематски цртеж		Без цртежа		Сликовни цртеж		Шематски цртеж	
	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N
1.	72,6	61	23,8	20	3,6	3	5,5	5	33	30	61,5	56
2.	70,2	59	22,6	19	7,1	6	12,1	11	18,7	17	69,2	63
3.	78,6	66	16,7	14	4,8	4	24,2	22	20,9	19	54,9	50
4.	88,1	74	7,1	6	4,8	4	28,6	26	11	10	60,4	55
5.	84,5	71	13,1	11	2,4	2	33	30	58,2	53	8,8	8
6.	90,5	76	8,3	7	1,2	1	34,1	31	59,3	54	6,6	6

У Табели 42 у којој су приказане фреквенције коришћења визуелних репрезентација од стране ученика обе групе на финалном тестирању на ком су решавани проблеми из аритметике можемо приметити да је коришћење шематских цртежа заступљеније у експерименталној групи него у контролној групи. Коришћење сликовног цртежа је скоро уједначено у обе групе осим у 5. и 6. задатку где је приметно да су ученици експерименталне групе имали проблема са шематским цртежом па је већи део остао на сликовном цртежу (58,2% у 5. задатку и 59,3% у 6. задатку) док ученици контролне групе нису користили визуелизацију наведена два задатка (84,5% без цртежа у 5. задатку и 90,5% без цртежа у 6. задатку). Решење петог задатка приказано је раније на Слици 44, а приказ решења шестог задатка је на Слици 50.



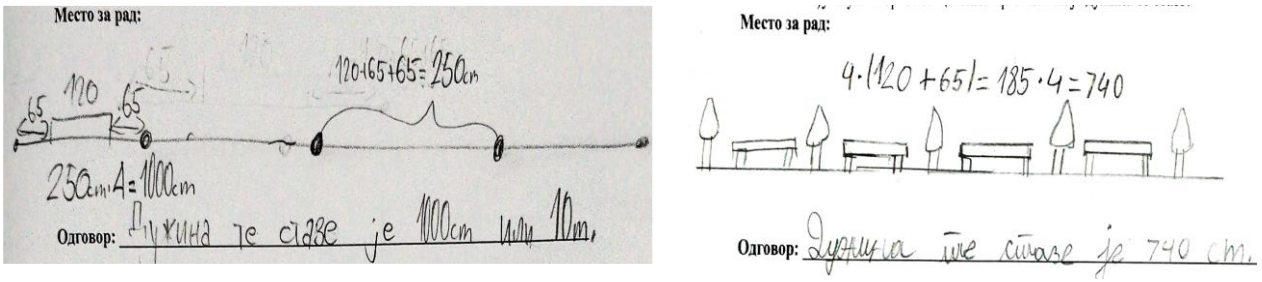
Слика 50. *Задатак са иницијалног теста (горе) и задатак са финалног теста (доле)*

Задатак са иницијалног теста (Слика 50, горе) погрешно је решен и нема визуелизацију зато и није узето у обзир да од краћих делова траке не можемо направити и пету машницу, док је задатак са финалног теста (Слика 50, доле) решен тачно у експерименталној групи уз шематски цртеж. Ученик је визуелно приказао два украсна папира као два већа правоугаоника од којих потом одсеца мање комаде за паковање поклона. На тај визуелизован начин, користећи сам шематски приказ поступка сечења папира за паковање, долази до тачног решења.

Кроз пример решења другог задатка са финалног теста приказаћемо разлику у

примени когнитивно-визуелног приступа решавању проблема и простој визуелизацији проблема.

Текст задатка (финални тест): *У парку је, поред једне праволинијске стазе, посађено 5 бреза. Између сваке две брезе постављена је по једна клупа. Дужина клупе је 120 центиметара, а размак између клупе и брезе 65 центиметара. Колика је дужина те стазе?*



Слика 51. *Решење другог задатка са финалног теста*

На Слици 51 лево је приказано успешно решење засновано на шематском цртежу, који омогућава јасну детекцију математичких релација и адекватно моделовање проблема. Десна страна Слике 51 приказује неуспешан покушај коришћења сликовног цртежа, овај приказ не садржи нумеричке податке нити релационе везе, чиме губи своју информативну функцију и математичку вредност, потврђујући да само релевантна шематизација директно доприноси тачности исхода.

Компаративна анализа постигнућа ученика контролне и експерименталне групе на иницијалном и финалном тесту јасно указује на значај структуриране визуелизације у оквиру когнитивно-визуелног приступа у процесу решавања аритметичких задатака. На Слици 49 приказан је карактеристичан пример погрешног решења другог задатка са иницијалног теста, где је одсуство сликовног или шематског приказа довело до погрешне операције сабирања датих дужина. Насупрот томе, Слика 51 илуструје ефекте примене когнитивно-визуелног приступа решавању одговарајућег другог задатка на финалном тесту након којег ученици користе цртеж као потпору решавању проблема и представљања односа и релација у задатку цртежом.

Анализом добијених вредности на финалном тесту уочавамо да је у контролној групи и даље веома мали проценат ученика који при решавању користе шематски цртеж (од 1,2% до 7,1%), док је код ученика експерименталне групе тај проценат након имплементације експерименталног програма приметно већи него на иницијалном тестирању (од 6,6% до 69,2%). Међу ученицима експерименталне групе повећао се и проценат коришћења сликовног цртежа (од 11% до 59,3%) тако да је на финалном мерењу већи него у контролној групи.

Можемо закључити да су ученици експерименталне групе након часова на којима су упознати са применом когнитивно-визуелног приступа при решавању аритметичких проблема унапредили своје компетенције за визуелизацију математичких проблема из

аритметике, односно да самостално селектују значајне податке из проблема и уочене релације међу њима представљају шематским цртежом који их води до решења.

Табела 43. *Дескриптивни показатељи учесталости коришћења визуелних репрезентација међу ученицима контролне и експерименталне групе на иницијалном тесту на садржајима алгебре*

	Иницијални тест											
	Контролна група						Експериментална група					
Редни број задатка	Без цртежа		Сликовни цртеж		Шематски цртеж		Без цртежа		Сликовни цртеж		Шематски цртеж	
	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N
7.	51,2	43	41,7	35	7,1	6	70,3	64	20,9	19	8,8	8
8.	100	84	0	0	0	0	100	91	0	0	0	0
9.	90,5	76	8,3	7	1,2	1	94,5	86	4,4	4	1,1	1
10.	95,2	80	3,6	3	1,2	1	80,2	73	19,8	18	0	0
11.	91,7	77	8,3	7	0	0	95,6	87	4,4	4	0	0
12.	96,4	81	3,6	3	0	0	100	91	0	0	0	0
13.	100	84	0	0	0	0	100	91	0	0	0	0
14.	95,2	80	4,8	4	0	0	94,5	86	5,5	5	0	0

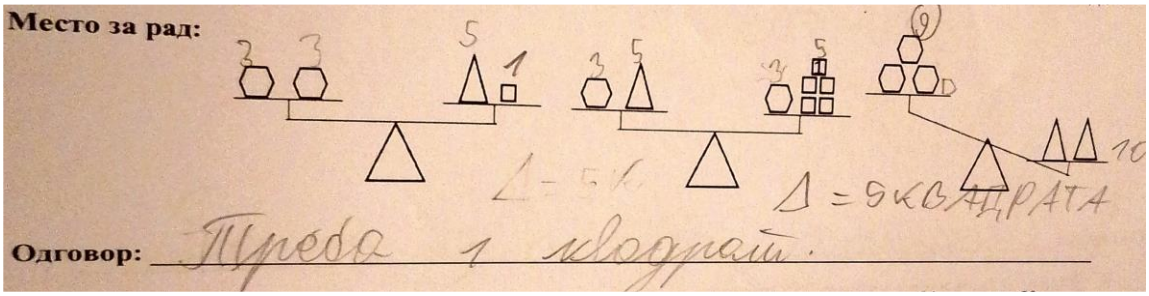
Анализом података из Табеле 43 у којој су фреквенције коришћења визуелних репрезентација од стране ученика обе групе на иницијалном тестирању на ком су решавани проблеми из алгебре можемо приметити да је коришћење шематских цртежа уједначено у обе групе у задацима 7., 9. и 10. док је 0% за 11., 12., 13. и 14. задатак. Осми задатак са теста у поставци има слику тако да ученици нису додавали релације и дописивали податке на њу па у том задатку 100% ученика обе групе није користило додатну визуелизацију (нису допуњавали дати цртеж). Веома је мали проценат ученика који при решавању користи шематски цртеж, највише у 7. задатку у контролној групи 7,1%, а у експерименталној 8,8%. При решавању осталих седам алгебарских проблема већина ученика у обе групе уопште не користи визуелизацију, процентуално више од 80% ученика не користи цртеж. Ученици не користе визуелне репрезентације за решавање алгебарских проблема и приметно је неразумевање текста задатка јер се подаци из задатка често повезују операцијама које су дате "кључном речи"(нпр. мање од, веће од). Кључна реч није увек у складу са потребном операцијом за решавање проблема зато се текст задатка и односи међу подацима морају детаљно анализирати и разумети.

Табела 44. *Дескриптивни показатељи учесталости коришћења визуелних репрезентација међу ученицима контролне и експерименталне групе на финалном тесту на садржајима алгебре*

	Финални тест											
	Контролна група						Експериментална група					
Редни број задатка	Без цртежа		Сликовни цртеж		Шематски цртеж		Без цртежа		Сликовни цртеж		Шематски цртеж	
	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N
7.	54,8	46	31	26	14,3	12	4,4	4	17,6	16	78	71
8.	100	84	0	0	0	0	94,5	86	0	0	5,5	5
9.	91,7	77	8,3	7	0	0	22	20	40,7	37	37,4	34
10.	89,3	75	7,1	6	3,6	3	33	30	22	20	45,1	41
11.	96,4	81	3,6	3	0	0	23,1	21	40,7	37	36,3	33
12.	97,6	82	2,4	2	0	0	56	51	23,1	21	20,9	19
13.	90,5	76	8,3	7	1,2	1	33	30	30,8	28	36,3	33
14.	96,4	81	3,6	3	0	0	41,8	38	22	20	36,3	33

Фреквенције коришћења визуелних репрезентација од стране ученика обе групе на финалном тестирању на ком су решавани проблеми из алгебре приказали смо у Табели 44. Можемо приметити да је коришћење шематских цртежа у експерименталној групи процентуално веће него при иницијалном тестирању и у односу на контролну групу која и даље шематски цртеж ретко користи (14,3% у 7. задатку, 3,6% у 10. и 1,2% у 13. задатку). Више од 91% ученика контролне групе при решавању алгебарских проблема уопште не користи цртеж, осим у првом задатку где је тај проценат 54,8%. Међу ученицима експерименталне групе на финалном тестирању приметан је пораст броја ученика који при решавању користе цртеж. Један део ученика остаје на сликовном цртежу јер још увек не успевају да уоче потребне релације и издвоје значајне податке. Приметимо да је 5,5% ученика експерименталне групе цртеж дат у оквиру осмог задатка са теста допунило до шематског (Слика 52) како би дошли до решења.

Текст задатка: *Марко има три ваге на које је ставио три различите врсте тегова, као што је приказано на слици (тегови исте врсте имају исту тежину). Шта треба да стави на леви тас треће ваге да би вага била у равнотежи?*



Слика 52. *Осми задатак са финалног теста*

Ученицима млађих разреда основне школе тешко је да непознате алгебарске величине прикажу цртежом, а поред тога немају навику да једначине приказују визуелним репрезентацијама већ процедуре за решавање једначина уче напамет.

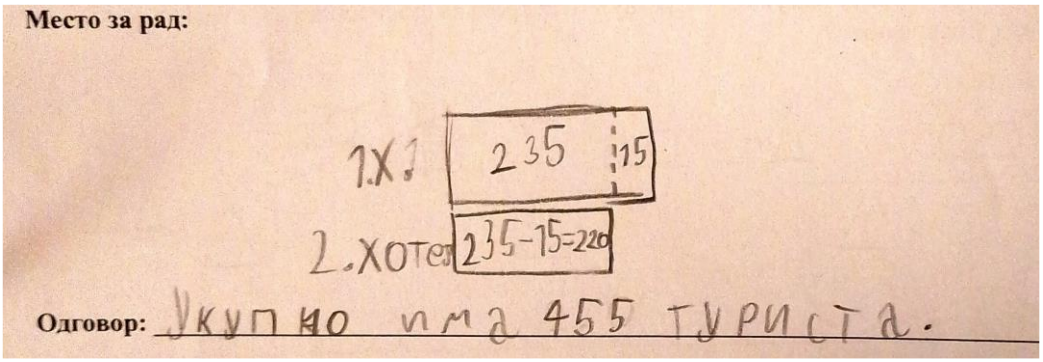
Све наведено потврђује четврту хипотезу да *Когнитивно-визуелни приступ доприноси развијању компетенција ученика за визуелизацију проблема*. Ученици експерименталне групе након експерименталног програма показују приметан позитиван помак у визуелизацији проблема и у конструисању шематских модела.

Резултати на финалном тестирању показују висок степен усвојености и функционалне примене когнитивно-визуелног приступа код ученика експерименталне групе. За разлику од контролне групе, ученици који су током експерименталног програма решавали задатке уз вођство наставника ослањајући се на визуелне репрезентације, на финалном тесту су демонстрирали способност самосталног одабира и примене три различита методолошка модела: сингапурски модел правоугаоника, модел ваге и дечији цртеж.

На двадесет часова експерименталног програма ученицима експерименталне групе представљена су три модела визуелизације: сингапурски модел правоугаоника, модел ваге и дечији цртеж. Одабрани модели прилагођени су узрасту и когнитивним способностима ученика трећег разреда основне школе, а коришћени су при решавању проблемских задатака из аритметике и алгебре како би ученици стекли компетенције за њихово решавање. Часови су реализовани у оквиру три наставне теме: сабирање и одузимање бројева до 1000 (10 школских часова), множење и дељење бројева до 1000 (6 школских часова) и једначине и неједначине (4 школска часа).

У циљу унапређења методике наставе математике и развоја концептуалног разумевања код најмлађих, сингапурски модел правоугаоника ученици експерименталне групе су успешно користили за декомпозицију аритметичких проблема и визуелизацију односа дела и целине. На Слици 53 је једанаести задатак са финалног теста и решење ученика експерименталне групе у ком се користи визуелизација проблема коришћењем сингапурског модела правоугаоника.

Текст задатка: *У једном хотелу је смештено 235 туриста, што је за 15 туриста више него у другом хотелу. Колико је укупно туриста смештено у оба хотела?*

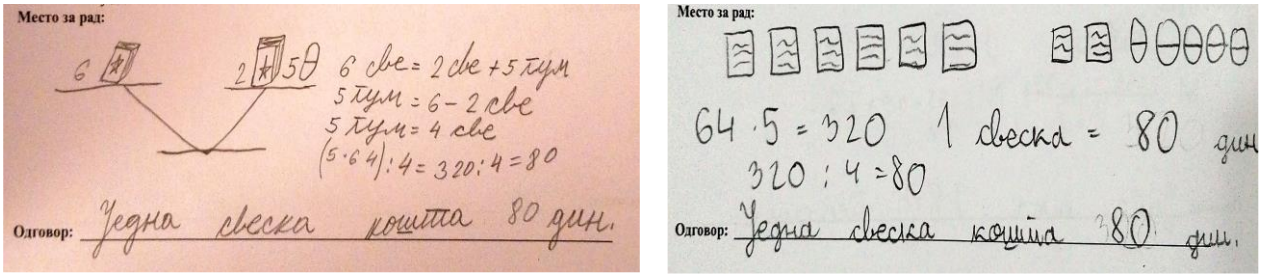


Слика 53. *Једанаести задатак са финалног теста*

Значај експерименталног програма огледа се у оспособљавању ученика да користе сингапурски модел правоугаоника као алат за визуелизацију. Чињеница да је 36,3% ученика експерименталне групе самоиницијативно успешно користило овај шематски приказ доказује прелазак са механичког решавања на стратешко размишљање. Модел је омогућио ученицима да правилно интерпретирају релацију "за 15 више" и прецизно идентификују оба корака потребна за решење (одређивање броја туриста у другом хотелу и укупног броја туриста у оба хотела), чиме се потврђује да овај метод директно доприноси развоју математичке писмености и логичке анализе.

Модел ваге се показао као ефикасан когнитивни ослонац за разумевање концепта једнакости и равнотеже у оквиру једначина. На Слици 54 је девети задатак са финалног теста и решење ученика експерименталне групе у ком се користи визуелизација проблема коришћењем модела ваге.

Текст задатка: *Можеш купити 6 свески за исто новца као и две свеске и 5 гумица од по 64 динара. Колико кошта једна свеска?*



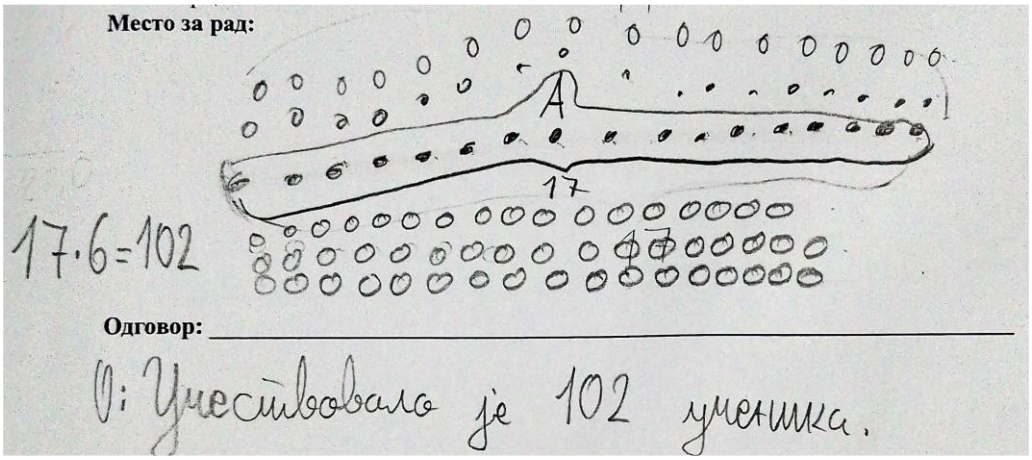
Слика 54. *Девети задатак са финалног теста*

Наведено решење на Слици 54. са леве стране има визуелизовану вагу у равнотежном положају док визуелизација решења са десне стране нема конкретно вагу али се у оба решења користи концепт "чувања равнотеже". Поступак решавања у оба случаја

подразумева уклањање две свеске са једне и друге стране и на тај начин долазимо до једнаког износа за четири свеске и пет гумица, односно четири свеске коштају 320 динара па је једна 80 динара.

Модел дечијег шематског цртежа, као најфлексибилније форме, омогућио је ученицима да апстрактне аритметичке релације преточе у личне, али математички релевантне шематске приказе. На Слици 55 је трећи задатак са финалног теста и решење ученика експерименталне групе у ком се користи визуелизација проблема коришћењем шематског цртежа.

Текст задатка: *Ученици Ацине школе припремили су се за почетак трке. Сви су се поређали један иза другог у стазе за трчање. У Ациној стази испред њега је 9, а иза њега још 7 ученика. Са његове леве стране су две, а са десне још три стазе за трчање. Ако је у свакој стази исти број ученика колико је ученика учествовало у тој трци?*



Слика 55. *Трећи задатак са финалног теста*

Присуство сва три модела у решењима проблема од стране ученика експерименталне групе потврђује да им је когнитивно-визуелни приступ омогућио формирање разноврсне базе алата за решавање проблема, чиме је апстрактно математичко мишљење добило чврст визуелни ослонац.

