УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПЕДАГОШКИ ФАКУЛТЕТ У УЖИЦУ

Сања Н. Анђелковић

УЧЕЊЕ ПУТЕМ ОТКРИЋА НА ДИФЕРЕНЦИРАНИМ САДРЖАЈИМА АЛГЕБРЕ И ЊЕГОВИ ЕФЕКТИ У ПОЧЕТНОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

докторска дисертација

Ужице, 2022.

UNIVERSITY OF KRAGUJEVAC
FACULTY OF EDUCATION IN UŽICE

Sanja N. Anđelković

DISCOVERY LEARNING ON DIFFERENTIATED ALGEBRA CONTENTS AND ITS EFFECTS IN MATHEMATICS' INITIAL TEACHING

Doctoral Dissertation

Užice, 2022.

Аутор
Име и презиме: Сања Н. Анђелковић
Датум и место рођења: 04. 07. 1986. године, Врање
Садашње запослење: Универзитет у Нишу, Педагошки факултет у Врању
Докторска дисертација
Наслов: Учење путем открића на диференцираним садржајима алгебре и његови ефекти у почетној настави математике
Број страница: 294
Број слика: 4, графикона: 18, табела: 73
Број библиографских података: 229
Установа и место где је рад израђен: Педагошки факултет у Ужицу
Научна област (УДК): 371.3
Ментор: Др Сања Маричић, редовни професор за ужу научну област *Методика наставе математике,* Педагошки факултет у Ужицу, Универзитет у Крагујевцу
Оцена и обрана
Датум пријаве теме: 06. 09. 2019.
Број одлуке и датум прихватања теме докторске/уметничке дисертације: IV-02-208/7 од 11. 03. 2020. године.
Комисија за оцену научне заснованости теме и испуњености услова кандидата:
1. Др Нела Малиновић Јовановић, редовни професор за ужу научну област *Методика наставе математике*, Педагошки факултет у Врању, Универзитет у Нишу; 2. Др Јелена Стаматовић, ванредни професор за ужу научну област *Општа педагогија*, Педагошки факултет у Ужицу, Универзитет у Крагујевцу; 3. Др Ненад Вуловић, ванредни професор за ужу научну област *Методика наставе математике*, Факултет педагошких наука у Јагодини, Универзитет у Крагујевцу.
Комисија за оцену и одбрану докторске/уметничке дисертације:
Датум одбране дисертације:

Author
Name and surname: Sanja N. Anđelković
Date and place of birth: 04. 07. 1986., Vranje
Current employment: Faculty of Education in Vranje, Univrsity of Niš
Doctoral Dissertation
Title: Discovery learning on differentiated algebra contents and its effects in mathematics' initial teaching
No. of pages: 294
No. of images: 4, charts: 18, tables: 73
No. of bibliographic data: 229
Institution and place of work: Faculty of Education in Užice, University of Kragujevac
Scientific area (UDK): 371.3
Mentor: Dr. Sanja Maričić, Full professor for narrow scientific field of *Methodology of Teaching Mathematics*, Faculty of Education in Užice, University of Kragujevac
Grade and Dissertation Defense
Topic Application Date: 06. 09. 2019.
Decision number and date of acceptance of the doctoral/artistic dissertation topic: IV-02-208/7, 11. 03. 2020.
Commission for evaluation of the scientific merit of the topic and the eligibility of the candidate:
1. Dr. Nela Malinović Jovanović, Full Professor for the narrow scientific field of *Methodology of Teaching Mathematics*, Faculty of Education in Vranje, University of Niš; 2. Dr. Jelena Stamatović, Associate Professor for the narrow scientific field of *General Pedagogy*, Faculty of Education in Užice, University of Kragujevac; 3. Dr. Nenad Vulović, Associate Professor for the narrow scientific field of *Methodology of Teaching Mathematics*, Faculty of Education in Jagodina, University of Kragujevac.
Commission for evaluation and defense of doctoral / artistic dissertation:
Date of Dissertation Defense:

Овом приликом се захваљујем менторки, проф. др Сањи Маричић, на корисним саветима, подршци, стручној помоћи и посвећености приликом израде докторске дисертације.

Захваљујем се и члановима Комисије на драгоценим сугестијама током израде дисертације.

Највећу захвалност дугујем својој породици на стрпљењу, разумевању, подршци и љубави, супругу Ивану, сину Богдану и ћерки Нини.

У Ужицу, августа 2022. *Сања Анђелковић*

УЧЕЊЕ ПУТЕМ ОТКРИЋА НА ДИФЕРЕНЦИРАНИМ САДРЖАЈИМА АЛГЕБРЕ И ЊЕГОВИ ЕФЕКТИ У ПОЧЕТНОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

САЖЕТАК

Предмет докторске дисертације је функционално повезивање учења путем открића и диференцијације садржаја и испитивање његових ефеката у почетној настави алгебре. У теоријском оквиру рада разматрана су питања која представљају полазиште и релевантну основу за учење путем открића на диференцираним садржајима алгебре. Представљене су карактеристике и теоријска полазишта која се налазе у основи учења путем открића, специфичности алгебарских садржаја у почетној настави математике као и потешкоће које се јављају при њиховом усвајању. Извршена је диференцијација захтева за алгебарске садржаје на три нивоа когнитивних постигнућа и у том контексту разрађен је методички оквир за примену учења путем открића на диференцираним садржајима алгебре у почетној настави математике.