5. УТИЦАЈ КОГНИТИВНО-ВИЗУЕЛНОГ ПРИСТУПА НА РАЗВИЈАЊЕ ПОЗИТИВНИХ СТАВОВА УЧЕНИКА ПРЕМА РЕШАВАЊУ ПРОБЛЕМСКИХ ЗАДАТАКА, МОТИВАЦИЈУ ЗА РЕШАВАЊЕ ПРОБЛЕМСКИХ ЗАДАТАКА И КОРИШЋЕЊЕ ВИЗУЕЛНИХ МОДЕЛА ПРИ РЕШАВАЊУ МАТЕМАТИЧКИХ ПРОБЛЕМА

Пети истраживачки задатак нам је да утврдимо ефекте примене когнитивно-визуелног приступа на развијање позитивних ставова и мотивацију ученика за решавање проблемских задатака као и на коришћење визуелизације при решавању проблема. Наведене ефекте примене когнитивно-визуелног приступа анализирали смо кроз одговоре на скали ставова коју су попуњавали ученици експерименталне групе након финалног тестирања и дискусију у фокус групи учитеља који предају у одељењима експерименталне групе и који су учествовали у имплементацији експерименталног програма. Овим истраживањем смо тестирали пету хипотезу: *Когнитивно-визуелни приступ доприноси развијању позитивних ставова ученика према решавању проблемских задатака, мотивацији за решавање проблемских задатака и коришћењу визуелних модела при решавању математичких проблема.*

Ставови се, под утицајем измењених околности и нових искустава, могу мењати. Ставови ученика према математици су позитивне или негативне емоционалне диспозиције према математици. Како наводи Видић (Vidić, 2016), већина деце започиње школовање са позитивним ставовима према математици, али одрастањем се ти ставови мењају и постају негативни у средњој школи. Многа истраживања потврђују да је почетак школовања најзначајнији период за развој ставова ученика према математичким садржајима и математици уопште. Ученици уче боље и постижу боље резултате ако су заинтересовани за садржаје које уче и ако им се ти садржаји свиђају, зато је очигледно потребно усмерити пажњу на стварање, развој и повећање позитивних ставова према садржајима који се у математици обрађују. Развијање позитивних ставова ученика према математици повећава њихова постигнућа. Аикен (Aiken, 1970) тврди да постоји последична повезаност ставова према математици и постигнућа тј. да ставови утичу на постигнућа, а затим ниво постигнућа утиче на ставове ученика. Резултати до којих се дошло у више истраживања ученичких ставова према математици указују на повезаност развијања позитивних понашања према математици у раној ученичкој доби са каснијим позитивним ставовима према добрим постигнућима и математици, зато је потребно утицати што више на формирање и мењање ставова у позитивне како би спречили евентуалне неуспехе ученика (Vidić, 2016).

Табела 45. *Дескриптивни показатељи учесталости ставова на скали ученика експерименталне групе*

Редни бр. става	Став	Скала							
		не		најчешће не		углавном да		да	
		N	%	N	%	N	%	N	%
1.	Више волим да решавам текстуалне задатке из математике него задатке задате у математичкој форми	13	14,3	14	15,4	30	33	34	37,4
2.	Када решавам текстуалне задатке из математике прочитам текст више пута	5	5,5	2	2,2	22	24,2	62	68,1
3.	Када решавам текстуалне задатке из математике податке и односе међу њима представим цртежом	26	28,6	18	19,8	28	30,8	19	20,9
4.	Када решавам текстуалне задатке из математике потребна ми је помоћ учитеља/друга/родитеља	34	37,4	32	35,2	13	14,3	12	13,2
5.	Када не разумем текстуални задатак из математике одустајем од решавања	71	78	7	7,7	6	6,6	7	7,7
6.	Упоран сам да решим сваки задати текстуални задатак из математике	7	7,7	5	5,5	14	15,4	65	71,4
7.	Успешно решавам текстуалне задатке из математике	9	9,9	10	11	37	40,7	35	38,5
8.	Текстуални задаци из математике су ми тешки за решавање	38	41,8	27	29,7	11	12,1	15	16,5
9.	Када не успем одмах решити текстуални задатак из математике одустајем од решавања	76	83,5	7	7,7	3	3,3	5	5,5
10.	Лакше ми је да решим текстуални задатак из математике ако ми је уз њега дат и цртеж	15	16,5	5	5,5	24	26,4	47	51,6
11.	Користим свој цртеж када решавам текстуалне задатке из математике	18	19,8	7	7,7	25	27,5	41	45,1
12.	Учитељ/учитељица користи цртеж када решава текстуалне задатке на часу	25	27,5	7	7,7	39	42,9	20	22
13.	Учитељ/учитељица саветује да цртамо док решавамо текстуални задатак из математике	7	7,7	2	2,2	10	11	72	79,1
14.	Умем да решавам текстуалне задатке из математике тако што их најпре представим цртежом	22	24,2	8	8,8	28	30,8	33	36,3

Фреквенције на скали за сваки од наведених ставова приказане су у Табели 45. Позитиван однос ученика према решавању проблемских задатака потврђује нам скала за први наведени став где можемо приметити да је 37,4% (“да”) и 33% (“углавном да”) ученика одговорило да више воли решавати текстуалне задатке из математике него задатке задате у математичкој форми. Ако погледамо скалу за четврти став уочавамо да 37,4% ученика тврди да им није потребна помоћ при решавању текстуалних задатака, а 35,2% углавном не тражи помоћ тако да се намеће закључак да ученицима експерименталне групе текстални задаци нису “тешки задаци” и да су спремни да им приступе и дођу до решења самостално. То потврђује и скала за седми став у ком 38,5% ученика тврди да успешно решава текстуалне проблемске задатке, а 40,7% ученика је углавном успешно у решавању. У осмом ставу 41,8% ученика се изјаснило да текстуални проблеми нису тешки за решавање. Све наведено потврђује да ученици имају позитиван однос према решавању текстуалних проблемских задатака из математике, не сматрају их тешким и решавању приступају самостално уз доста самопоуздања.

При анализи мотивације ученика за решавање проблемских задатака осврнућемо се на пети став у ком се чак 78% ученика изјаснило да не одустаје од решавања задатка ако га не разуме, а у шестом ставу 71,4% ученика тврди да је упорно да реши сваки текстуални проблемски задатак. Ту упорност потврђује и други наведени став у ком 68,1% ученика при решавању задатка прочита текст и више пута. Оно што су ученици потврдили у деветом ставу са 83,5% је да и ако не успеју одмах решити задатак не одустају од решавања. Спремни су и упорни да покушају и више пута и са више различитих приступа што само потврђује њихову мотивисаност за решавање.

Позитиван однос ученика према коришћењу визуелних модела при решавању проблемских задатака уочава се у резултатима више ставова на скали. У трећем ставу и поред 28,6% ученика који тврде да при решавању текстуалних задатака цртежом не представљају податке и односе међу њима, 20,9% представља податке и релације цртежом, а 30,8% их углавном представља цртежом. Тако да укупно 51,7% ипак визуелизује проблем. У десетом ставу чак 51,6% ученика експерименталне групе признаје да им је лакше решити текстуални проблемски задатак из математике ако је уз њега дат и цртеж. Ако задатак уз себе нема цртеж 45,1% ученика се у једанаестом ставу изјаснило да користи свој цртеж при решавању текстуалних задатака. Четрнаести став са 36,3% одговора “да” и 30,8% одговора “углавном да” нам потврђује да су ученици прилично сигурни у своју способност визуелизације јер тврде да умеју решити текстуални задатак тако што га најпре представе цртежом. Након експерименталног програма они су прихватили визуелизацију као корак у поступку решавања текстуалних проблемских задатака из математике и свеснији су значаја конструкције одговарајуће шематске репрезентације.

Дискусија у фокус групи учитељица које предају у одељењима ученика експерименталне групе обављена је после финалног тестирања и попуњавања скале ставова. Како би се дубље објаснили ефекти когнитивно-визуелног приступа, квалитативна анализа одговора учитељица структурирана је око четири питања која су покренута током фокус групе:

1. Како оцењујете когнитивно – визуелни приступ решавању проблемских задатака анализирајући постигнућа ученика пре и после примене експерименталног програма?

2. Примећујете ли промене у приступу ученика решавању текстуалних проблемских задатака и самој мотивацији на часовима математике?
3. Да ли ученици самоиницијативно визуелизују задатак?
4. Да ли сте приметили промену у когнитивном приступу решавању проблема ако се инсистира на цртежу уз задатак? (Да ли се тада текст задатка анализира детаљније и са више разумевања)

Прво питање представља оцену когнитивно–визуелног приступа кроз призму постигнућа ученика, а когнитивно-визуелни приступ решавању проблема је од стране учитељица оцењен као изузетно користан, при чему је истакнут његов директан, позитиван утицај на постигнућа ученика након реализације вежби у оквиру експерименталног програма. Сумирајући напредак ученика од иницијалног до финалног тестирања, учитељице су изнеле запажања која указују на квалитативни скок у успеху. Коментаришући ову промену, једна од учитељица је истакла: *"Разлика између првог и финалног теста је очигледна. На почетку су ученици често одустајали од сложенијих задатака или су насумично сабирали и одузимали бројеве из текста. Након примене експерименталног програма, чак и они ученици који су имали слабији општи успех у математици успели су да тачно реше задатке које раније не би ни започели, јер су научили како да их графички представе."*

Друго питање се односи на промене у приступу задацима и мотивацију ученика. Квантитативни подаци из скале ставова ученика директно се подударају са квалитативним запажањима учитељица. У тринаестом ставу скале ставова чак 79,1% ученика наводи да их учитељица саветује да цртају док решавају текстуалне задатке из математике. Овај континуирани подстицај резултирао је растом унутрашње мотивације. Ученици показују знатно веће интересовање за решавање проблемских задатака, као и повећану сигурност при коришћењу визуелних репрезентација. Из дискусије се издваја следећи карактеристичан одговор: *"Раније је решавање текстуалних задатака пратио отпор и коментари "ја ово не разумем". Сада је атмосфера на часовима потпуно другачија. Саветовала сам их да цртају при сваком наиласку на препреку у тексту, и када су увидели да им то олакшава рад, дошло је до правог скока у мотивацији. Задатак им више није баук, већ га доживљавају као занимљиву загонетку коју треба нацртати."*

Трећим питањем желели смо да проверимо постоји ли самоиницијативност ученика у визуелизацији проблема. Посебно значајан податак добијен из фокус групе односи се на чињеницу да ученици све чешће и самоиницијативно визуелизују задатак, након што су практично увидели ефикасност овог модела. Ово представља велики помак у односу на пређашњу наставну праксу. Учитељице објашњавају да се раније цртеж користио искључиво на инсистирање учитеља, при чему су то углавном биле површне, илустративне сликовне репрезентације са сувишним детаљима и без јасно назначених математичких релација међу подацима. Једна од учитељица је описала ову промену речима: *"Пре експерименталног програма, ако бих им рекла да нацртају на пример задатак о јабукама, они би цртали детаљне крошње и бојили плодове, што је одузимало време а није помагало у решавању. Сада сами, без икаквог мог подстицаја, на маргинама свеске брзо скицирају правоугаонике кругове или дужи, јасно повезујући делове и целину. Сами су схватили колико им то помаже."*

Четврто питање се односи на промене у когнитивном приступу и дубини анализе текста проблема. Когнитивно-визуелни приступ је, према заједничком закључку учитељица, из корена променио начин на који ученици мисле док читају задатак. Инсистирање на математичком шематском цртежу навело је ученике на знатно детаљнију анализу текста, прецизно издвајање познатих и непознатих вредности, као и преиспитивање њихових међусобних односа. Ученици су развили свест о томе да је разумевање услова задатка предуслов за његову визуелизацију. Као илустрација овог процеса издваја се следеће запажање из фокус групе: *"Инсистирање на цртежу их је натерало да успоре и заиста прочитају задатак са разумевањем. Схватили су да не могу да нацртају шему ако нису разумели шта је у задатку дато, а шта се тражи. Једна ученица ми је рекла: "Учитељице, чим тачно нацртам, ја већ видим решење." Самим тим кад анализирају текст да би га нацртали, они лако долазе до тачне једначине или операције и коначног решења."* У прилог наведеној промени когнитивног приступа говоре и подаци из скале ставова ученика где је у дванаестом ставу 42,9% ученика потврдило да учитељице углавном користе цртеже када решавају текстуалне задатке на часу. Ова промена у методолошком деловању учитељица успешно је трансформисала уобичајене механичке обрасце размишљања код ученика у свесне, аналитичке когнитивне процесе.

6. ЗАКЉУЧАК И МЕТОДИЧКЕ ИМПЛИКАЦИЈЕ

У раду смо пошли од савремених дидактичких истраживања која истичу способност решавања проблема као једну од најважнијих компетенција за формирање функционалног математичког знања. Такође смо уочили да традиционални облици наставе не пружају ученицима боље разумевање, математизацију проблемских ситуација и моделовање јер су усмерени на алгоритамско решавање задатака. Зато смо планирали да нашим истраживањем развијемо компетенције ученика млађих разреда основне школе за решавање математичких проблема коришћењем когнитивно-визуелног приступа. У нашем истраживању смо у оквиру наставних садржаја аритметике и алгебре за трећи разред основне школе конципирали дидактичко-методичке моделе вишеструких репрезентација уз обавезну визуелизацију. Испитали смо утицај тих модела на постигнуће, развијеност способности коришћења визуелних репрезентација и на формирање позитивних ставова ученика млађег школског узраста према решавању математичких проблема. Фокус је био да се развију компетенције ученика за решавање математичких проблема у области аритметике и алгебре као и за коришћење визуелних репрезентација проблема при њиховом решавању. Поред развијања наведених компетенција ученика циљ нам је био и развијање позитивних ставова ученика према решавању проблемских задатака, мотивацији за решавање проблемских задатака и коришћењу визуелних модела при решавању математичких проблема.

Резултат докторске дисертације је креирани модел развијања компетенција ученика за решавање математичких проблема коришћењем визуализације. Креирани модел је заснован на јасним смерницама како повезати вишеструке репрезентације уз визуелизацију математичких концепата као кључну за разумевање и решавање проблема. На часовима вежби у оквиру експерименталног програма ученици су оспособљени да визуелно представе односе и податке из садржаја математичког проблема, односно да шематски представе проблем што им омогућава да са апстрактног прећу на конкретни ниво.

Значај креираног модела не огледа се само у техничкој помоћи при решавању задатка, већ у суштинској трансформацији ученикoвог когнитивног приступа проблему. Резултати указују на то да системско коришћење визуелизације делује као механизам за редукцију когнитивног оптерећења, омогућавајући ученицима да комплексне математичке релације дешифрују кроз превођење из визуелног у симболички регистар репрезентације. Тиме се потврђује да је способност шематског представљања проблема директно у корелацији са развојем стратешког мишљења, јер ученик престаје да посматра податке као изоловане ентитете и почиње да препознаје њихову дубинску структуру. Методичке импликације оваквог приступа сугеришу неопходност редефинисања наставне праксе на млађем школском узрасту, где визуелизација престаје да буде спорадична илустрација и постаје интегрални "когнитивни алат" за развој математичке писмености и апстрактног мишљења.

Резултати спроведеног истраживања у потпуности су потврдили постављену општу хипотезу, показујући да примена когнитивно-визуелног приступа остварује статистички значајан и позитиван утицај на свеукупно развијање компетенција ученика за решавање проблема. Анализа података кроз посебне хипотезе пружа детаљнији увид у конкретне

домене у којима је овај приступ дао најбоље ефекте, потврђујући његову функционалност како у предметно-садржинском, тако и у афективном смислу.

У оквиру математичких садржаја, истраживање је потврдило да когнитивно-визуелни приступ директно доприноси већој успешности ученика у решавању проблемских задатака у целини, али и у специфичним областима аритметике и алгебре. Примена визуелних приказа олакшала је ученицима савладавање апстрактних алгебарских односа и концептуално разумевање аритметичких операција. Поред тога, посебно се издвојио напредак у развијању саме компетенције визуелизације проблема, где су ученици успешно оспособљени да апстрактне математичке ситуације преводе у скице, цртеже и моделе, чиме су олакшали рашчлањивање задатака и проналажење путање до решења.

Коначно, показало се да ефекти овог приступа нису ограничени само на знање и логичко размишљање ученика, већ обухватају и њихову мотивацију и став према учењу Потврдом пете хипотезе утврђено је да когнитивно-визуелни модел рада значајно подстиче развој позитивних ставова према математичким проблемима, подиже ниво унутрашње мотивације ученика и подстиче их на самосталну примену визуелних модела током рада. Ови резултати указују на то да когнитивно-визуелни приступ не само да унапређује математичка постигнућа, већ креира стимулативно окружење у коме ученици са већим самопоуздањем и интересовањем приступају решавању комплексних проблема.

До наведених резултата дошли смо статистичком обрадом података о постигнућу ученика на иницијалном и финалном тесту. Први део теста (првих 6 задатака) обухватао је област аритметике. Анализом добијених података дошли смо до закључка да примена когнитивно-визуелног приступа позитивно утиче на развијање компетенција ученика за решавање аритметичких математичких проблема. Резултати добијени тестирањем потврдили су и да не постоји разлика у позитивном ефекту когнитивно-визуелног приступа зависно од пола ученика нити од оцене из математике. На другом делу теста (преосталих 8 задатака) где су алгебарски проблеми, такође, је потврђен позитиван ефекат примене когнитивно-визуелног приступа и његова независност од пола ученика и оцене из математике. Анализом постигнућа ученика на поменутим тестовима и самог поступка решавања проблема утврдили смо да позитивни утицај примене когнитивно-визуелног приступа на развијање компетенција за визуелизацију проблема директно утиче и на успешност решавања проблема.

На основу теоријских разматрања и емпиријских резултата до којих смо дошли у делу истраживања о решавању аритметичких и алгебарских проблема, могу се издвојити следеће методичке импликације за унапређење наставе:

- Когнитивно-визуелни приступ не би требало посматрати као изоловану наставну методу или алат који се користи само на часовима допунске или додатне наставе. Резултати јасно упућују на то да визуелне репрезентације (дечији цртеж, модел ваге и модел правоугаоника) морају бити интегрални део редовне наставе при обради нових и уопштавању старих аритметичких и алгебарских садржаја за све ученике (Arcavi, 2003);
- Наставници треба методички правилно да воде ученике кроз енактивни (конкретни), иконички (визуелни) и симболички (апстрактни) ниво. Наше

истраживање показује да пребрзи прелазак на чисто симболички језик алгебре штети разумевању. Задржавање на иконичком (визуелном) нивоу омогућава дубље когнитивно усвајање појмова;

- Аутори уџбеника и збирки задатака из математике треба да реструктурирају алгебарске садржаје тако да они редовно садрже визуелне подстицаје. Алгебарске идентитете (нпр. квадрат бинома, разлика квадрата) или концепт линеарних једначина и система, као и градиво млађих разреда потребно је редовно пратити и геометријским, односно когнитивно-визуелним интерпретацијама;
- Будући да у нашој наставној пракси и даље доминира традиционални, алгоритмизовани приступ аритметици и алгебри неопходно је креирати програме стручног усавршавања који ће наставнике оспособити за превођење апстрактних аритметичких и алгебарских структура у визуелне когнитивне мапе које су пријемчиве свим ученицима, без обзира на њихов пол или тренутни школски успех.

Резултати емпиријског истраживања показали су да можемо тврдити да ученици имају позитивне ставове према решавању проблемских задатака, мотивацији за решавање истих и коришћењу визуелних модела при решавању математичких проблема.

Посебан значај се може пронаћи у томе што су у раду издвојене специфичности когнитивно-визуелног приступа решавању проблема на млађем школском узрасту, потешкоће ученика у коришћењу вишеструких репрезентација, као и различити модели визуелизације математичких концепата.

Експериментални програм, који је у складу са когнитивно-визуелним приступом решавању математичких проблема из аритметике и алгебре и који даје различите идеје за коришћење визуелних модела као помоћног “алата”, може послужити за унапређивање наставе на млађем школском узрасту. Значај се огледа у смислу конкретних решења која могу помоћи практичарима у њиховом раду и истраживању почетне наставе и учења алгебарских садржаја.

С обзиром на то да су резултати истраживања потврдили да се компетенције ученика за коришћење вишеструких репрезентација и визуелизацију математичких концепата могу успешно развијати, издвајају се јасне импликације за различите актере у образовном систему:

- Добијени резултати указују на потребу да учитељи напусте инсистирање на искључиво процедуралном знању и алгоритмима. Импликација за њихов рад огледа се у обавези систематског увођења ученика у процес преласка са пикторијалних (илустративних) на шематске приказе. Учитељи би требало да користе визуелне моделе не само као очигледна средства на почетку часа, већ као трајни когнитивни ослонац који помаже ученицима да спознају дубинску структуру математичког проблема и развију апстрактно мишљење.
- Потврђена ефикасност модела имплицира потребу за реструктурирањем визуелног садржаја у уџбеничкој литератури. Наставни материјали не би требало да садрже илустрације које су чисто декоративног карактера, већ пажљиво одабране визуелне репрезентације и шеме које директно воде ученика кроз процес математичког моделовања. Задаци у збиркама би морали експлицитно захтевати од ученика да

проблем представе у више различитих облика (текстуално, шематски, симболички), чиме се подстиче флексибилност у мишљењу.

- На макро нивоу, истраживање имплицира да би званични курикулум за почетну наставу математике требало снажније да интегрише когнитивно-визуелни приступ. Уместо спорадичног помињања визуелних средстава, у исходе и стандарде постигнућа потребно је формално уврстити описмењавање ученика за креирање и тумачење математичких репрезентација. Програми би требало да предвиде већи простор за интердисциплинарно повезивање и постепени, вођени прелазак са конкретног на апстрактни ниво мишљења кроз алгебарске садржаје.

На нивоу непосредног рада у учионици, инструктивни модел наставника треба да се руководи следећим методичким корацима:

- Пре него што ученици уопште покушају да запишу прву рачунску операцију, инструкција наставника мора захтевати експлицитно скицирање математичког проблема. Ученик мора визуелно конструисати и просторно позиционирати односе између познатих и непознатих величина;
- Након што ученик креира визуелни приказ, наставник треба кроз вођени дијалог да подстакне ученика да вербално образложи зашто је елементе поставио у одређени просторни и логички однос. Тиме се развија метакогниција и трансформише визуелизација из дидактичког помагала у примарну сазнајну стратегију (Arcavi, 2003);
- Инструкција се мора прилагодити тренутним капацитетима ученика, али унутар истог визуелног оквира. За ученике који показују слабије постигнуће, визуелни приказ служи као обавезна когнитивна потпора која олакшава разумевање, док се за напредније ученике инструкција усмерава ка креирању алтернативних (различитих) визуелних модела за исти аритметички проблем, чиме се развија флексибилност у мишљењу.

Иако су резултати потврдили ефикасност модела, потребно је указати на одређена ограничења. Првенствено, истраживање је спроведено на узорку ученика млађег школског узраста у специфичном социо-културном контексту, те би дугорочни ефекти примене модела на сложеније алгебарске структуре у старијим разредима тек требало да буду предмет лонгитудиналних студија. Такође, индивидуалне разлике у когнитивним стиловима ученика (нпр. визуелизатори наспрам вербализатора) могу утицати на брзину усвајања предложених визуелних модела, што ово истраживање није детаљно обухватило.

Будући научни напори могли би се усмерити ка испитивању интеракције између дигиталне визуелизације (коришћење динамичких софтвера попут GeoGebra-e) и мануалних шематских приказа које су ученици користили у овом раду. Такође, значајан истраживачки изазов представља и питање како се компетенције за визуелизацију, развијене у оквиру математике, преносе на решавање проблема у другим природним наукама, чиме би се додатно потврдила интердисциплинарна вредност предложеног когнитивно-визуелног приступа.

ЛИТЕРАТУРА

Abonyi, O., & Eze, A. (2006). Effect of Geoboard on junior secondary school students' achievement in geometry. *Ebonyi State University Journal of Education* (EBJE), *4*, 243–250.

Ahmada, A., Tarmizia, R. A., & Nawawia, M. (2010). Visual Representations in Mathematical Word Problem Solving Among Form Four Students in Malacca. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, *8*, 356–361.

Aiken, L. R. (1970). Attitudes towards mathematics. *Review of Educational Research*, *40*(4), 551–596.

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*(3), 183–198.

Amineh, R. J., & Asl, H. D. (2015). Review of constructivism and social constructivism. *Journal of Social Sciences, Literature and Languages*, *1*(1), 9–16.

Angateeah, K. S. (2017). An investigation of students' difficulties in solving non-routine word problem at lower secondary. *International Journal of Learning and Teaching*, *3*(1), 46–50. https://doi.org/10.18178/ijlt.3.1.46-50

Aranho, J. (2017). Problem-solving skills: Goal and means of teaching mathematics. *Journal of Mathematics Education*, *8*(2), 11–25.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(3), 215–241. https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Arnhajm, R. (1985). *Vizuelno misljenje – jedinstvo slike i pojma.* Univerzitet umetnosti u Beogradu.

Aspinwall, L., Shaw, K. L., & Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(3), 301–317.

Bakar, K. A., Way, J., & Bobis, J. (2016). Young children's drawings in problem solving. In B. White, M. Chinnappan, & S. Trenholm (Eds.), *Opening up mathematics education research: Proceedings of the 39th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 86–93). MERGA.

Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(5), 557–578. https://doi.org/10.2307/749887

Balka, D. S. (1993). Making the connections in mathematics via manipulatives. *Contemporary Education*, *65*(1), 19–23.

Barbosa, A., & Vale, I. (2021). Visual approach for solving problems with fractions. *Education Sciences*, *11*(11), Article 727. https://doi.org/10.3390/educsci11110727

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: A socio-critical and discursive perspective. *ZDM*, *38*(3), 293–301. https://doi.org/10.1007/BF02652812

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S., & Suggate, J. (2009). The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(3), 217–241. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9145-1

Ben-Chaim, D., Lappan, G., & Houang, R. (1989). The role of visualization in the middle school mathematics curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11*(1), 49–60.

Boero, P., & Bazzini, L. (2004). Inequalities in mathematics education: The need for complementary perspectives. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 139–142). PME.

Boonen, A. J. H., de Koning, B. B., Jolles, J., & Van der Schoot, M. (2016). Word problem solving in contemporary math education: A plea for reading comprehension skills training. *Frontiers in Psychology*, *7*, Article 191. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00191

Boonen, A. J. H., Van der Schoot, M., Van Wesel, F., De Vries, M. H., & Jolles, J. (2013). What underlies successful word problem solving? A path analysis in sixth grade students. *Contemporary Educational Psychology*, *38*(3), 271–279. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2013.05.001

Borenson, H. (1997). *Hands-on equations learning system*. Borenson and Associates.

Brown, M. C., McNeil, N. M., & Glenberg, A. M. (2009). Using concreteness in education: Real problems, potential solutions. *Child Development Perspectives*, *3*(3), 160–164. https://doi.org/10.1111/j.1750-8606.2009.00098.x

Bruder, R., & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Cornelsen Verlag Scriptor.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Belknap Press.

Bruner, J. S. (1972). Tok kognitivnog razvoja. *Psihologija*, *5*(1–2), 100–112. (Adaptirano iz: Bruner, J. S., 1964, *American Psychologist*, *19*(1), 1–16)

Campbell, J. I. D. (1992). *The nature and origins of mathematical skills*. Elsevier Science Publishers.

Cankoy, O., & Özder, H. (2011). The influence of visual representations and context on mathematical word problem solving. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *30*(2), 91–100.

Case, R. (1985). *Intellectual development: Birth to adulthood*. Academic Press.

Cocquin-Viennot, D., & Moreau, S. (2003). Highlighting the role of the episodic situation model in the solving of arithmetical problems. *European Journal of Psychology of Education*, *18*(3), 267–279. https://doi.org/10.1007/BF03173248

Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2nd ed.). Lawrence Erlbaum Associates.

Cooper, J. L., & Alibali, M. W. (2012). Visual representations in mathematics problem-solving: Effects of diagrams and illustrations. In L. R. Van Zoest, J. J. Lo, & J. L. Kratky (Eds.), *Proceedings of the 34th annual meeting of the North American Chapter of the International*

Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 285–292). Western Michigan University.

Cooper, T. J., & Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: Models, representations and theory for teaching and learning. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 187–214). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_12

Cox, R., & Brna, P. (1995). Supporting the use of external representations in problem solving: The need for flexible learning environments. *Journal of Artificial Intelligence in Education*, *6*(2–3), 239–302.

Crvenković, S., & Romano, D. A. (2014). Rana algebra i ranoalgebarsko mišljenje. U *Metodički aspekti nastave matematike: Zbornik radova Treće međunarodne konferencije MATM 2014* (str. 14–15). Fakultet pedagoških nauka y Jagodini.

Csíkos, C., Szitányi, J., & Kelemen, R. (2012). The effects of using drawings in developing young children's mathematical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students. *Educational Studies in Mathematics*, *81*(1), 47–65. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9360-z

Cuoco, A. A., & Curcio, F. R. (Eds.). (2001). *The roles of representation in school mathematics: 2001 yearbook*. National Council of Teachers of Mathematics.

Danesh, M., & Nourdad, N. (2017). On the relationship between creative problem-solving skill and EFL reading comprehension ability. *Theory and Practice in Language Studies*, *7*(3), 234–240.

Davis, P. J. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 333–344.

De Bock, D., Verschaffel, L., Janssens, D., Van Dooren, W., & Claes, K. (2003). Do realistic contexts and graphical representations always have a beneficial impact on students' performance? Negative evidence from a study on modelling non-linear geometry problems. *Learning and Instruction*, *13*(4), 441–463.

De Corte, E., Verschaffel, L., & De Win, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions. *Journal of Educational Psychology*, *77*(4), 460–470. https://doi.org/10.1037/0022-0663.77.4.460

de Koning, B. B., Boonen, A. J. H., Jongerling, J., van Wesel, F., & van der Schoot, M. (2022). Model method drawing acts as a double-edged sword for solving inconsistent word problems. *Educational Studies in Mathematics*, *111*(1), 29–45. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10150-8

Debrenti, E. (2015). Visual representations in mathematics teaching: An experiment with students. *Acta Didactica Napocensia*, *8*(1), 19–25.

Depaepe, F., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2010). Teachers' metacognitive and heuristic approaches to word problem solving: Analysis and impact on students' beliefs and performance. *ZDM – Mathematics Education*, *42*(2), 205–218. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0221-5

Dewolf, T., Van Dooren, W., Cimen, E. E., & Verschaffel, L. (2014). The impact of illustrations and warnings on solving mathematical word problems realistically. *The Journal of Experimental Education*, *82*(1), 103–120. https://doi.org/10.1080/00220973.2012.745468

Dienes, Z. P. (1960). *Building up mathematics*. Hutchinson Educational.

Diezmann, C. M., & English, L. D. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *Roles of representation in school mathematics: 2001 yearbook* (pp. 77–89). National Council of Teachers of Mathematics.

Ding, M., & Li, X. (2014). Transition from concrete to abstract representations: The distributive property in a Chinese textbook series. *Educational Studies in Mathematics*, *87*(1), 103–121. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9558-y

diSessa, A. A. (2002). Students' criteria for representational adequacy. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 105–129). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-017-3194-2_7

Djerić, I., Pavlović-Babić, D., Milin, V., & Anđelković, S. (2022). *TIMSS 2019: Nacionalni izveštaj za Srbiju*. Institut za pedagoška istraživanja.

Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(2), 110–136.

Dorward, J. (2002). Intuition and research: Are they compatible? *Teaching Children Mathematics*, *8*(6), 329–332.

Dossey, J., McCrone, S., & O'Sullivan, C. (2006). *Problem solving in the PISA and TIMSS 2003 assessments*. National Center for Education Statistics.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25–41). Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3–26). ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 103–131.

Edens, K., & Potter, E. (2007). The relationship of drawing and mathematical problem solving: Draw for math tasks. *Studies in Art Education*, *48*(3), 282–298. https://doi.org/10.1080/00393541.2007.11650106

Edens, K., & Potter, E. (2008). How students unpack the structure of a word problem: Graphic representations and problem solving. *School Science and Mathematics*, *108*(5), 184–196. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2008.tb17827.x

Elia, I., Gagatsis, A., & Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representation on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction*, *17*(6), 658–672. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.09.011

Elia, I., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Kovolou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in

mathematics. *ZDM Mathematics Education*, *41*(5), 605–618. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0184-6

Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147–164). Macmillan Publishing Company.

Fennema, E., Carpenter, T. P., Jacobs, V. R., Franke, M. L., & Levi, L. W. (1998). A longitudinal study of gender differences in young children's mathematics thinking. *Educational Researcher*, *27*(5), 6–11. https://doi.org/10.3102/0013189X027005006

Field, A. (2013). *Discovering statistics using IBM SPSS Statistics* (4th ed.). SAGE Publications.

Fischbein, E. (1977). Image and concept in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *8*(2), 153–165.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. D. Reidel Publishing Company.

Freire, A. F., Rodrigues, F. S., Aquino, M. R., Soares, M. V., Gois, D. D., & Viana, J. D. (2018). The use of the Geoboard in teaching geometry: Calculating area and perimeter. *Multidisciplinary Core Scientific Journal of Knowledge*, *3*, 119–135.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, *1*(1–2), 3–8. https://doi.org/10.1007/BF00426224

Furner, J. M., & Marinas, C. A. (2011). *Geoboards to GeoGebra: Moving from the concrete to the abstract in geometry*. Proceedings of the 23rd International Conference on Technology in Collegiate Mathematics (ICTCM). http://archives.math.utk.edu/ICTCM/VOL23/S088/paper.pdf

Fuson, K. C., & Willis, G. B. (1989). Second graders' use of schematic drawings in solving addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology*, *81*(4), 514–520. https://doi.org/10.1037/0022-0663.81.4.514

Gallagher, A. M., & De Lisi, R. (1994). Gender differences in scholastic aptitude test-mathematics problem solving among high-ability students. *Journal of Educational Psychology*, *86*(2), 204–211. https://doi.org/10.1037/0022-0663.86.2.204

Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 197–218). Lawrence Erlbaum Associates.

Goldin, G. A., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1–23). National Council of Teachers of Mathematics.

Goldstone, R. L., & Son, J. Y. (2005). The transfer of scientific principles using concrete and idealized simulations. *The Journal of the Learning Sciences*, *14*(1), 69–110. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1401_4

Greenes, C., & Findell, C. (1999). Developing students' algebraic reasoning abilities. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 127–137). National Council of Teachers of Mathematics.

Güler, G., & Çiltaş, A. (2011). The visual representation usage levels of mathematics teachers and students in solving verbal problems. *International Journal of Humanities and Social Science*, *1*(11), 145–154.

Guncaga, J., & Žilková, K. (2019). Visualisation as a method for the development of the term rectangle for pupils in primary school. *European Journal of Contemporary Education, 8*(1), 52–68.

Hatisaru, V. (2022). The use of representations in solving mathematical problems. *AMEJ*, *4*(2), 9–14.

Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, *91*(4), 684–689. https://doi.org/10.1037/0022-0663.91.4.684

Hegarty, M., Mayer, R. E., & Monk, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology*, *87*(1), 18–32. https://doi.org/10.1037/0022-0663.87.1.18

Hickendorff, M. (2013). The effects of presenting multidigit mathematics problems in a realistic context on sixth graders' problem solving. *Cognition and Instruction*, *31*(3), 314–344.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65–97). Macmillan.

Higginson, W. (1982). Symbols, icons, and mathematical understanding. *Visible Language*, *16*(3), 239–248.

Hitt, F. (Ed.). (2002). *Representations and mathematics visualization*. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education / Cinvestav-IPN.

Hodnik Čadež, T., Mastnak, A., & Manfreda Kolar, V. (2014). Assessing preschool children's understanding of mathematical equivalence through problem solving. In M. Pytlak (Ed.), *Communication in the mathematics classroom* (pp. 13–24). Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.

Hoven, J., & Garelick, B. (2007). Singapore math: Simple or complex? *Educational Leadership*, *65*(3), 28–31.

Hughes-Hallett, D. (1991). Visualization and calculus reform. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 127–138). Mathematical Association of America.

Hurst, C., & Huntley, R. (2020). Distributivity, partitioning, and the multiplication algorithm. *Journal of Research and Advances in Mathematics Education*, *5*(3), 231–246.

Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology. (2012). *Mathematics problem solving*. http://www3.ipst.ac.th/primary_math/

International Association for the Evaluation of Educational Achievement. (2023). *TIMSS 2023: Trends in International Mathematics and Science Study* (IEA findings for Serbia).

Jones, K. (2002). Issues in the teaching and learning of geometry. In L. Haggarty (Ed.), *Aspects of teaching secondary mathematics: Perspectives on practice* (pp. 121–139). Routledge.

Kadijević, Đ. (2018). Uticaj međunarodnih istraživanja na razvoj nastavnih programa matematike. *Zbornik Instituta za pedagoška istraživanja*, *50*(1), 55–74.

Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In G. Graumann, T. Jahnke, H. Klika, & H. Schupp (Eds.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht* (pp. 66–84). Franzbecker.

Kaminski, J. A., Sloutsky, V. M., & Heckler, A. F. (2008). The advantage of abstract examples in learning math. *Science*, *320*(5875), 454–455. https://doi.org/10.1126/science.1154659

Kaput, J. J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research agenda for the learning and teaching of algebra* (pp. 167–194). Lawrence Erlbaum Associates.

Kaur, B. (2019). The why, what and how of the 'Model' method: A tool for representing and visualising relationships when solving whole number arithmetic word problems. *ZDM*, *51*(1), 151–168. https://doi.org/10.1007/s11858-018-1000-y

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139–151.

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past 25 years of research on teaching mathematical problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 1–15). Lawrence Erlbaum Associates.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press. https://doi.org/10.17226/9822

Kintsch, W. (1998). *Comprehension: A paradigm for cognition*. Cambridge University Press.

Kiziltoprak, A., & Köse, N. (2017). Relational thinking: The bridge between arithmetic and algebra. *International Electronic Journal of Elementary Education*, *10*(1), 131–145. https://doi.org/10.26822/iejee.2017131893

Kleven, A. H. (2022). A framework for analysing drawings as tools for mathematical reasoning. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 379–386). ERME.

Koehler, J. L. (2004). *Learning to think relationally: Thinking relationally to learn* [Doctoral dissertation, University of Wisconsin-Madison]. ProQuest Dissertations and Theses Global.

Kozhevnikov, M., Hegarty, M., & Mayer, R. E. (2002). Revising the visualizer-verbalizer dimension: Evidence for two types of visualizers. *Cognition and Instruction*, *20*(1), 47–77. https://doi.org/10.1207/S1532690XCI2001_3

Krawec, J. L. (2010). *Problem representation and mathematical problem solving of students with varying abilities* [Doctoral dissertation, University of Miami]. ProQuest Dissertations and Theses Global.

LeBlanc, J. F., & Springer, G. (1977). *Mathematical Problem Solving Project: Problem solving strategies and applications of mathematics in the elementary school* (Final Report). Indiana University.

Lesh, R. A., Cramer, K., Doerr, H., Post, T., & Zawojewski, J. (2003). Model development sequences. In R. A. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving* (pp. 35–58). Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33–40). Lawrence Erlbaum Associates.

Leyton, M. (2002). *Symmetry, causality, mind*. MIT Press.

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). *Problem solving in mathematics education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-40730-2

Lindberg, S. M., Hyde, J. S., Petersen, J. L., & Linn, M. C. (2010). New trends in gender and mathematics performance: A meta-analysis. *Psychological Bulletin*, *136*(6), 1123–1135. https://doi.org/10.1037/a0021276

Littlewood, J. E. (1953). *A mathematician's miscellany*. Methuen & Co.

Lowrie, T., & Logan, T. (2023). Spatial visualization supports students' math: Mechanisms for spatial transfer. *Journal of Intelligence*, *11*(6), Article 127. https://doi.org/10.3390/jintelligence11060127

Lowrie, T., Diezmann, C. M. (2011). Enhancing visual-spatial reasoning: Gender and age differences in 10-year-olds' use of graphics. *Learning and Instruction*, 21(3), 356-364.

Magnani, L. (2001). *Abduction, reason, and science: Processes of discovery and explanation*. Kluwer Academic/Plenum Publishers.

Magnani, L. (2004). Conjectures and manipulations: Computational modeling and the extratheoretical dimension of scientific discovery. *Minds and Machines*, *14*(4), 507–537.

Mainali, B. (2021). Representation in teaching and learning mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology*, *9*(1), 1–21. https://doi.org/10.46328/ijemst.1111

Marjanović, M. (2007). Metodološki aspekti nastave i udžbenika matematike. U B. Marković (Ur.), *Udžbenik i savremena nastava* (str. 249–262). Zavod za udžbenike.

Marković, Z. (2011). Matematičko modelovanje u matematičkom obrazovanju*, Istraživanje matematičkog obrazovanja*, *3*(4), 35-50.

Markworth, K. A. (2010). *Growing and growing: Promoting functional thinking with geometric growing patterns* [Doctoral dissertation, University of North Carolina at Chapel Hill]. ProQuest Dissertations and Theses Global.

Mayer, R. E. (Ed.). (2005). *The Cambridge handbook of multimedia learning*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511816819

Milinković, J., Mihajlović, A., & Dejić, M. (2019). Effective choices of representations in problem solving. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11)* (pp. 384–391). Utrecht University. https://hal.science/hal-02435289

Mingke, G., & Alegre, E. (2019). Difficulties encountered in mathematical word problem solving of the grade six learners. *International Journal of Scientific and Research Publications*, *9*(6), 336–345.

Ministry of Education, Singapore. (2012). *Primary mathematics teaching and learning syllabus*. Curriculum Planning and Development Division.

Molina, M., Castro, E., & Ambrose, R. (2005). Enriching arithmetic learning by promoting relational thinking. *The International Journal of Learning*, *12*(5), 265–270.

Monk, S. (2003). Representation in school mathematics: Learning to graph and graphing to learn. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 250–262). National Council of Teachers of Mathematics.

Montague, M., & Applegate, B. (2000). Middle school students' perceptions, persistence, and performance in mathematical problem solving. *Learning Disability Quarterly*, *23*(3), 215–227.

Moreno, R., Ozogul, G., & Reisslein, M. (2011). Teaching with concrete and abstract visual representations: Effects on students' problem solving, problem representations, and learning perceptions. *Journal of Educational Psychology*, *103*(1), 32–47. https://doi.org/10.1037/a0021995

Moyer, P. S., Bolyard, J. J., & Spikell, M. A. (2002). What are virtual manipulatives? *Teaching Children Mathematics*, *8*(6), 372–377. https://doi.org/10.5951/TCM.8.6.0372

Mullis, I. V. S., & Martin, M. O. (2019). *TIMSS 2019 assessment frameworks*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement. https://timssandpirls.bc.edu/timss2019/frameworks/

Nasrun, Prahmana, R. C. I., & Akib, I. (2023). The students' representative processes in solving mathematical word problems. *Knowledge*, *3*(1), 70–79. https://doi.org/10.3390/knowledge3010006

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*.

Ng, S. F., & Lee, K. (2005). How primary five pupils use the model method to solve word problems. *The Mathematics Educator*, *9*(1), 60–83.

Ng, S. F., & Lee, K. (2009). The model method: Singapore children's tool for representing and solving algebraic word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(3), 282–313.

Nieuwoudt, S. (2015). Developing a model for problem-solving in a Grade 4 mathematics classroom. *Pythagoras*, *36*(2), Article 275. https://doi.org/10.4102/pythagoras.v36i2.275

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 3–32). Springer.

Novick, L. R., & Bassok, M. (2005). Problem solving. In K. J. Holyoak & R. G. Morrison (Eds.), *The Cambridge handbook of thinking and reasoning* (pp. 321–350). Cambridge University Press.

Novotná, J. (1997). Phenomena discovered in the process of solving word problems. In M. Hejný & J. Novotná (Eds.), *Proceedings ERCME 97* (pp. 105–109). Prometheus.

Novotná, J., & Rogers, L. (2003). Word problems: A framework for understanding. In L. Rogers & J. Novotná (Eds.), *Analysis and teaching: Classroom contexts: Effective learning and teaching of mathematics from primary to secondary school* (pp. 79–96). Pitagora Editrice.

Novotná, J., & Sarrazy, B. (2005). Model of a professor's didactical action in mathematics education: Professor's variability and students' algorithmic flexibility in solving arithmetical problems. In J.-P. Drouhard (Ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 696–705). ERME.

O'Halloran, K. (2005). *Mathematical discourse: Language, symbolism, and visual images*. Continuum.

Obradović, D., & Zeljić, M. (2015). Metode i strategije rešavanja tekstualnih zadataka u nastavi matematike. *Inovacije u nastavi*, *28*(1), 69–81. https://doi.org/10.5937/inovacije1501069O

OECD. (2019). *PISA 2018 assessment and analytical framework*. OECD Publishing.

Özgün-Koca, S. A. (1998, October 31–November 3). *Students' use of representations in mathematics education* [Paper presentation]. The 20th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Raleigh, NC, United States.

Paivio, A. (1986). *Mental representations: A dual coding approach*. Oxford University Press.

Pallant, J. (2017). *SPSS priručnik za preživljavanje: Postupni vodič kroz analizu podataka pomoću SPSS-a* (6. izd.). Mikro knjiga.

Panasuk, R. (2011). Taxonomy for assessing conceptual understanding in algebra using multiple representations. *College Student Journal*, *45*(2), 219–232.

Pantziara, M., Gagatsis, A., & Elia, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of nonroutine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(1), 39–60.

Pape, S. J. (2003). Compare word problems: Consistency hypothesis revisited. *Contemporary Educational Psychology*, *28*(3), 396–421. https://doi.org/10.1016/S0361-476X(02)00046-2

Pape, S. J., & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory Into Practice*, *40*(2), 118–127. https://doi.org/10.1207/s15430421tip4002_6

Parviainen, P., Eklund, K., Koivula, M., Liinamaa, T., & Rutanen, N. (2023). Teaching early mathematical skills to 3- to 7-year-old children — Differences related to mathematical skill category, children's age group and teachers' characteristics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *21*(7), 1961–1983. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10341-y

Peirce, C. S. (1956). The essence of mathematics. In J. R. Newman (Ed.), *The world of mathematics* (Vol. 3, pp. 1773–1786). Simon & Schuster.

Petrović, N., Mrđa, M., & Kovačević, P. (2004). Modelsko-problemski pristup nastavi matematike. *Norma*, *10*(1–2), 111–121.

Piaget, J. (1951). *Play, dreams and imitation in childhood*. W. W. Norton & Company.

Pijaže, Ž. (1997). *Psihologija inteligencije*. Nolit.

Pinter, J. (1997). *Matematičko modelovanje u početnoj nastavi matematike*. Učiteljski fakultet.

PISA (2018). Programme for International Student Assessment (OECD Findings for Serbia).

Poland, M., & van Oers, B. (2007). Effects of schematising on mathematical development. *European Early Childhood Education Research Journal*, *15*(2), 269–293.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.

Pólya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2nd ed.). Princeton University Press.

Presmeg, N. C. (1991). Classroom aspects which influence use of visual imagery in high school mathematics. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 191–198). PME.

Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(6), 595–610. https://doi.org/10.1007/BF00540062

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205–235). Sense Publishers.

Rahmiati, M. (2016). The attempt to improve mathematics learning motivation using the geoboard (spiked board) among grade II elementary school students. *Global Journal of Business and Social Science Review*, *4*(3), 74–78.

Rellensmann, J., Schukajlow, S., & Leopold, C. (2017). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(1), 53–78. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9736-1

Rellensmann, J., Schukajlow, S., Blomberg, J., & Leopold, C. (2022). Effects of drawing instructions and strategic knowledge on mathematical modeling performance: Mediated by the use of the drawing strategy. *Applied Cognitive Psychology*, *36*(2), 402–417. https://doi.org/10.1002/acp.3930

Richardson, K. (2004). *A design of useful implementation principles for the development, diffusion, and appropriation of knowledge in mathematics classrooms* [Unpublished doctoral dissertation]. Purdue University.

Rivera, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum* (Mathematics Education Library, Vol. 49). Springer.

Romano, D. (2009). Šta je algebarsko mišljenje?. *MAT-KOL (Banja Luka)*, *15*(2), 19–29.

Sani, S., & Salahudeen, B. (2016). Effects of geoboard and geographical globe on senior secondary school students' performance in mathematics in Kaduna state. *Journal of Science, Technology & Education*, *4*(1), 140–148.

Santos-Trigo, M. (2024). Problem solving in mathematics education: Tracing its foundations and current research-practice trends. *ZDM – Mathematics Education*, *56*(2), 211–222. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01578-8

Scandrett, H. (2008). Using geoboards in primary mathematics: Going... going... gone?. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *13*(2), 29–32.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Schoenherr, J., & Schukajlow, S. (2024). Characterizing external visualization in mathematics education research: A scoping review. *ZDM – Mathematics Education*, *56*(1), 73–85. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01494-3

Schoenherr, J., Strohmaier, A. R., & Schukajlow, S. (2024). Learning with visualizations helps: A meta-analysis of visualization interventions in mathematics education. *Educational Research Review*, *45*, Article 100639. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2024.100639

Seufert, T. (2003). Supporting coherence formation in learning from multiple representations. *Learning and Instruction*, *13*(2), 227–237. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(02)00022-1

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Sibiya, M. R. (2020). A reconsideration of the effectiveness of using geoboard in teaching Euclidean geometry. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *16*(9), 1–10. https://doi.org/10.29333/ejmste/8360

Slavin, R. E. (2003). *Educational psychology: Theory and practice*. Allyn & Bacon.

Sternberg, R. J. (2005). *Kognitivna psihologija*. Naklada Slap.

Stjepanović, I. (2012). Matematičko modelovanje u osnovnoj školi. *Istraživanje matematičkog obrazovanja*, *4*(6), 25–29.

Suh, J., & Moyer, P. S. (2007). Developing students' representational fluency using virtual and physical algebra balances. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *26*(2), 155–173.

Tall, D. (1986). *Building and testing a cognitive approach to the calculus using interactive computer graphics* [Doctoral dissertation, University of Warwick]. WRAP - Warwick Research Archive Portal.

Tall, D. (2003). Using technology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics. *História e Tecnologia no Ensino da Matemática*, *1*, 1–28.

Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, *20*(2), 5–24. https://doi.org/10.1007/BF03217474

Temur, Ö. D. (2012). Analysis of prospective classroom teachers' teaching of mathematical modeling and problem solving. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *8*(2), 83–93.

Terwel, J., van Oers, B., van Dijk, I., & van den Eeden, P. (2009). Are representations to be provided or generated in primary mathematics education? Effects on transfer. *Educational Research and Evaluation*, *15*(1), 25–44. https://doi.org/10.1080/13803610802481265

Thevenot, C. (2010). Arithmetic word problem solving: Evidence for the construction of a mental model. *Acta Psychologica*, *133*(1), 90–95. https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2009.10.004

Uesaka, Y., Manalo, E., & Ichikawa, S. (2010). The effects of perception of efficacy and diagram construction skills on students' spontaneous use of diagrams when solving math word problems. In A. K. Goel, M. Jamnik, & N. H. Narayanan (Eds.), *Diagrammatic representation and inference: 6th International Conference, Diagrams 2010* (LNAI 6170, pp. 197–211). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-14600-8_21

Urban, M., Murauyova, H., & Gadzaova, S. (2017). Didactic principles of visualization of mathematical concepts in primary education. *Pedagogika*, *127*(3), 70–86.

Utami, C. T. P., Mardiyana, & Pramudya, I. (2021). Visual students: How their representation in problem solving? *Advances in Social Science, Education and Humanities Research*, *597*, 185–189.

Utami, C. T. P., Mardiyana, & Triyanto. (2019). The identification of visual representation ability of junior high school students in solving geometry problems. *Journal of Physics: Conference Series*, *1180*(1), Article 012014. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1180/1/012014

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour*. Freudenthal Institute, Utrecht University.

van der Schoot, M., Bakker Arkema, A. H., Horsley, T. M., & van Lieshout, E. C. D. M. (2009). The consistency effect depends on markedness in less successful but not successful problem solvers: An eye movement study in primary school children. *Contemporary Educational Psychology*, *34*(1), 58–66.

van Dijk, I. M. A. W., van Oers, B., & Terwel, J. (2003). Providing or designing? Constructing models in primary math education. *Learning and Instruction*, *13*(1), 53–72.

Verenikina, I. (2010). Vygotsky in twenty-first-century research. In J. Herrington & B. Hunter (Eds.), *Proceedings of ED-MEDIA 2010--World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications* (pp. 16–25). Association for the Advancement of Computing in Education.

Verschaffel, L. (1994). Using retelling data to study elementary school children's representations and solutions of compare problems. *Journal of Research in Mathematics Education*, *25*(2), 141–165.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Swets & Zeitlinger.

Vessonen, T., Dahlberg, M., Hellstrand, H., Widlund, A., Korhonen, J., Aunio, P., & Laine, A. (2024). Task characteristics associated with mathematical word problem-solving performance among elementary school-aged children: A systematic review and meta-analysis. *Educational Psychology Review*, *36*(4), Article 117. https://doi.org/10.1007/s10648-024-09954-2

Vessonen, T., Hellstrand, H., Aunio, P., & Laine, A. (2024). Individual differences in mathematical problem-solving skills among 3- to 5-year-old preschoolers. *International Journal of Early Childhood*, *56*(2), 339–357. https://doi.org/10.1007/s13158-023-00361-2

Vidić, T. (2016). Stavovi učenika osnovne škole prema matematici. *Napredak*, *157*(1–2), 11–32.

Vigotski, L. S. (1956). Mišljenje i reč. U L. S. Vigotski, *Izabrana psihološka istraživanja* (str. 39–386). APN RSFSR.

Watters, J. J., English, L. D., & Mahoney, S. (2000). *Mathematical modeling in the elementary school*. Queensland University of Technology.

Weegar, M. A., & Pacis, D. (2012). *A comparison of two theories of learning—behaviorism and constructivism as applied to face-to-face and online learning*. National University.

Willis, G. B., & Fuson, K. C. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology*, *80*(2), 192–201. https://doi.org/10.1037/0022-0663.80.2.192

Woleck, K. R. (2001). Listen to their pictures: An investigation of children's mathematical drawings. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 215–227). National Council of Teachers of Mathematics.

Yildirim, T. P., Shuman, L., & Besterfield-Sacre, M. (2010). Model eliciting activities: Assessing engineering student problem solving and skill integration processes. *International Journal of Engineering Education*, *26*(4), 831–845.

Zahner, D., & Corter, J. (2010). The process of probability problem solving: Use of external visual representations. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(2), 177–204. https://doi.org/10.1080/10986061003654240

Zhang, J., & Norman, D. A. (1994). Representations in distributed cognitive tasks. *Cognitive Science*, *18*(1), 87–122. https://doi.org/10.1207/s15516709cog1801_3

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). Editors' introduction: What is mathematical visualization? U W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (str. 1–8). Mathematical Association of America.

Zlokapa, B. (2012). Matematičko modelovanje u obrazovanju – problemi i prednosti. *Istraživanje matematičkog obrazovanja*, *4*(6), 33–42.

Брунер, Џ. (1976). Процес образовања. *Педагогија*, *31*(2–3), 275–321.

Вилотијевић, М., и Вилотијевић, Н. (2016). *Модели развијајуће наставе*. Учитељски факултет.

Гашић-Павишић, С., & Станковић, Д. (2020). *ТИМСС 2019 у Србији: Резултати међународног истраживања постигнућа ученика 4. разреда основне школе из математике и природних наука*. Институт за педагошка истраживања.

Далингер, В. А. (2006). Когнитивно-визуальный подход и его особенности в обучении математике. *Вестник ОГПУ*, (1), 1–11.

Далингер, В. А. (2011). Обучение математике на основе когнитивно-визуального подхода. *Вестник Брянского государственного университета*, (1), 299–305.

Далингер, В. А., & Князева, О. О. (2004). *Когнитивно-визуальный подход к обучению математике*. Издательство ОмГПУ.

Дубљанин, С. (2010). Како ученици основне школе анализирају и решавају математичке задатке. *Настава и васпитање*, *59*(1), 39–53.

Ђокић, О. (2018). Истраживачке перспективе почетне наставе геометрије. *Истраживање математичког образовања*, *10*(18), 23–32.

Ђокић, О. Ј. (2013). *Реално окружење у почетној настави геометрије* [Докторска дисертација, Учитељски факултет, Универзитет у Београду].

Ђокић, О. Ј. (2023). *Теорије математичког образовања I: Прилог методици наставе математике у основној школи*. Учитељски факултет Универзитета у Београду.

Живановић, О. (2019). *Ефекти проблемске наставе у развоју способности математичког моделовања* [Докторска дисертација, Учитељски факултет, Универзитет у Београду].

Зељић, М. (2014). *Методички аспекти ране алгебре*. Учитељски факултет Универзитета у Београду.

Зељић, М. (2021). *Учење и поучавање математике – једнакост са више (не)познатих*. Учитељски факултет Универзитета у Београду.

Зељић, М., Дабић Боричић, М., & Илић, С. (2023). Разумевање задатака поређења код ученика другог разреда основне школе. *Иновације у настави*, *36*(1), 117–132. https://doi.org/10.5937/inovacije2301117Z

Князева, О. О. (2003а). *Визуализированные задачи и методика их использования в процессе обучения началам математического анализа* [Автореферат кандидатской диссертации, Омский государственный педагогический университет]. Издательство ОмГПУ.

Князева, О. О. (2003б). *Реализация когнитивно-визуального подхода в обучении старшеклассников началам математического анализа* [Кандидатская диссертация, Омский государственный педагогический университет].

Костић, В. (2017). *Когнитивно-визуелни приступ заснован на графичком приказу функције у решавању математичких проблема* [Докторска дисертација, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду].

Кузмановић, Д., & Павловић Бабић, Д. (2011). Приступи процењивању образовних постигнућа ученика – критички осврт. *Зборник Института за педагошка истраживања*, *43*(1), 63–85. https://doi.org/10.2298/ZIPI1101063K

Липковски, А. (2007). *Линеарна алгебра и аналитичка геометрија*. Завод за уџбенике.

Маричић, С., & Милинковић, Н. (2017). Уџбеник у стварању услова за контекстуални приступ учењу садржаја алгебре у почетној настави математике. *Зборник радова Педагошког факултета у Ужицу*, (19), 117–130.

Маричић, С., & Стојкановић, Ј. (2021). Тачкаста и квадратна мрежа у настави геометрије у млађим разредима основне школе. *Зборник радова Педагошког факултета у Ужицу*, (23), 111–126.

Марјановић, М. (1996). *Методика математике: 2. део*. Учитељски факултет Универзитета у Београду.

Матовић, Н. (2009). Врсте задатака и њихове карактеристике у уџбенику математике. *Настава и васпитање*, *58*(2), 185–200.

Милинковић, Ј. (2006). Репрезентације у настави вероватноће и статистике у основној школи. *Иновације у настави*, *19*(2), 27–36.

Милинковић, Ј. (2014). Математичко моделовање у наставним системима. *Иновације у настави*, *27*(2), 45–55. https://doi.org/10.5937/inovacije1402045M

Милинковић, Ј. (2016). *Огледи о учењу у настави математике*. Учитељски факултет Универзитета у Београду.

Николић, Н. Т. (2024). *Компетенције за решавање проблема: педагошка перспектива*. Институт за педагогију и андрагогију Филозофског факултета Универзитета у Београду. https://reff.f.bg.ac.rs/bitstream/id/20405/bitstream_20405.pdf

Пермякова, М. Ю. (2015). *Формирование функционально-графической грамотности учащихся основной школы в процессе обучения математике* [Диссертация кандидата педагогических наук, Шадринский государственный педагогический институт].

Правилник о плану и програму наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања. (2019). *Службени гласник Републике Србије – Просветни гласник*, (5).

Правилник о стандардима образовних постигнућа за крај првог циклуса основног образовања и за крај основног образовања. (2024). *Службени гласник РС*, (104). https://pravno-informacioni-sistem.rs/eli/rep/sgrs/ministarstva/pravilnik/2024/104/6/reg

Ранђеловић, Б., Ђукић, Д., Трбојевић, Т., & Марковић, Б. (2024). *Резултати међународног истраживања ТИМСС 2023: Национални извештај за Републику Србију*. Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања.

Резник, Н. А. (1997). *Методические основы обучения математике в средней школе с использованием средств развития визуального мышления* [Докторская диссертация, Институт продуктивного обучения Российской академии образования].

Сатьянов, П. Г. (1984). *Методика использования задач графического содержания в обучении началам математического анализа в школе* [Диссертация кандидата педагогических наук, Московский лесотехнический институт].

Станојевић, Д., & Милинковић, Ј. (2013). *ТИМСС 2011 – МАТЕМАТИКА: Преглед наставног програма и збирка задатака за 4. разред*. Институт за педагошка истраживања.

Стевановић, С., Црвенковић, С., & Романо, Д. А. (2014). Један примјер анализе аритметичког и раноалгебарског мишљења. *Иновације у настави*, *27*(1), 118–134.

Ћебић, С. (2006). Геометрија у школској настави математике. *Иновације у настави*, *19*(2), 5–20.

Фридман, Л. М. (2009). *Теоретические основы методики обучения математике*. URSS.

Фридман, Л. М., & Турецкий, Е. Н. (2005). *Как научиться решать задачи*. Просвещение.

Центар за евалуацију у образовању. (2024). *Резултати међународног истраживања ТИМСС 2023: Национални извештај Србија*.

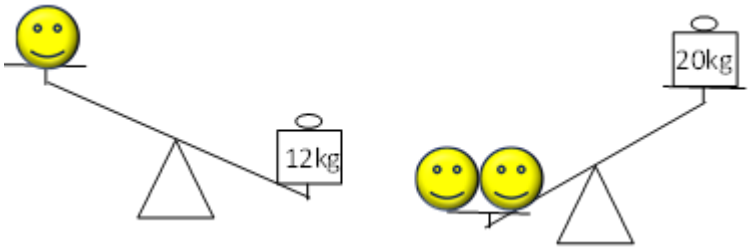
ПРИЛОЗИ

ПРИЛОГ 1. ИНИЦИЈАЛНИ ТЕСТ – АРИТМЕТИКА И АЛГЕБРА

Име и презиме:_____

Редни број	ЗАДАТАК	Број поена
1.	На оба краја правог пута засађено је по једно дрво и на сваких 5 m пута још по једно дрво. Дужина пута је 15 m. Колико дрвећа је засађено? **Место за рад:** **Одговор:** _____	5
2.	Миша је својих 8 аутомобилчића поређао у колону. Колика је дужина те колоне ако је дужина сваког аутомобилчића 10 cm, а растојање између свака два аутомобилчића 2 cm? **Место за рад:** **Одговор:** _____	5
3.	Сви ученици Аниног одељења седе у биоскопским редовима. У сваком реду седи исти број ученика. Два реда ученика су испред Ане и један ред ученика је иза ње. У Анином реду три ученика је са њене леве стране, а пет ученика са њене десне стране. Колико ученика укупно има у Анином одељењу? **Место за рад:** **Одговор:** _____	5

4.	Четири птице, врабац, голуб, ласта и сеница, стоје једна поред друге на жици. Ласта стоји на пола пута између голуба и сенице. Удаљеност између голуба и ласте је једнака као између сенице и врабца. Ласта стоји 4 m удаљена од врабца. Колико су метара удаљени врабац и голуб? **Место за рад:** **Одговор:** _____	5
5.	Мајстор Раша је набавио 4 даске од по 25 dm дужине да направи полицу. Колико даски од по 10 dm он може добити од даски које је набавио? **Место за рад:** **Одговор:** _____	8
6.	Маја има две шарене траке од по 5 m. За једну украсну машницу треба јој 2 m траке. Колико машница Маја може да направи? **Место за рад:** **Одговор:** _____	8

7.	На једној страни ваге налази се тег од 1 kg и пола коцке. На другој страни је једна цела коцка. Вага је у равнотежи. Колико килограма је тешка коцка? **Место за рад:** **Одговор:** _____	5
8.	Маса играчке смешка је цео број килограма (види слику). Колика је маса једног смешка?  **Место за рад:** **Одговор:** _____	5
9.	Можеш купити 5 мини кроасана за исто новца као и 3 мини кроасана и 4 сока од по 25 динара. Колико кошта један мини кроасан? **Место за рад:** **Одговор:** _____	5

10.	Лука има неколико лопти у три различите боје црвеној, жутој и белој. Лопте исте боје имају исту масу. Црвена и жута лопта су тешке 6 kg, две беле лопте и жута су тешке 14 kg, а црвена и две жуте лопте 10 kg. Колика је маса лопте беле боје? **Место за рад:** **Одговор:** _____	5
11.	У воћњаку је било 20 стабала јабука, што је за 5 стабла више него крушака. Колико је укупно стабала јабука и крушака у том воћњаку? **Место за рад:** **Одговор:** _____	5
12.	Марко и Јанко су сакупили укупно 25 сличица. Колико је сакупио Јанко ако се зна да је он скупио 3 сличице више од Марка? **Место за рад:** **Одговор:** _____	5

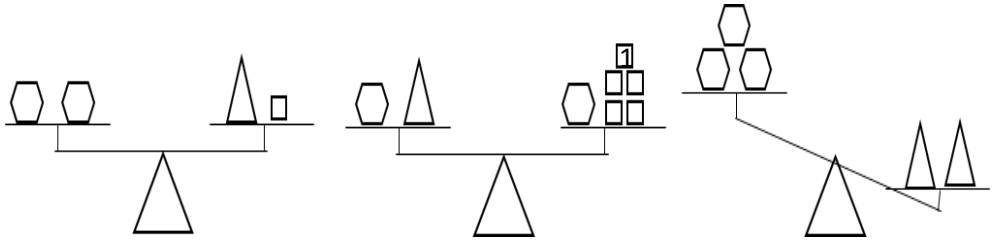
13.	Тања има 37 шналица. Њена пријатељица Ксенија је рекла:“Ако ми даш 10 шналица имаћемо обе исти број шналица.“ Колико шналица има Ксенија? **Место за рад:** **Одговор:** _____	8
14.	У две пернице био је исти број оловака. Кад смо у прву перницу додали још 3, а у другу још 5 оловака, тада је у обе пернице било укупно 20 оловака. По колико је оловака било у свакој перници на почетку (пре додавања)? **Место за рад:** **Одговор:** _____	8

ПРИЛОГ 2. ФИНАЛНИ ТЕСТ – АРИТМЕТИКА И АЛГЕБРА

Име и презиме:_____

Редни број	ЗАДАТАК	Број поена
1.	Уз стазу дугу 140 cm која води кроз двориште мама је посадила руже и то по једну на почетак и крај стазе и на сваких 35 cm још по једну. Колико је ружа посадила? **Место за рад:** **Одговор:** _____	5
2.	У парку је, поред једне праволинијске стазе, посађено 5 бреза. Између сваке две брезе постављена је по једна клупа. Дужина клупе је 120 cm, а размак између клупе и брезе 65 cm. Колика је дужина те стазе? **Место за рад:** **Одговор:** _____	5
3.	Ученици Ацине школе припремили су се за почетак трке. Сви су се поређали један иза другог у стазе за трчање. У Ациној стази испред њега је 9, а иза њега још 7 ученика. Са његове леве стране су две, а са десне још три стазе за трчање. Ако је у свакој стази исти број ученика колико је ученика учествовало на тој трци? **Место за рад:** **Одговор:** _____	5

4.	Алекса, Бане, Циле и Дуле су комшије и паркирају аутомобиле у дворишту зграде на паркингу један поред другог. Цилетов ауто је између Банетовог и Дулетовог подједнако удаљен од оба. Растојање између Банетовог и Цилетовог аута је једнако растојању између Дулетовог и Алексовог аута. Растојање између Цилетовог и Алексовог аута је 460 cm. Колико су центиметара удаљени Алексов и Банетов ауто? **Место за рад:** **Одговор:** _____	5
5.	Дејан има 3 дрвене летвице дужине 105 cm. Да би направио рам за слику требају му летвице дужине 30 cm. Колико летвица за рам он може добити од летвица које има? **Место за рад:** **Одговор:** _____	8
6.	Сара има два украсна папира од по 200 cm дужине.Да би упаковала један поклон треба јој комад украсног папира од 80 cm дужине. Колико поклона Сара може да упакује? **Место за рад:** **Одговор:** _____	8

7.	На једној страни ваге налази се тег од 100 g и пола чоколаде. На другој страни је једна цела чоколада. Вага је у равнотежи. Колико грама је тешка чоколада? **Место за рад:** **Одговор:** _____	5
8.	Марко има три ваге на које је ставио три различите врсте тегова, као што је приказано на слици (тегови исте врсте имају исту тежину). Шта треба да стави на леви тас треће ваге да би вага била у равнотежи? **Место за рад:**  **Одговор:** _____	5
9.	Можеш купити 6 свески за исто новца као и две свеске и 5 гумица од по 64 динара. Колико кошта једна свеска? **Место за рад:** **Одговор:** _____	5

10.	Две црвене, две жуте и једна бела лопта укупно имају 950 g. Две жуте, црвена и бела лопта имају 810 g. Две црвене, жута и бела лопта имају 780 g. Колико грама је тешка црвена, колико жута, а колико бела лопта? **Место за рад:** **Одговор:** _____	5
11.	У једном хотелу је смештено 235 туриста, што је за 15 туриста више него у другом хотелу. Колико је укупно туриста смештено у оба хотела? **Место за рад:** **Одговор:** _____	5
12.	Марта и Јана имају укупно 255 перлица за огрлицу. Ако знамо да Јана има 33 перлице више од Марте, колико Јана има перлица? **Место за рад:** **Одговор:** _____	5

13.	У једној кесици има 134 бомбонице. Ако би у другу кесицу пребацили 6 бомбоница у обе би имали исти број бомбоница. Колико бомбоница има у другој кесици? **Место за рад:** **Одговор:** _____	8
14.	У две корпе имамо исти број јабука. Када у прву корпу додамо још 11, а у другу још 9 јабука, тада у обе корпе укупно имамо 200 јабука. По колико је јабука било у свакој корпи пре додавања? **Место за рад:** **Одговор:** _____	8

ПРИЛОГ 3. УПИТНИК ЗА УЧЕНИКЕ (скала ставова)

Име и презиме ученика: _____

Одговори на следећа питања тако што ћеш заокружити један од понуђених одговора, ДА или НЕ.

1. Више волим да решавам текстуалне задатке из математике него задатке задате у математичкој форми.

ДА **УГЛАВНОМ ДА** **НАЈЧЕШЋЕ НЕ** **НЕ**

2. Када решавам текстуалне задатке из математике прочитам текст више пута.

ДА **УГЛАВНОМ ДА** **НАЈЧЕШЋЕ НЕ** **НЕ**

3. Када решавам текстуалне задатке из математике податке и односе међу њима представим цртежом.

ДА **УГЛАВНОМ ДА** **НАЈЧЕШЋЕ НЕ** **НЕ**

4. Када решавам текстуалне задатке из математике потребна ми је помоћ учитеља/друга/родитеља.

ДА **УГЛАВНОМ ДА** **НАЈЧЕШЋЕ НЕ** **НЕ**

5. Када не разумем текстуални задатак из математике одустајем од решавања.

ДА **УГЛАВНОМ ДА** **НАЈЧЕШЋЕ НЕ** **НЕ**

6. Упоран сам да решим сваки задати текстуални задатак из математике.

ДА **УГЛАВНОМ ДА** **НАЈЧЕШЋЕ НЕ** **НЕ**

7. Успешно решавам текстуалне задатке из математике.

ДА **УГЛАВНОМ ДА** **НАЈЧЕШЋЕ НЕ** **НЕ**

8. Текстуални задаци из математике су ми тешки за решавање.

ДА **УГЛАВНОМ ДА** **НАЈЧЕШЋЕ НЕ** **НЕ**

9. Када не успем одмах решити текстуални задатак из математике одустајем од решавања.

ДА **УГЛАВНОМ ДА** **НАЈЧЕШЋЕ НЕ** **НЕ**

10. Лакше ми је да решим текстуални задатак из математике ако ми је уз њега дат и цртеж?

ДА **УГЛАВНОМ ДА** **НАЈЧЕШЋЕ НЕ** **НЕ**

11. Користим свој цртеж када решавам текстуалне задатке из математике?

ДА **УГЛАВНОМ ДА** **НАЈЧЕШЋЕ НЕ** **НЕ**

12. Учитељ/учитељица користи цртеж када решава текстуалне задатке на часу?

ДА **УГЛАВНОМ ДА** **НАЈЧЕШЋЕ НЕ** **НЕ**

13. Учитељ/учитељица саветује да цртамо док решавамо текстуални задатак из математике?

ДА **УГЛАВНОМ ДА** **НАЈЧЕШЋЕ НЕ** **НЕ**

14. Умем да решавам текстуалне задатке тако што их најпре представим цртежом?

ДА **УГЛАВНОМ ДА** **НАЈЧЕШЋЕ НЕ** **НЕ**

ПРИЛОГ 4. ПИТАЊА ЗА НАСТАВНИКЕ ФОКУС ГРУПЕ

1. Како оцењујете когнитивно – визуелни приступ решавању проблемских задатака анализирајући постигнућа ученика пре и после примене експерименталног програма?

2. Примећујете ли промене у приступу ученика решавању текстуалних проблемских задатака и самој мотивацији на часовима математике?

3. Да ли ученици самоиницијативно визуелизују задатак?

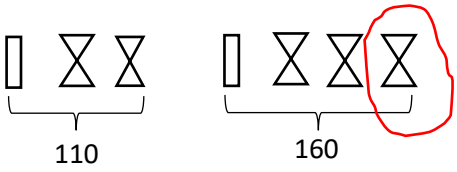
4. Да ли сте приметили промену у когнитивном приступу решавању проблема ако се инсистира на цртежу уз задатак? (Да ли се тада текст задатка анализира детаљније и са више разумевања)

ПРИЛОГ 5. ВЕЖБЕ У ОКВИРУ ЕКСПЕРИМЕНТАЛНОГ ПРОГРАМА

ВЕЖБА 1	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: Сабирање троцифреног броја и десетица; одузимање десетица од троцифреног броја**
Циљ вежбе:	Развијање способности ученика да израђује и користи цртеж као помоћну репрезентацију при решавању текстуалних задатака
Исход:	Ученик илуструје слободним цртежом елементе задатка, користи цртеж као помоћ при решавању и уочава потребне односе и релације на цртежу

1. Маја је једну шналицу и две машнице платила 110 динара, а Ана је једну шналицу и три машнице платила 160 динара. Колико кошта машница?

Решење:



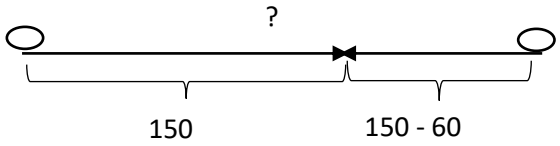
Цена машнице = 160 – 110

Цена машнице = 50 динара

Одговор: Машница кошта 50 динара.

2. Два пужа се налазе на крајевима зида и крећу се један другом у сусрет. До њиховог сусрета први пуж је прешао 150 cm, а други 60 cm мање. Колико је дуг зид по ком се крећу?

Решење:



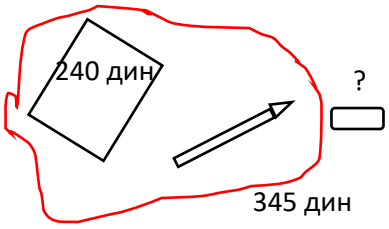
Први: 150cm Други: 150cm – 60cm = 90

Дужина зида: 150 + 90 = 240 cm

Одговор: Зид је дуг 240 cm.

3. Свеска и оловка коштају 345 динара. Колико кошта гумица ако свеска кошта 240 динара, а гумица је 10 динара скупља од оловке?

Решење:



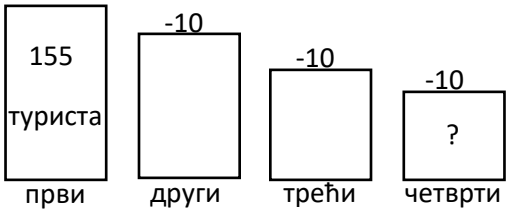
Оловка = 345 – 240 = 105 динара

Гумица = 105 + 10 = 115 динара

Одговор: Гумица кошта 115 динара.

4. У четири хотела су смештени туристи. У првом је 155 туриста, а у сваком следећем по 10 туриста мање у односу на претходни. Колико је туриста у четвртом хотелу?

Решење:



Други = 155 – 10 = 145

Трећи = 145 – 10 = 135

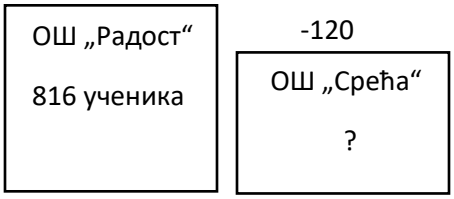
Четврти = 135 – 10 = 125

(може и Четврти = 155 – 30 = 125)

Одговор: У четвртом хотелу је 125 туриста.

5. У ОШ “Радост” је 816 ученика, што је за 120 ученика више него у ОШ “Срећа”. Колико је ученика у ОШ “Срећа”?

Решење:



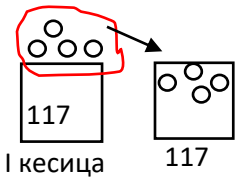
ОШ „Срећа“ = 816 – 120 = 696 ученика

Одговор: У ОШ „Срећа“ је 696 ученика.

ВЕЖБА 2	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: Сабирање троцифреног и једноцифреног броја; одузимање једноцифреног од троцифреног броја**
Циљ вежбе:	Развијање способности ученика да израђује и користи цртеж као помоћну репрезентацију при решавању текстуалних задатака
Исход:	Ученик илуструје слободним цртежом елементе задатка, користи цртеж као помоћ при решавању и уочава потребне односе и релације на цртежу

1. Када је Дарко из прве кесице бомбона пребацио четири бомбоне у другу кесицу у обе је било по 117 бомбона. Колико је бомбона било у свакој кесици пре пребацивања?

Решење:



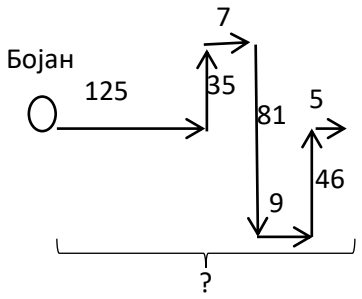
I кесица = 117 + 4 = 121

II кесица = 117 – 4 = 113

Одговор: Пре пребацивања је **у** првој кесици било 121 бомбона, а у другој 113 бомбона.

2. Бојан је укључио бројач корака на свом сату. Кренуо је право и направио 125 корака, али тада је скренуо лево 35 корака, па десно 7 корака, онда опет десно 81 корак, онда лево 9 корака, па опет лево 46 корака и на крају десно 5 корака. Да је Бојан ишао само право колико корака би био удаљен од почетне позиције?

Решење:



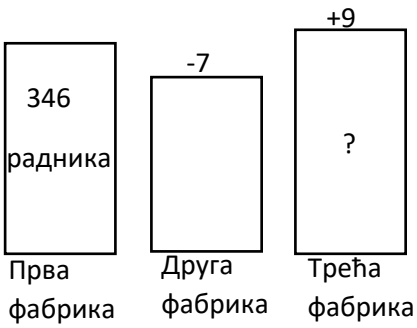
? = 125 + 7 + 9 + 5 = 132 + 9 + 5 =

= 141 + 5 = 146

Одговор: Да је Бојан ишао само право био би удаљен 146 корака од своје почетне позиције.

3. У једној фабрици ради 346 радника. У другој ради 7 радника мање него у првој, а у трећој 9 радника више него у другој. Колико радника ради у трећој фабрици?

Решење:



Друга = 346 – 7 = 339

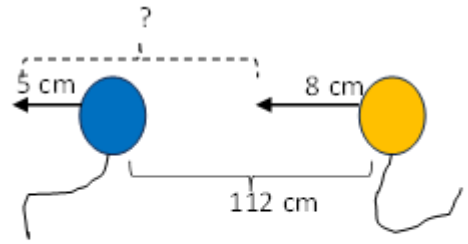
Трећа = 339 + 9 = 348

(може и 346 + 2 = 348)

Одговор: У трећој фабрици ради 348 радника.

4. Два балона се налазе на растојању 112 центиметара један од другог. Задувао је ветар и померио их оба у истом смеру, први балон за 5 центиметара, а други за 8 центиматара. Колико је сада растојање између њих?

Решење:



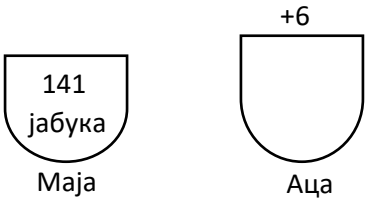
112 cm +5 cm – 8 cm = 117 cm – 8 cm =
= 109 cm

(може и 112 cm – 3 cm = 109 cm)

Одговор: Сада су балони на растојању од 109 центиметара.

5. Маја и Аца су брали јабуке. Маја је набрала 141 јабуку што је за 6 јабука мање него што је набарао Аца. Колико је јабука набрао Аца?

Решење:



Аца = 141 + 6 = 147

Одговор: Аца је набрао 147 јабука.

ВЕЖБА 3	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: Сабирање троцифреног и двоцифреног броја**
Циљ вежбе:	Развијање способности ученика да израђује и користи цртеж као помоћну репрезентацију при решавању текстуалних задатака
Исходи:	Ученик илуструје слободним цртежом елементе задатка, користи цртеж као помоћ при решавању и уочава потребне односе и релације на цртежу

1. У једној кесици има 128 бомбоница, што је за 23 бомбонице мање него у другој кесици. Колико бомбоница има у другој кесици?

Решење:



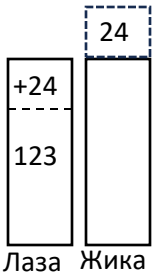
2. кесица = 128 + 23

2. кесица = 151

Одговор: У другој кесици има 151 бомбоница.

2. Лаза и Жика скупљају сличице фудбалера. Лаза има 123 сличице, а ако би му Жика дао 24 сличице оба би имали исти број сличица. Колико сличица има Жика?

Решење:



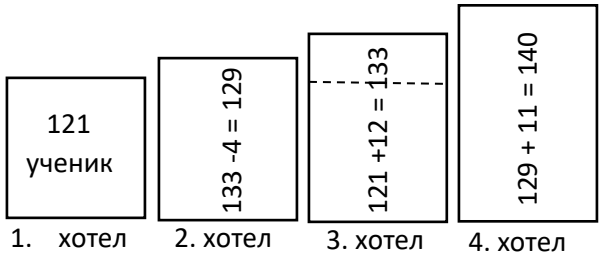
Жика = (123 + 24) + 24 =

= 147 + 24 = 171

Одговор: Жика има 171 сличицу.

3. У четири хотела су смештени ученици. У првом је 121 ученик, а у трећем за 12 више него у првом, у другом 4 мање него у трећем, а у четвртом је 11 ученика више него у другом. Колико је ученика смештено у сваком хотелу?

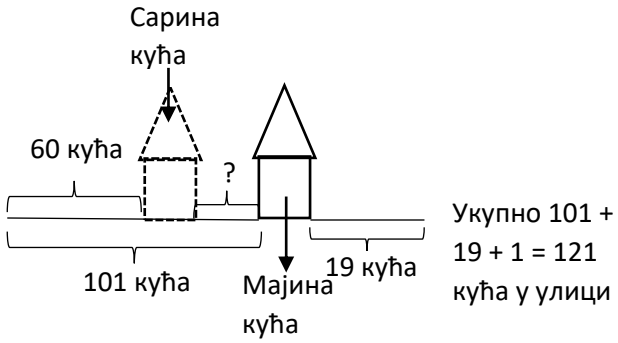
Решење:



Одговор: У првом хотелу је 121 ученик, у другом 129, у трећем 133 и у четвртом 140 ученика.

4. Маја и Сара живе у истој улици. Са једне стране Мајине куће има још 101 кућа, а са друге стране 19. Сара живи у кући која је тачно на средини те улице. Колико кућа има између Мајине и Сарине куће?

Решење:



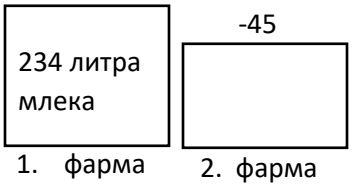
Сарина је 61. кућа, тако да између
ње и Маје има 40 кућа.

Одговор: Између Мајине и Сарине куће је 40 кућа.

ВЕЖБА 4	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: Одузимање двоцифреног од троцифреног броја**
Циљ вежбе:	Развијање способности ученика да израђује и користи цртеж и модел ваге као помоћну репрезентацију при решавању текстуалних задатака
Исход:	Ученик илуструје слободним цртежом елементе задатка, користи цртеж као помоћ при решавању, уочава потребне односе и релације на цртежу, користи особине ваге (моделовање на ваги), равнотежни положај ваге посматра као једнакост, уочава више решења истог проблема и дискутује их и уочава односе на датом цртежу и користи га како би дошао до решења

1. На једној фарми се произведе 234 литра млека, што је за 45 литара више него на другој фарми. Колико се литара млека произведе на другој фарми?

Решење:



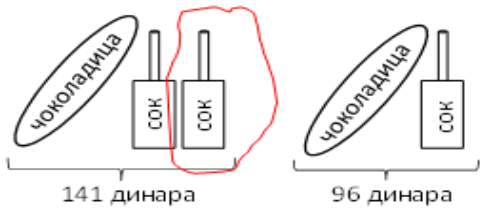
2. фарма: 234 - 45

2. фарма: 189 литара

Одговор: На другој фарми се произведе 189 литара млека.

2. Ако једна чоколадица и два сока коштају 141 динар, а једна чоколадица и један сок 96 динара. Колико кошта чоколадица?

Решење:

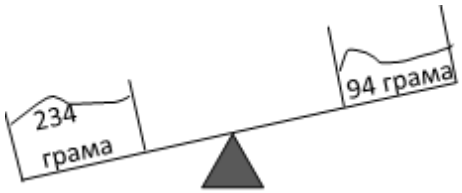


Сок = 141 – 96 = 45 динара

Чоколадица = 96 – 45 = 51 динар

Одговор: Чоколадица кошта 51 динар.

3. Шта треба урадити како би вага са слике на којој меримо брашно била у равнотежи?

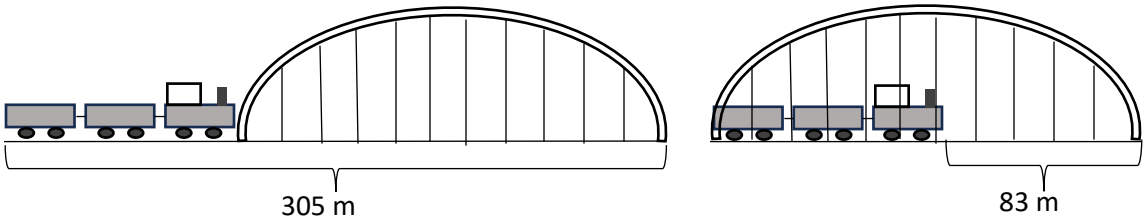


Решење: Лева страна је тежа за 234g – 94g = 140g

Задатак има три могућа решења:

1. решење: Додати 140g брашна на десну страну.
2. решење: Одасути 140g са леве стране.
3. решење: Пресути 70g са леве на десну страну (тада ће на обе бити по 164g)

4. Колика је дужина воза са слике?



Решење: Две дужине воза: 305m – 83m = 222m

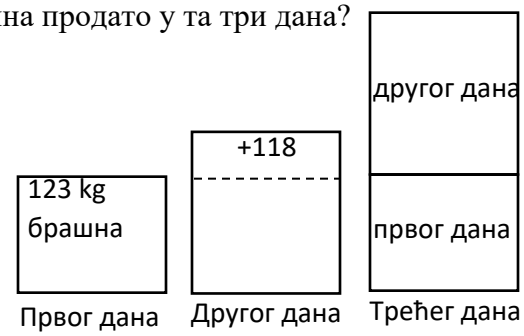
Дужина воза: 111m

Одговор: Воз је дуг 111m.

ВЕЖБА 5	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: Сабирање троцифрених бројева**
Циљ вежбе:	Развијање способности ученика да израђује и користи цртеж и модел ваге као помоћну репрезентацију при решавању текстуалних задатака
Исход:	Ученик илуструје слободним цртежом елементе задатка, користи цртеж као помоћ при решавању, уочава потребне односе и релације на цртежу и користи особине ваге односно моделовање на ваги

1. У продавници је првог дана продато 123 kg брашна, другог дана 118 kg брашна више, а трећег дана колико првог и другог дана заједно. Колико је укупно килограма брашна продато у та три дана?

Решење:



Другог дана: 123kg + 118kg = 241kg

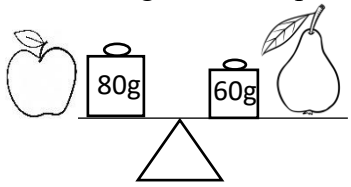
Трећег дана: 123kg + 241kg = 364kg

Укупно: 123kg + 241kg + 364kg = 728kg

Одговор: Укупно је продато 728 kg брашна.

2. Јабука и крушка заједно имају 460 g. Јабука и тег од 80 g су у равнотежи са крушком и тегом од 60 g. Колико грама има јабука, а колико крушка?

Решење:



На ваги је укупно: 460g + (80g + 60g) = 460g + 140g = 600g Значи на свакој страна по 300g.
Јабука: 300g – 80g = 220g Крушка: 300g – 60g = 240g

Одговор: Јабука има 220 g, а крушка 240 g.

3. У једној основној школи првака има 125, што је за 107 мање него у другој школи. Колико првака има у другој школи?

Решење:

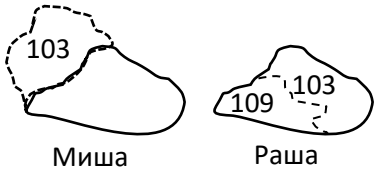


2.школа: 125 + 107 = 132 првака

Одговор: У другој школи је 132 првака.

4. Миша и Раша су сакупљали каменчиће на плажи. Раша је на гомилици имао 109 каменчића. Када би му Миша дао својих 103 каменчића имали би исти број каменчића на гомилицама. Колико каменчића је сакупио Миша?

Решење:



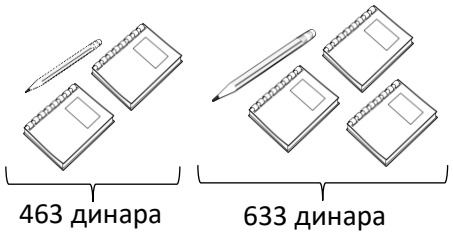
Миша: (109 + 103) + 103 = 112 + 103 = 115

Одговор: Миша је сакупио 115 каменчића.

ВЕЖБА 6	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: Одузимање троцифрених бројева**
Циљ вежбе:	Развијање способности ученика да израђује и користи цртеж, модел ваге и модел правоугаоника као помоћну репрезентацију при решавању текстуалних задатака
Исход:	Ученик илуструје слободним цртежом елементе задатка, користи цртеж као помоћ при решавању, уочава потребне односе и релације на цртежу, користи особине ваге и модел правоугаоника (“део целина”)

1. Једна оловка и две свеске коштају 463 динара. Ако је Сања платила једну оловку и три свеске 633 динара колико кошта оловка?

Решење:



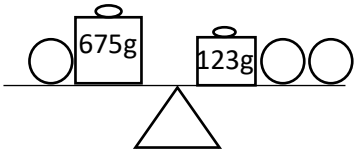
Свеска: 633 – 463 = 170 динара

Оловка: 463 – 170 – 170 = 123 динара

Одговор: Оловка кошта 123 динара.

2. Две кугле и тег од 123 g имају исту тежину као и једна кугла и тег од 675 g. Колико је тешка једна кугла?

Решење:



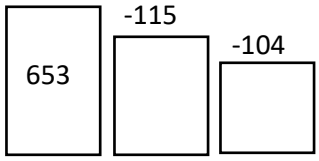
Ако склонимо по једну куглу са оба таса ваге добијамо да је:

Кугла: 675g – 123g = 552g

Одговор: Једна кугла је тешка 552 g.

3. Већ трећу годину се организује камп извиђача на Тари. У кампу је 653 извиђача, што је за 115 више него прошле године, а прошле године је било извиђача за 104 више него прве године организовања кампа. Колико је извиђача било прве године у кампу?

Решење:

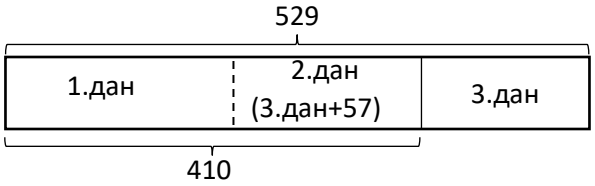


1.година кампа: (653 – 115) – 104 = 538 – 104 =
= 434 извиђача

Одговор: Прве године у кампу је било 434 извиђача.

4. Филип је за три дана аутомобилом прешао 529 km. Прва два дана је прешао 410 km, а другог дана је прешао 57 km више него трећег дана. Колико километара је Филип прешао сваког дана?

Решење:



3.дан: 529km – 410km = 119km

2.дан: 119km + 57km = 176km

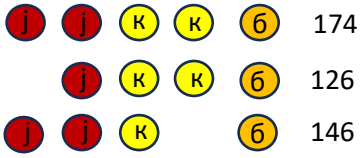
1.дан: 410km – 176km = 234km

Одговор: Филип је првог дана прешао 234 km, другог 176 km, а трећег 119 km.

ВЕЖБА 7	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: Сабирање и одузимање троцифрених бројева**
Циљ вежбе:	Развијање способности ученика да израђује и користи цртеж, модел ваге и модел правоугаоника као помоћну репрезентацију при решавању текстуалних задатака
Исход:	Ученик илуструје шематским цртежом елементе задатка, користи цртеж (визуелну репрезентацију) да преведе текстуални проблем у алгебарску репрезентацију, користи модел ваге и њене особине, при визуелизацији користи геометријске облике (идеограме) и модел правоугаоника за приказ односа величина

1. Две јабуке, две крушке и бресква укупно коштају 174 динара. Две крушке, јабука и бресква укупно коштају 126 динара. Две јабуке, крушка и бресква укупно коштају 146 динара. Колико кошта јабука, колико крушка, а колико бресква?

Решење:



Јабука: $174 - 126 = 48$

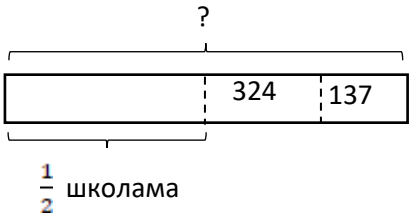
Крушка: $174 - 146 = 28$

Бресква: $126 - 48 - 2 \cdot 28 = 22$

Одговор: Јабука кошта 48 динара, крушка 28 динара, а бресква 22 динара.

2. Колекционар Миле је одлучио да поклони сакупљене књиге. Половину књига је дао школама, а 324 књиге поклонио је свом факултету. Остало му је 137 књига. Колико је књига имао Миле за поклањање?

Решење:



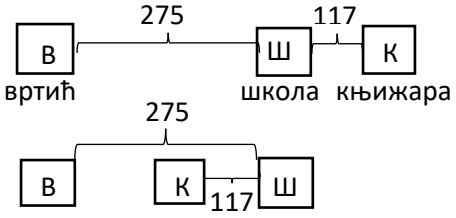
$\frac{1}{2}$ књига: $324 + 137 = 461$

Укупно књига: $461 + 461 = 922$

Одговор: Миле је имао 922 књиге за поклањање.

3. Вртић, књижара и школа су у истој улици. Вртић је удаљен од школе 275 m, а књижара је удаљена од школе 117 m. Колико највише, а колико најмање може бити удаљена књижара од вртића?

Решење:



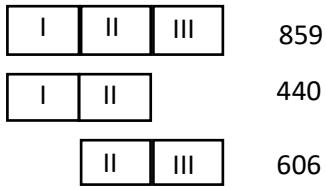
Најдуже: 275m + 117m = 392m

Најкраће: 275m – 117m = 158m

Одговор: Књижара од вртића може бити највише 392 m удаљена, а најмање 158 m.

4. У току данашњег дана на три бензинске пумпе гориво је точило 859 аутомобила. На првој и другој пумпи гориво је точило 440 аутомобила, а на другој и трећој 606. Колико аутомобила је точило гориво на свакој пумпи?

Решење:



III : 859 – 440 = 419

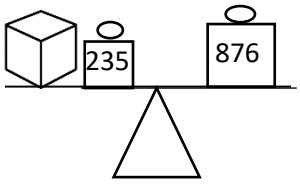
I : 859 – 606 = 253

II : 440 – 253 = 187

Одговор: На првој пумпи гориво је наточило 253 аутомобила, на другој 187, а на трећој 419.

5. Ако су коцка и тег од 235 g исте масе као тег од 876 g. Колика је маса коцке?

Решење:



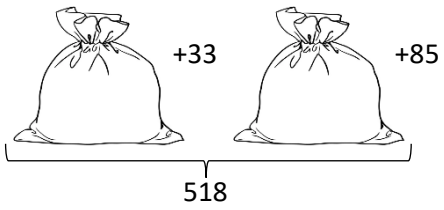
Коцка: 876g – 235g = 641g

Одговор: Коцка има масу 641 g.

ВЕЖБА 8	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: Зависност збира од промене сабирака. Сталност збира**
Циљ вежбе:	Развијање способности ученика да израђује и користи цртеж и модел ваге као помоћну репрезентацију при решавању текстуалних задатака
Исходи:	Ученик илуструје шематским цртежом елементе задатка, користи цртеж (визуелну репрезентацију) да преведе текстуални проблем у алгебарску репрезентацију, користи модел ваге и њене особине и уочава промене као и сталност збира користећи цртеж

1. У два џака био је исти број кестенова. Када је у први џак додато још 33, а у други још 85, тада је у оба џака било укупно 518 кестенова. По колико је кестенова било у сваком џаку пре додавања?

Решење:



Број кестенова у оба џака се додавањем увећао за 33 + 85 = 118

Пре додавања било је 518 – 118 = 400

Значи у сваком по 200 кестенова

Одговор: Пре додавања у сваком џаку је било по 200 кестенова.

2. Коле и Мићко имају заједно 432 сличице фудбалера. Ако би Коле добио још 112, а Мићко поклонио 104 сличице онда би имали једнак број сличица. Колико сличица има сваки од њих двојице?

Решење:



Укупан број сличица се повећао за 112 – 104 = 8 432 + 8 = 440 , имали би по 220

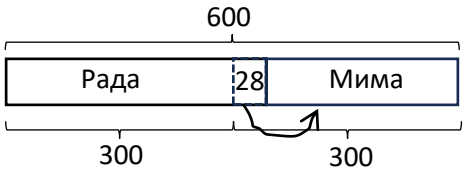
Коле: 220 – 112 = 108

Мићко: 220 +104 = 324

Одговор: Коле има 108, а Мићко 324 сличице фудбалера.

3. Рада и Мима скупљају стикере. Заједно имају 600 стикера. Ако би Рада Мими поклонила својих 28 имале би обе исти број стикера. Колико је скупила свака од њих?

Решење:



Ако Рада да Мими 28 стикера укупан збир се не мења, али би обе имале по 300 стикера.

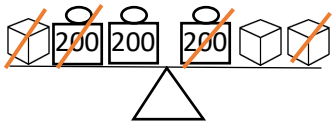
Значи Рада има 28 више од Миме.

Рада: 300 + 28 = 328 Мима: 300 – 28 = 272

Одговор: Рада има 328 стикера, а Мима 272.

4. Маша је на леви тас ваге ставила коцку и два тега од по 200 g, а на десни две коцке и један тег од 200 g. Вага је тада у равнотежи. Ако Маша на леви тас дода још један тег од 200 g, а на десни још једну коцку која страна ће бити тежа? Објасни.

Решење:



Ако склонимо по једну коцку и по један тег са оба таса вага ће и даље бити у равнотежи, значи да је коцка тешка 200 g као и тег.

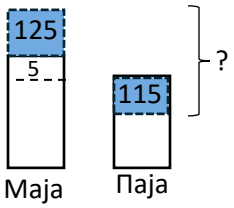
Закључак: Вага ће и после додавања бити у равнотежи јер су коцка и тег исте масе (са обе стране ће бити по 800 g)

Одговор: Вага ће остати у равнотежи јер смо додали једнако и лево и десно, по 200 g.

ВЕЖБА 9	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: Зависност разлике од промене умањеника и умањиоца. Сталност разлике**
Циљ вежбе:	Развијање способности ученика да израђује и користи цртеж, модел ваге и модел правоугаоника као помоћну репрезентацију при решавању текстуалних задатака
Исход:	Ученик илуструје шематским цртежом елементе задатка, користи цртеж (визуелну репрезентацију) да преведе текстуални проблем у алгебарску репрезентацију, користи модел ваге и њене особине, модел правоугаоника и уочава промене као и сталност разлике користећи цртеж

1. Маја је имала 5 динара више од Паје. Мама јој је дала још 125 динара, а Паја је потрошио на сендвич 115 динара. Колико сада динара више има Маја од Паје?

Решење:



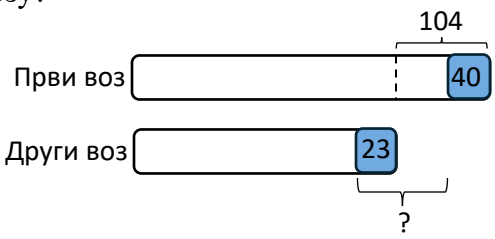
Разлика се повећала за 125 па за још 115

(5 + 125) + 115 = 130 + 115 = 245

Одговор: Маја сада има 245 динара више од Паје.

2. У првом возу је 104 путника више него у другом. Оба воза стају на станицу. Ако из првог воза изађе 40 путника, а из другог 23 путника колико је путника више у првом возу?

Решење:



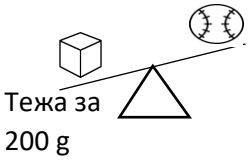
Разлика се прво смањила за 40, а затим повећала за 23

(104 – 40) + 23 = 64 + 23 = 87

Одговор: У првом возу је 87 путника више него у другом.

3. Коцка на левом тасу ваге тежа је од лопте на десном тасу ваге за 200 g. Ако на леви тас додамо тег од 50 g, а на десни тег од 250 g која страна ваге ће бити тежа? Објасни.

Решење:

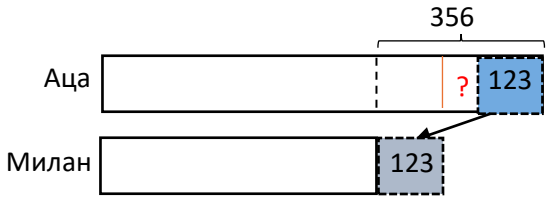


Коцка је тежа за 200 g, ако јој додамо још 50 g биће тежа за 250 g. Додавањем 250 g на десну страну ваге постиже се равнотежа.

Одговор: Вага је у равнотежи. Додавањем тега од 50 g тежој страни разлика се повећала на 250 g. Зато је додавањем 250 g на лакшу страну вага постављена у равнотежни положај.

4. Милан има џепарац за 356 динара мањи од Ациног. Ако Аца Милану да 123 динара колика ће бити разлика у износу џепарца?

Решење:



(356 – 123) – 123 = 233 – 123 = 110

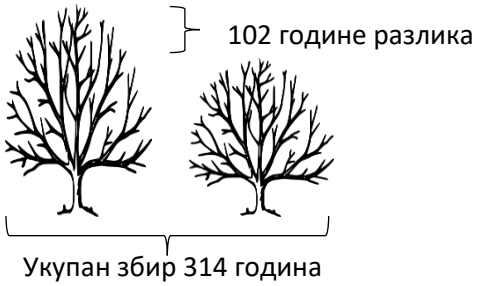
(Умањеник је смањен за 123, па се разлика смањи за 123. Такође је умањилац повећан за 123, па се разлика опет смањи за 123.)

Одговор: Аца ће имати 110 динара више од Милана.

ВЕЖБА 10	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: Зависност збира и разлике од чланова. Сталност збира и разлике**
Циљ вежбе:	Развијање способности ученика да израђује и користи цртеж, модел ваге и модел правоугаоника као помоћну репрезентацију при решавању текстуалних задатака
Исход:	Ученик илуструје шематским цртежом елементе задатка, користи цртеж (визуелну репрезентацију) да преведе текстуални проблем у алгебарску репрезентацију, користи модел ваге и њене особине, модел правоугаоника и уочава промене као и сталност збира и разлике користећи цртеж

1. Једно стабло маслине је 102 године старије од другог, а заједно имају 314 година. Колика ће бити разлика у годинама, а колики збир година та два стабла кад прође још 12 година?

Решење:



Кад прође 12 година и једном и другом стабло број година расте за по 12.

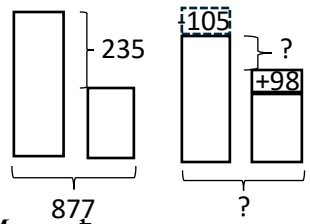
Збир се повећава јер се оба сабирка повећавају: 314 + 12 + 12 = 326 + 12 = 338

Разлика се не мења јер се и умањеник и умањилац повећавају за истих 12 година.

Одговор: Разлика у годинама ће остати иста 102 године, а збир година ће се повећати на 338 година.

2. Марко има више новца од Јанка за 235 динара, а заједно имају 877 динара. Ако Марко потроши 105 динара, а Јанко добије још 98 динара, ко ће имати и колико више динара и колико ће имати заједно новца?

Решење:



Разлика у новцу се смањила за 105 и смањила за 98:
235 – 105 – 98 = 130 – 98 = 32

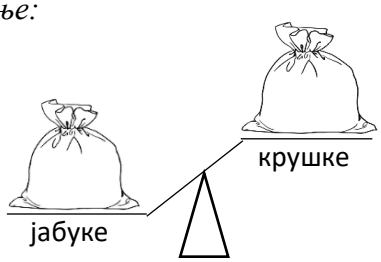
Збир се смањио за 105 и повећао за 98:

877 – 105 + 98 = 772 + 98 = 870

Одговор: Марко ће имати више новца од Јанка за 32 динара, а заједно ће имати 870 динара.

3. На једном тасу ваге је џак јабука, а на другом џак крушака. Џак јабука је за 500 g тежи од џака крушака. Ако из џака јабука одвадимо 250 g јабука, а у џак крушака додамо 250 g крушака да ли ће онда вага бити равнотежи? Објасни.

Решење:



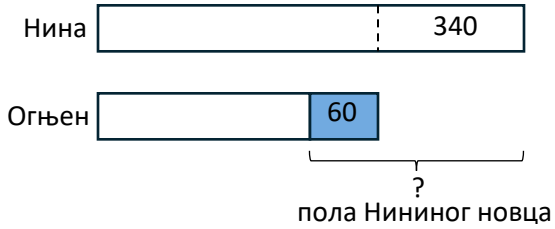
Ако умањеник (јабуке) смањимо за 250g и умањилац (крушке) повећамо за 250g разлика се смањи за 250g + 250g = 500g. Тако да после промене разлика постаје:

500g – 500g = 0g и вага је у равнотежи.

Одговор: Биће у равнотежи јер се разлика смањи за 250 g због јабука и за још 250 g због додавања крушака.

4. Нина има 340 динара више него Огњен. Огњен је потрошио 60 динара и сада Нина има двапута више новца него од Огњена. Колико новца има Нина?

Решење:



Пола Нининог новца = 340 + 60 = 400 (разлика се повећа за 60 јер се умањилац смањио)

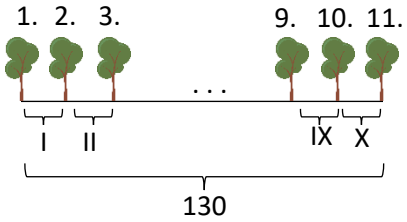
Нина има 400 + 400 = 800 динара

Одговор: Нина има 800 динара.

ВЕЖБА 11	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: Множење и дељење бројевима 10 и 100**
Циљ вежбе:	Развијање способности ученика да израђује и користи цртеж, модел ваге и модел правоугаоника као помоћну репрезентацију при решавању текстуалних задатака
Исход:	Ученик илуструје шематским цртежом елементе задатка, користи цртеж (визуелну репрезентацију) да преведе текстуални проблем у алгебарску репрезентацију, користи модел ваге и њене особине и модел правоугаоника

1. Крај пута у дужини од 130 m, на једнаком растојању, засађено је 11 стабала ораха. Колико је растојање између свака два узастопна стабла?

Решење:

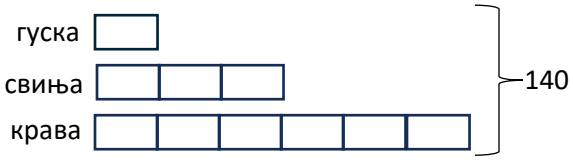


Растојање: 130m : 10 = 13m

Одговор: Растојање између свака два узастопна стабла је 13 m.

2. Свиња, гуска и крава заједно имају 140 kg. Колико је тешка гуска ако је крава два пута тежа од свиње, а свиња три пута тежа од гуске?

Решење:

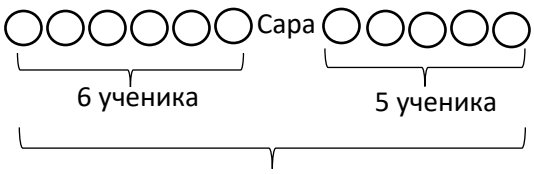


Гуска: 140kg : 10 = 14 kg

Одговор: Гуска је тешка 14 kg.

3. Ученици трећег разреда гледали су представу у позоришту. У Сарином реду са њене леве стране било је 5 ученика, а са десне 6. У сваком реду је исти број седишта. Колико је трећака било у позоришту ако су заузели 10 редова?

Решење:



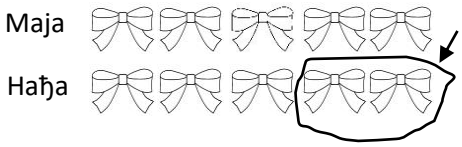
Укупно у целом реду 6 + 1 + 5 = 12

Трећака је било 10 · 12 = 120

Одговор: У позоришту је било 120 ученика трећег разреда.

4. Маја и Нађа су правиле машнице за косу. Када би Маја Нађи дала две своје машнице имале би обе по 5 машница. Ако је за једну машницу потребно 100 центиметара траке колико је траке искористила Маја, а колико Нађа?

Решење:



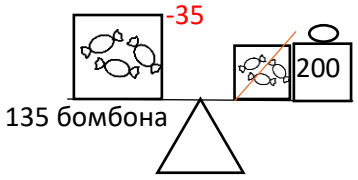
Маја има 5 + 2 = 7 машница и искористила је 7 · 100 = 700 cm траке.

Нађа има 5 – 2 = 3 машнице и искористила је 3 · 100 = 300 cm траке.

Одговор: Маја је искористила 700, а Нађа 300 центиметара траке.

5. На једном тасу ваге је кеса са 135 бомбона, а на другом кеса са 35 истих бомбона и тег од 200 g. Ако је вага у равнотежи колико грама има једна бомбона?

Решење:



Ако и са једног и са другог таса склонимо по 35 бомбона онда 100 бомбона има 200 g.

Једна бомбона је 200g : 100 = 2g

Одговор: Једна бомбона има 2 g.

ВЕЖБА 12	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: Множење двоцифреног броја једноцифреним**
Циљ вежбе:	Развијање способности ученика да израђује и користи цртеж, модел ваге и модел правоугаоника као помоћну репрезентацију при решавању текстуалних задатака
Исход:	Ученик илуструје шематским цртежом елементе задатка, користи цртеж (визуелну репрезентацију) да преведе текстуални проблем у алгебарску репрезентацију, користи модел ваге и њене особине, модел правоугаоника и користећи цртеж уочава односе међу величинама

1. Размак између свака два узастопна од 10 електричних стубова је 52 m. Колико је растојање између првог и последњег стуба?

Решење:

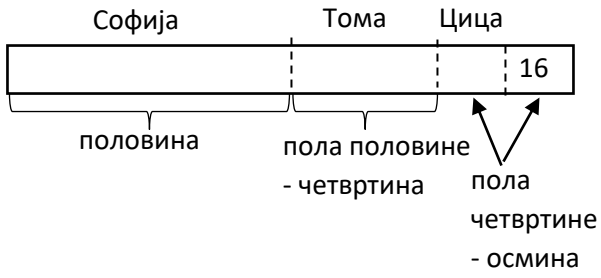


$9 \cdot 52\text{m} = 468\text{m}$

Одговор: Растојање између првог и последњег стуба је 468 m.

2. У чинији су бомбоне. Софија је узела половину бомбона из чиније. Онда је Тома узео половину од преосталих бомбона. Након тога је Цица узела половину преосталих бомбона. На крају је у чинији остало 16 бомбона. Колико је бомбона било у чинији на почетку?

Решење:

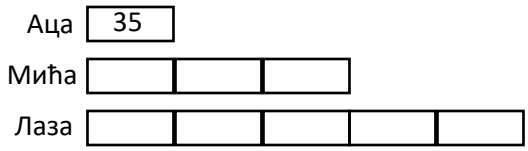


Укупно: $16 \cdot 8 = 128$ бомбона

Одговор: У чинији је било 128 бомбона.

3. Аца има 35 кликера, што је три пута мање него Мића, а пет пута мање него Лаза. Колико кликера имају заједно?

Решење:



Мића: $35 \cdot 3 = 105$

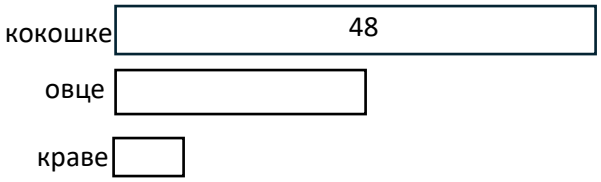
Лаза: $35 \cdot 5 = 175$

Укупно: $35 + 105 + 175 = 315$

Одговор: Заједно имају 315 кликера.

4. На фарми има 48 кокошки, два пута мање оваца и крава четири пута мање него оваца. Колико укупно ногу имају све животиње на тој фарми?

Решење:



Овце: $48 : 2 = 24$ Краве: $24 : 4 = 6$

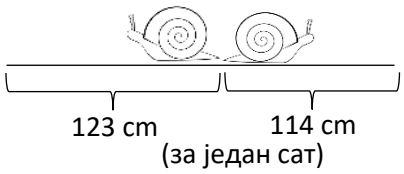
Број ногу: $48 \cdot 2 + (24 + 6) \cdot 4 = 96 + 120 = 216$

Одговор: Животиње на тој фарми имају укупно 216 ногу.

ВЕЖБА 13	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: Множење троцифреног броја једноцифреним**
Циљ вежбе:	Развијање способности ученика да израђује и користи цртеж, модел ваге и модел правоугаоника као помоћну репрезентацију при решавању текстуалних задатака
Исход:	Ученик илуструје шематским цртежом елементе задатка, користи цртеж (визуелну репрезентацију) да преведе текстуални проблем у алгебарску репрезентацију, користи модел ваге и њене особине, модел правоугаоника и користећи цртеж уочава односе међу величинама

1. Два пужа крећу из исте тачке, један на леву, а други на десну страну. Ако први пуж прелази 123 cm за сат времена, а други 114 cm за сат времена колико ће бити удаљени један од другог после 3 сата?

Решење:



За три сата:

Први ће се удаљити $3 \cdot 123\text{cm} = 369\text{cm}$

Други ће се удаљити $3 \cdot 114\text{cm} = 342\text{cm}$

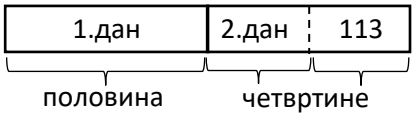
Значи укупно $369\text{cm} + 342\text{cm} = 711\text{cm}$

(може и $3 \cdot (123\text{cm} + 114\text{cm}) = 3 \cdot 237\text{cm} = 711\text{cm}$)

Одговор: Пужеви ће после три сата бити удаљени 711 cm један од другог.

2. Маја је првог дана прочитала пола књиге, другог дана половину преосталог дела, а трећег дана последњих 113 страница. Колико страница је имала књига?

Решење:

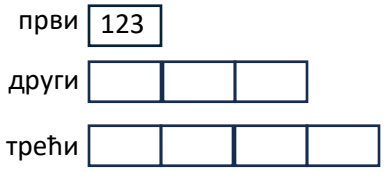


Пошто је 113 једна четвртина књиге онда
цела књига има $4 \cdot 113 = 452$ стране

Одговор: Књига је имала 452 стране.

3. Туристи су смештени у три хотела. У првом хотелу је смештено 231 туриста што је три пута мање него у другом хотелу, а у трећем их је колико у првом и другом заједно. Колико је туриста у трећем хотелу?

Решење:

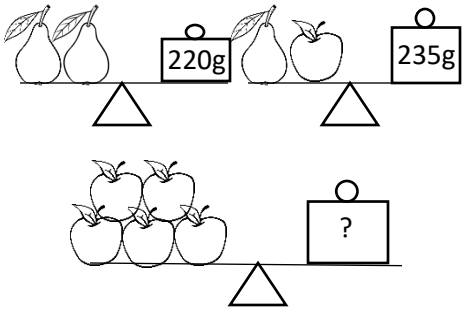


У трећем хотелу је $4 \cdot 231 = 924$

Одговор: У трећем хотелу је 924 туриста.

4. Ако две крушке имају масу 220 g, јабука и крушка 235 g, колико ће грама имати пет јабука?

Решење:



Крушка: $220g : 2 = 110g$

Јабука: $235g - 110g = 125g$

Пет јабука: $5 \cdot 125g = 625g$

Одговор: Пет јабука има 625 g.

ВЕЖБА 14	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: Множење и дељење троцифреног броја једноцифреним**
Циљ вежбе:	Развијање способности ученика да израђује и користи цртеж, модел ваге и модел правоугаоника као помоћну репрезентацију при решавању текстуалних задатака
Исход:	Ученик илуструје шематским цртежом елементе задатка, користи цртеж (визуелну репрезентацију) да преведе текстуални проблем у алгебарску репрезентацију, користи модел ваге и њене особине, модел правоугаоника и користећи цртеж уочава односе међу величинама

1. Да би прочитала књигу од 847 страна Маји треба 7 дана. Ако сваки дан чита једнак број страна, колико јој је страна остало после 5 дана читања?

Решење:



За један дан прочита 847 : 7 = 121

Остаје јој 2 · 121 = 242

Одговор: Маји је остало да прочита још 242 стране књиге.

2. Ана и Марко укупно имају 914 динара. Ако Ана има 36 динара више од Марка, колико динара има Ана, а колико Марко?

Решење:



A + M = 914

2 · M = 914 – 36

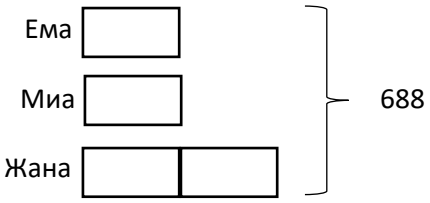
2 · M = 878 M = 878 : 2 = 439

A = 439 + 36 = 475

Одговор: Ана има 475 динара, а Марко 439 динара.

3. Ема и Миа имају исти број перлица. Жана има перлица колико Ема и Миа заједно. Колико перлица има свака од њих ако све укупно имају 688 перлица?

Решење:



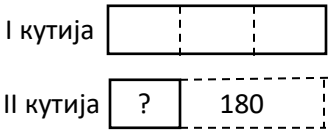
Е = М = 688 : 4 = 172

Ж = 172 · 2 = 344

Одговор: Ема и Миа имају по 172 перлице, а Жана има 344 перлице.

4. У две кутије спаковане су књиге. У другој кутији има 180 књига мање него у првој, а у првој три пута више него у другој. Колико књига има у првој, а колико у другој кутији?

Решење:



180 : 2 = 90

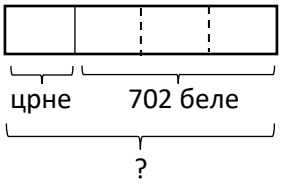
I кутија: 3 · 90 = 270 књига

II кутија: 90 књига

Одговор: У првој кутији има 270 књига, а у другој 90 књига.

5. Од укупног броја оваца четвртина су црне овце, а 702 овце су беле боје. Колико је укупно оваца у стаду?

Решење:



Црне: 702 : 3 = 234

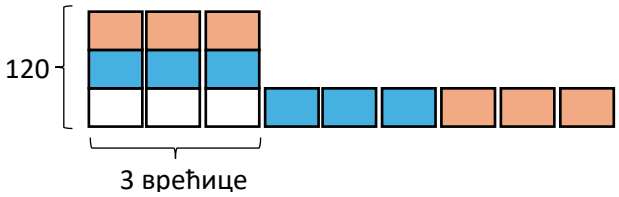
Укупно: 234 + 702 = 936

Одговор: У стаду је укупно 936 оваца.

ВЕЖБА 15	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: Зависност производа од промене чинилаца. Сталност производа**
Циљ вежбе:	Развијање способности ученика да израђује и користи цртеж, модел ваге и модел правоугаоника као помоћну репрезентацију при решавању текстуалних задатака
Исход:	Ученик илуструје шематским цртежом елементе задатка, користи цртеж (визуелну репрезентацију) да преведе текстуални проблем у алгебарску репрезентацију, користи модел ваге и њене особине, модел правоугаоника и уочава промене као и сталност производа користећи цртеж

1. Лазар је распоредио своје кликера у три врећице. У сваку је ставио по 102 кликера. Ако их распореди у три пута више врећица по колико кликера ће бити у свакој врећици?

Решење:



Ако се број врећица увећа 3 пута, број кликера у врећици мора се смањити 3 пута.
120 : 3 = 40

Одговор: У свакој врећици биће по 40 кликера.

2. У Деда Мразовој фабрици поклони се пакују у једнаке џакове и у сваки џак стаје исти број поклона. Свакога дана патуљци упакују 332 поклона. Да ли ће се дневна производња увећати ако набаве веће вреће па у четири пута мање вреће пакују пет пута више поклона него до сада?

Решење:



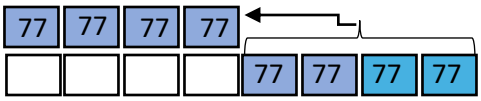
Број врећа се смањио 4 пута па се и број упакованих поклона смањио 4 пута тј. 332 : 4 = 83 , али се број поклона у врећи повећао 5 пута па се укупан број поклона повећао 5 пута тј.
83 · 5 = 415

Упаковаће 415 – 332 = 83 поклона више

Одговор: Дневна производња би се увећала, паковали би 83 поклона више.

3. Сања чита књигу. Прочитаће је за 8 дана ако сваки дан чита по 77 страница књиге. Ако жели да је прочита за два пута мање дана (за 4 дана) колико страница дневно треба да чита?

Решење:



Број дана за читање

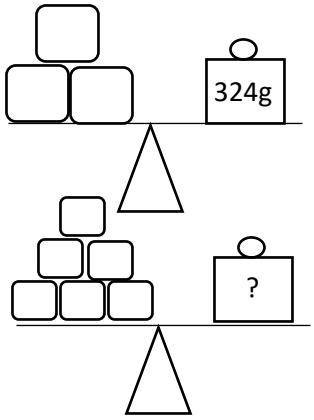
Ако жели да број дана за читање смањи два пута мора два пута повећати број прочитаних страница дневно, значи

$77 \cdot 2 = 154$

Одговор: Требала би дневно читати 154 странице.

4. Три исте кесице са истим бројем бомбона имају укупно 324 g. Ако број кесица повећамо два пута, а број бомбона у кесици смањимо 4 пута колико ће имати грама?

Решење:



Број кесица увећан 2 пута

$324g \cdot 2 = 648g$

Број бомбона се смањио 4 пута

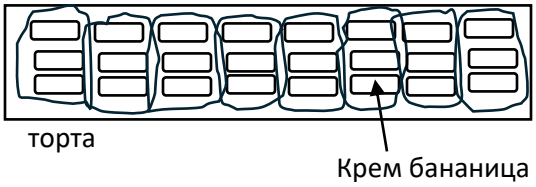
$648g : 4 = 162g$

Одговор: Шест кесица са 4 пута мање бомбона имаће 162 g.

ВЕЖБА 16	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: Зависност количника од промене дељеника и делиоца. Сталност количника**
Циљ вежбе:	Развијање способности ученика да израђује и користи цртеж, модел ваге и модел правоугаоника као помоћну репрезентацију при решавању текстуалних задатака
Исход:	Ученик илуструје шематским цртежом елементе задатка, користи цртеж (визуелну репрезентацију) да преведе текстуални проблем у алгебарску репрезентацију, користи модел ваге и њене особине, модел правоугаоника и уочава промене као и сталност количника користећи цртеж

1. Торта је 24 пута скупља од крем бананице. Колико пута су две такве торте скупље од три крем бананице?

Решење:



Једна торта је 8 пута скупља од три крем бананице (24 : 3 = 8), а две торте ће бити 16 пута скупље (8 · 2 = 16) од три крем бананице

Одговор: Две такве торте су 16 пута скупље од три крем бананице.

2. Путници су распоређени у возове тако да је у сваком возу по 56 путника. Ако се укупан број путника повећа три пута, а број возова смањи два пута колико ће путника бити у сваком возу?

Решење:



Ако се укупан број путника повећа три пута у сваком возу биће три пута више путника $56 \cdot 3 = 168$

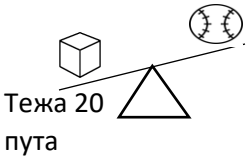


Ако се број возова смањи два пута у сваком возу биће два пута више путника, што значи $168 \cdot 2 = 336$

Одговор: У сваком возу ће бити 336 путника.

3. Коцка на левом тасу ваге има већу масу од лопте на десном тасу ваге 20 пута. Колико лопти треба додати на десни тас да би вага била у равнотежи? Објасни.

Решење:

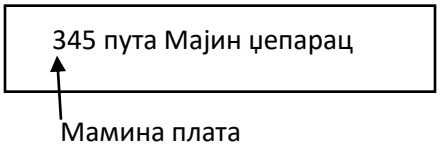


Да би вага била у равнотежи на десној страни треба да буде 20 лопти, то је 20 пута више од једне лопте. Значи треба додати још 19 лопти.

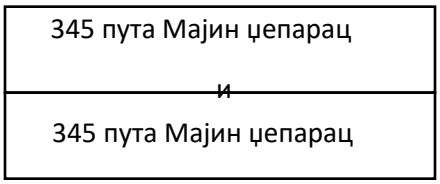
Одговор: Треба додати 19 лопти јер се тако маса лопте увећа 20 пута па се количник смањи на 1, што значи да је маса на оба таса иста (вага је у равнотежи).

4. Мама има 345 пута већу плату него Мајин џепарац. Пошто ће од јануара мамина плата бити два пута већа одлучила је да два пута повећа и Мајин џепарац. Колико пута ће мамина плата бити већа од Мајиног џепарца после тог увећања?

Решење:



Од јануара:



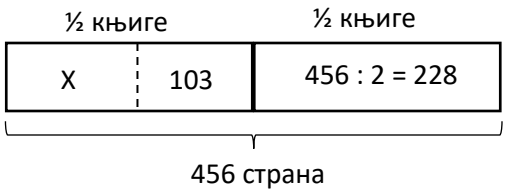
Пошто се и Мајин џепарац увећава два пута две мамине плате биће 345 пута веће од два Мајина џепарца.

Одговор: Исто, 345 пута већа.

ВЕЖБА 17	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: Једначине са сабирањем и одузимањем**
Циљ вежбе:	Развијање способности ученика да израђује и користи цртеж, модел ваге и модел правоугаоника као помоћну репрезентацију при решавању текстуалних задатака
Исход:	Ученик илуструје шематским цртежом елементе задатка, користи цртеж (визуелну репрезентацију) да преведе текстуални проблем у алгебарску репрезентацију, користи модел ваге и њене особине, модел правоугаоника и уочава непознату величину на цртежу

1. Маја чита књигу која има 456 страна. Када прочита још 103 стране прочитаће половину књиге. Колико страна је до сада прочитала? (задатак реши постављањем једначине)

Решење:



X + 103 = 228

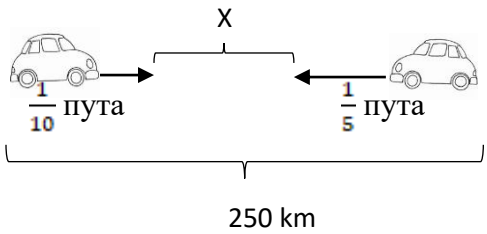
X = 228 – 103

X = 125

Одговор: Маја је до сада прочитала 125 страна књиге.

2. Два возила су се налазила на растојању 250 km. Кренули су један другом у сусрет и након пола сата вожње први је прешао $\frac{1}{10}$ пута, а други $\frac{1}{5}$ пута. Колико километара је тада било растојање између њих? (задатак реши постављањем једначине)

Решење:



250km : 10 + X + 250km : 5 = 250km

25km + X + 50km = 250km

75km + X = 250km

X = 250km – 75km X = 175km

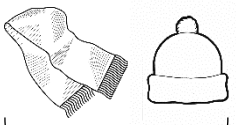
Одговор: Након пола сата растојање између њих било је 175 km.

3. Шал, капа и рукавице заједно коштају 999 динара. Ако је разлика у цени капе и рукавица 125 динара, а шал и капа заједно коштају 780 динара, колико кошта капа? (задатак реши користећи једначине)

Решење:



999 динара



X

780 динара

X – цена рукавица

780 + X = 999 X = 999 – 780 X = 219

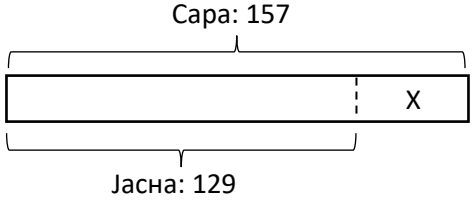
У – цена капе

У – 219 = 125 У = 125 + 219 У = 344

Одговор: Капа кошта 344 динара

4. Сара и Јасна су низале перлице. Сара је нанизала 157, а Јасна 129 перлица. За колико више је перлица нанизали Сара? (задатака реши користећи једначину са одузимањем)

Решење:



175 – X = 129

X = 175 – 129

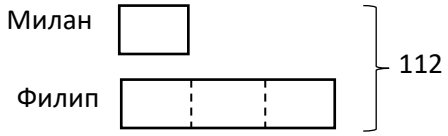
X = 46

Одговор: Сара је нанизала 46 перлица више од Јасне.

ВЕЖБА 18	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: Једначине са множењем**
Циљ вежбе:	Развијање способности ученика да израђује и користи цртеж, модел ваге и модел правоугаоника као помоћну репрезентацију при решавању текстуалних задатака
Исход:	Ученик илуструје шематским цртежом елементе задатка, користи цртеж (визуелну репрезентацију) да преведе текстуални проблем у алгебарску репрезентацију, користи модел ваге и њене особине, модел правоугаоника и уочава непознату величину на цртежу

1. Милан има три пута мање кликера од Филипа, а заједно имају 112 кликера. Колико кликера има Филип? (користи једначину)

Решење:



Милан: x ($4 \cdot x = 112$)

Милан: $112 : 4 = 28$

Филип: $3 \cdot 28 = 84$

Одговор: Филип има 84 кликера.

2. Свиња, гуска и крава заједно имају 117 kg. Колико је тешка гуска ако је крава два пута тежа од гуске и свиње заједно, а свиња два пута тежа од гуске? (користи једначину)

Решење:



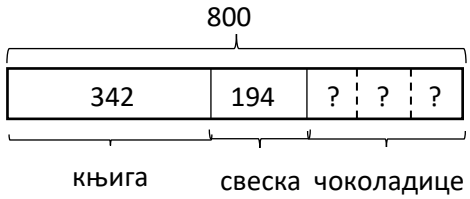
Гуска = x ($9 \cdot x = 117\text{kg}$)

$x = 117\text{kg} : 9 = 13\text{kg}$

Одговор: Гуска је тешка 13 kg.

3. Раде је имао 800 динара. Купио је књигу за 342 динара и свеску за 194 динара. Остатак новца потрошио је на три чоколадице. Колико кошта једна чоколадица? (користи једначину)

Решење:



Чоколадица = x (3 · x + 342 + 194 = 800)

Цена 3 чоколадице = 800 – 342 – 194

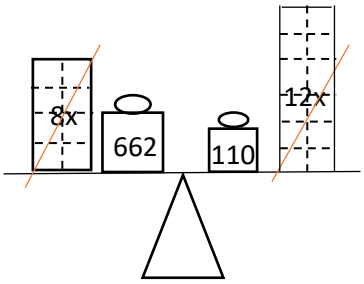
Цена 3 чоколадице = 264

Чоколадица: x = 264 : 3 = 88

Одговор: Једна чоколадица кошта 88 динара.

4. Тања је замислила један број. Ако тај број помножимо бројем 8 и додамо му број 662 добићемо исту вредност као и кад би га помножили бројем 12 и додали број 110. Који број је Тања замислила? (користи модел ваге и једначину)

Решење:



4 · x + 110 = 662

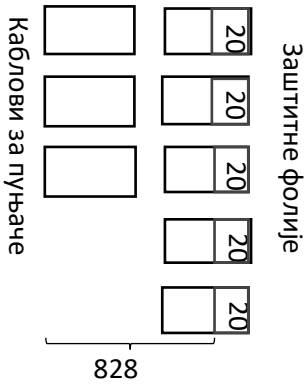
4 · x = 662 – 110 = 552

x = 552 : 4 = 138

Одговор: Тања је замислила број 138.

5. Продавац је продао 5 заштитних фолија за телефон и 3 кабла за пуњач за 828 динара. Ако је заштитна фолија за телефон 20 динара јефтинија од кабла за пуњач колико кошта заштитна фолија? (користи једначину)

Решење:



828 + 100 = 8 · x (цена кабла је x)

Цена кабла = 928 : 8

Цена кабла = 116

Цена фолије = 116 – 20

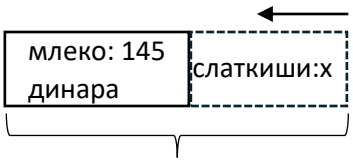
Цена фолије = 96

Одговор: Заштитна фолија за телефон кошта 96 динара.

ВЕЖБА 19.	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: Неједначине са непознатим сабирком**
Циљ вежбе:	Развијање способности ученика да израђује и користи цртеж, модел ваге и модел правоугаоника као помоћну репрезентацију при решавању текстуалних задатака
Исходи:	Ученик илуструје шематским цртежом елементе задатка, користи цртеж (визуелну репрезентацију) да преведе текстуални проблем у алгебарску репрезентацију, користи модел ваге и њене особине, модел правоугаоника, уочава непознату величину на цртежу и примењује знање о зависности збира од промене сабирака

1. Мама је Сању замолила да оде у продавницу и купи јој литар млека који кошта 145 динара, а себи да купи слаткише. Рекла јој је да не сме потрошити више од 500 динара. Колико новца Сања може дати за слаткише?

Решење:

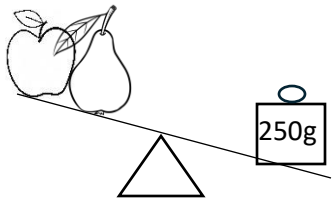


$145 + x < 500$

(користимо једначину и зависност збира од промене сабирака) ако би x било 500 – 145 = 355 тј. ако би Сања на слаткише дала 355 динара потрошила би тачно 500 динара. Пошто укупан збир цена млека и слаткиша треба да буде мањи од 500 цена слаткиша мора да се смањи, тако да x мора бити мање од 355

Одговор: Сања може платити слаткише 354, 353, 352, ...

2. Трговац је мерио масу једне јабуке и једне крушке и приказао то на слици. Ако јабука има масу 125g, колика може бити маса крушке?



Решење: Неједначина 125g + x < 250g

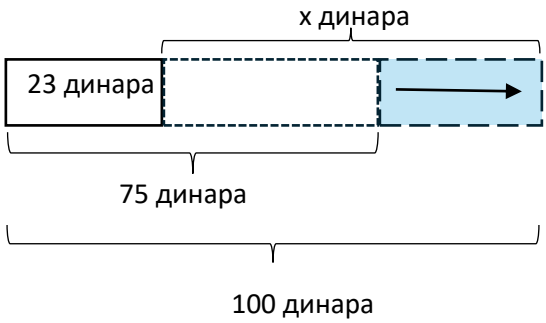
Када би вага била у равнотежи (125g + x = 250g) крушка би имала масу:

x = 250g – 125g = 125g. Како вага ипак није у равнотежи и како је збир маса јабуке и крушке мањи од 250g онда и маса крушке мора бити мања од 125g (јер да би се збир смањио мора се смањити и сабирак)

Одговор: Крушка мора бити тешка мање од 125g, значи може 124g, 123g, 122g, ...

3. Аца штеди ситан новац у "касици прасици". Ако је на почетку месеца у касици имао 23 динара, а на крају месеца зна да укупно има више од 75 али мање од 100 динара. Колико је ситног новца Аца могао уштедети за месец дана?

Решење:



Неједначина:

23 + x > 75 и 23 + x < 100

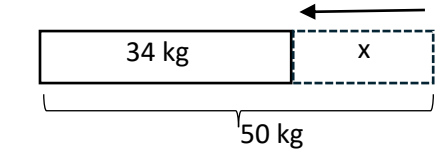
Да би у касици имао тачно 75 динара требао је додати 75 – 23 = 52 динара, а како има више од 75 динара додао је више од 52.

Да би у касици било 100 динара требао је додати 100 – 23 = 77 динара, а како има мање од 100 динара значи да је додао мање од 77.

Одговор: Аца је могао уштедети 53, 54, 55, 56, ... , 75, 76 динара.

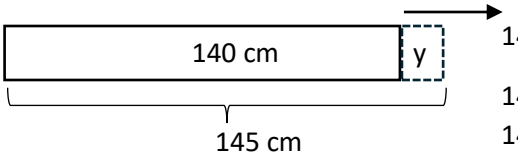
4. Дарко је прошле године на систематском прегледу имао 34 kg и био висок 140 cm. Сада зна да није тежи од 50 kg и да је сигурно виши од 145 cm. Колико килограма је могао добити и колико центиметра порасти?

Решење:



34kg + x < 50kg да је добио

50kg – 34kg= 16 kg имао би тачно 50kg, али пошто он има мање од 50 kg могао је добити мање од 16 kg. Значи x < 16kg



140cm + y > 145cm да је порастао

145cm – 140cm = 5cm био би висок тачно 145cm, али пошто је сигурно виши од 145cm могао је порасти више од 5cm.

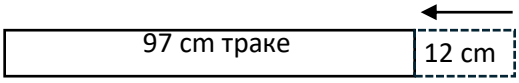
Значи y > 5cm

Одговор: Дарко је могао добити 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ..., 13, 14 или 15 килограма, а порасти 6, 7, ... центиметара.

ВЕЖБА 20	**НАСТАВНА ЈЕДИНИЦА: Неједначине са непознатим умањеником и умањиоцем**
Циљ вежбе:	Развијање способности ученика да израђује и користи цртеж, модел ваге и модел правоугаоника као помоћну репрезентацију при решавању текстуалних задатака
Исход:	Ученик илуструје шематским цртежом елементе задатка, користи цртеж (визуелну репрезентацију) да преведе текстуални проблем у алгебарску репрезентацију, користи модел ваге и њене особине, модел правоугаоника, уочава непознату величину на цртежу и користи једначину и зависност разлике од промене умањеника и умањиоца при одређивању скупа решења неједначине

1. Мина је паковала рођендански поклон. За украсну машну потрошила је 97 cm траке. Ако јој је остало мање од 12 cm украсне траке колико је траке имала пре паковања поклона? (постави неједначину)

Решење:



Неједначина $x - 97\text{cm} < 12\text{cm}$

Траке је било мање од 97cm + 12cm = 109 cm, а више од 97cm јер је Мина толико потрошила.

Одговор: Имала је 98cm, 99cm, 100cm, 101cm, 102cm, 103cm, 104cm, 105cm, 106cm, 107cm или 108cm траке.

2. Раша има 211 сличица фудбалера. Купио је албум и један део сличица залепио тако да му је остало мање од 54 сличице. Колико сличица је залепио у албум?

Решење:



Неједначина $211 - x < 54$

Остале би му 54 сличице да је залепио $211 - 54 = 157$ тако да је морао залепити више од 157 сличица (разлика се смањује када се умањилац повећава)

Одговор: Раша је залепио у албум 158, 159, 160, 161, ... , 209, 210 или свих 211 сличица.

3. Мама је Сандри дала новац за ужину. Сандра је купила кроасан који кошта 50 динара и сок од 35 динара тако да јој је остало више од 100 динара кусура. Колико новца је мама могла дати Сандри ако знамо да јој није дала више од 200 динара?

Решење:



Неједначина $x - (50 + 35) > 100$

Мама је Сандри дала више од

$85 + 100 = 185$ динара, а мање од 200 динара.

Одговор: Мама је Сандри могла дати 186, 187, 188, ... , 198, 199

4. На школској изложби за Савиндан било је представљено 56 ликовних радова ученика. Бранка је веома талентована па је изложено више од 6 њених радова, али не и свих 12 колико их је насликала ове школске године. Колико је на изложби могло бити радова који нису Бранкини?

Решење:



Неједначина $56 - x > 6$ (x је број радова који нису Бранкини)

Када би било тачно 6 Бранкиних радова x би било $56 - 6 = 50$, а да би разлика била већа од 6 умањилац мора да се смањује али до $56 - 11 = 45$ јер није могла изложити свих 12 радова већ највише 11

Одговор: Радова који нису Бранкини могло је бити 49, 48, 47, 46 или 45.

Биографија аутора

Јелена Стојкановић је рођена 02. 08. 1979. год. у Ужицу. У Бајиној Башти завршила је основну школу и гимназију. Основне студије завршила је на Математичком факултету Универзитета у Београду 2002. год. (смер професор математике и рачунарства) и стекла звање дипломирани математичар. Мастер академске студије завршила је на истом факултету 2011. год. одбранивши мастер рад на тему "Анализа резултата PISA тестирања за област математичка писменост".

Радни ангажман започела је 2003. год. у "Деветој гимназији" и у ООШ "Владислав Рибникар" у Београду. Од 2005. год. ради у гимназији "Јосиф Панчић" у Бајиној Башти као професор математике, а од децембра 2024. год. као директор школе.

Напредовала је у звање педагошки саветник 2022. год., а од школске 2025/2026. ангажована је и као спољњи сарадник ШУ Ужице.

Ангажована је као сарадник практичар на ПМФ-у у Новом Саду, на студијском предмету *Школска пракса* за студенте на мастер академским студијама професорског смера.

На Листи је извршиоца за ангажовање по основу уговора о допунском раду ЗВКОВ-а и рецензирала је велики број уџбеника и збирки задатака из математике.

Излагала је на Међународним математичким конференцијама у Требињу, Крагујевцу и Ужицу.

На Државном семинару ДМС-а 2019. год. у Београду имала је излагање на тему "Популаризација математике у средњој школи".

Један је од аутора и реализатора акредитованог семинара за наставнике у периоду 2021/22-2025/26.

Објавила је више стручних коауторских радова у научним часописима.

Остваривала је успехе са ученицима на окружним, државним и међународним такмичењима и награде на конкурсима: Едугејминг у оквиру манифестације М3 пројекат "Матамапа" (организатори ЦПН, Нордеус фондација и ДМС, 2022.) и "Финансијска писменост – дигитални изазов" пројекат "Воћњак" (организатори ДМС и Ерсте банка, 2023.)

ИЗЈАВА АУТОРА О ОРИГИНАЛНОСТИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Изјављујем да докторска дисертација под насловом:

Когнитивно-визуелни приступ у развијању компетенција ученика за решавање проблема у настави математике у млађим разредима основне школе

представља *оригинално ауторско дело* настало као резултат *сопственог истраживачког рада.*

Овом Изјавом такође потврђујем:

- да сам *једини аутор* наведене докторске дисертације,
- да у наведеној докторској дисертацији *нисам извршио/ла повреду* ауторског нити другог права интелектуалне својине других лица,

У Ужицу, 24.08.2026. године,

потпис аутора

ИЗЈАВА АУТОРА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Изјављујем да су штампана и електронска верзија докторске дисертације под насловом:

Когнитивно-визуелни приступ у развијању компетенција ученика за решавање проблема у настави математике у млађим разредима основне школе

истоветне.

У Ужицу, 24.08.2026. године,

потпис аутора

ИЗЈАВА АУТОРА О ИСКОРИШЋАВАЊУ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Јелена Стојкановић,

☑ дозвољавам

☐ не дозвољавам

Универзитетској библиотеци у Крагујевцу да начини два трајна умножена примерка у електронској форми докторске дисертације под насловом:

Когнитивно-визуелни приступ у развијању компетенција ученика за решавање проблема у настави математике у млађим разредима основне школе

и то у целини, као и да по један примерак тако умножене докторске дисертације учини трајно доступним јавности путем дигиталног репозиторијума Универзитета у Крагујевцу и централног репозиторијума надлежног министарства, тако да припадници јавности могу начинити трајне умножене примерке у електронској форми наведене докторске дисертације путем *преузимања*.

Овом Изјавом такође

☑ дозвољавам

☐ не дозвољавам[2]

припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од следећих *Creative Commons* лиценци:

1) Ауторство

2) Ауторство - делити под истим условима

3) Ауторство - без прерада

4) Ауторство - некомерцијално

5) Ауторство - некомерцијално - делити под истим условима

6) Ауторство - некомерцијално - без прерада[3]

У Ужицу, 24.08.2026.године,

потпис аутора

[2] Уколико аутор изабере да не дозволи припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци, то не искључује право припадника јавности да наведену докторску дисертацију користе у складу са одредбама Закона о ауторском и сродним правима.

[3] Молимо ауторе који су изабрали да дозволе припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци да заокруже једну од понуђених лиценци. Детаљан садржај наведених лиценци доступан је на: http://creativecommons.org.rs/