У емпиријском делу докторске дисертације експериментално су истраживани ефекти израђеног модела учења на образовна постигнућа и трајност знања ученика. Испитана је и улога уџбеника математике у пружању основе за учење путем открића као и мишљења ученика и учитеља о вредностима примењеног модела учења. Добијени резултати истраживања указују на позитиван утицај примењеног модела учења алгебарских садржаја на побољшање образовних постигнућа ученика и ретенцију усвојених знања. Анализа садржаја уџбеника математике показала је да уџбеници не пружају довољну основу за учење путем открића. Ученици и учитељи су изразили позитивна мишљења о учењу путем открића на диференцираним садржајима.

Резултати добијени истраживањем показују да се потешкоће које се јављају приликом усвајања алгебарских садржаја у млађим разредима основне школе могу превазићи активним учествовањем ученика у њима прилагођеној настави.

Кључне речи: *учење путем открића, почетна настава математике, диференцијација садржаја, настава алгебре, образовна постигнућа.*

DISCOVERY LEARNING ON DIFFERENTIATED ALGEBRA CONTENTS AND ITS EFFECTS IN MATHEMATICS' INITIAL TEACHING

ABSTRACT

The subject of the doctoral thesis is the functional connection of discovery learning and content differentiation and examination of its effects in the initial teaching of algebra. The theoretical framework of the paper evaluates issues that represent the starting ground and relevant basis for discovery learning on differentiated contents of algebra. The characteristics and theoretical starting grounds that are the basis of discovery learning, the specifics of algebraic content in the initial teaching of mathematics as well as the difficulties that arise in their implementation are being presented. The differentiation of requirements for algebraic contents at three levels of cognitive achievements has been performed, and in such context a methodological framework for the application of learning through discovery on differentiated contents of algebra in the initial teaching of mathematics has been developed.

In the empirical part of the doctoral thesis, the effects of the developed learning model on the educational achievements and the permanence of pupils' knowledge were experimentally investigated. The role of mathematics textbooks in providing a basis for learning through discovery was also examined, as well as the opinions of pupils and teachers regarding the values of the applied learning model. The obtained research results indicate a positive impact of the applied model of learning of algebraic content on the improvement of pupils' educational achievements and the retention of acquired knowledge. An analysis of the content of mathematics textbooks has shown that textbooks do not provide a sufficient basis for learning through discovery. Pupils and teachers expressed positive opinions about discovery learning through discoveries on differentiated content.

Results obtained by the research show that difficulties which arise during adoption of algebraic contents in younger classes of primary school can be overcome by active participation of pupils in the teaching which is adapted to them.

Keywords: *discovery learning, initial teaching of mathematics, content differentiation, algebra teaching, educational achievements.*

САДРЖАЈ

УВОД

Убрзани развој науке и технике у 21. веку довео је до развоја концепта „друштва знања“, „друштва које учи“, што је даље водило глобалним променама васпитно-образовног система у правцу трансформисања класичне наставе, са циљем да се ученици оспособе и обуче за успешно суочавање са изазовима савременог друштва (Mirkov, 2011). У класичној настави доминира фронтални рад и ослањање на уџбенике. Фокус је на предавачкој функцији учитеља, што води смањењу интеракције између учитеља и ученика и не оставља довољно простора за самосталне активности ученика. Овакав начин рада недовољно стимулише ученике да учествују у решавању проблема и није ефикасан у припремању ученика за целоживотно учење (Bognar i Matijević, 2002). Друга, не мање важна слабост класичне наставе данас јесте њена униформност. Под тим се подразумева да би „без обзира на индивидуалитете, ученици истог узраста требало да овладају истим програмским целинама, да усвоје знања подједнаког екстензитета и интензитета, да се баве задацима подједнаке тежине, да исто резонују и закључују. Другим речима, требало би да напредују истим или приближно истим темпом“ (Миловановић, 2008: 470). „Као последица таквог методичког приступа, ученици који се налазе испод или изнад просека остају по страни јер је њихово активно учествовање у настави отежано њима неприлагођеном наставом“ (Јанковић, 2016: 269–270).

С друге стране, данас се у настави потенцира значај активног учења, а ученик се посматра као активни учесник у процесу учења и наставе. У таквим околностима „ученик је носилац, покретач, критичар, истраживач, интерпретатор. Међутим, ученик није само носилац наставе, него и њен циљ, због чега се настава прилагођава потребама и могућностима ученика ради постизања њиховог самоостварења“ (Stevanović, 2002: 25).

Друштвени и научни развој је условио покретање реформе васпитно-образовног система. Покрети са циљем да се превазиђе једнообразни модел организације наставе, те да се васпитно-образовни рад усмери ка ученику, његовим потребама и интересовањима, појавили су се последњих година 19. и почетком 20. века. Филозофске идеје Дјуија кључно су обликовале трансформацију традиционалне наставе. Према његовом становишту, у васпитању и образовању је потребно поћи од интересовања, потреба и склоности појединца, с циљем да се ученик што успешније припреми за укључивање у социјални живот. У педагошкој науци, на темељу ових промена, почеле су да се развијају нове методе учења, међу којима значајно место заузима учење путем открића (Španović i Trbojević, 2010).

Иако су се учитељи дуго ослањали на директно подучавање као основни метод наставе, уочава се тенденција да све већи број њих у наставу укључује стратегије које су креиране са циљем да ученике активирају у процесу учења. Уместо да се ученици постављају у улогу пасивних прималаца информација, а да се учење дефинише као механички процес трансмисије информација, они се све више подстичу на активност. Охрабрују се да стварају сопствене везе између садржаја који уче и властитог искуства, да самостално истражују и да откривена решења активно примењују у свакодневним животним ситуацијама. Учење путем открића подстиче епистемолошки заокрет ка схватању знања као активног конструисања значења и разумевања света око нас (Svinicki, 1998).

Међутим, знамо да у наставној пракси не могу сви ученици истовремено да реше све задатке. У таквим условима у први план се истичу индивидуалне особености ученика, њихова претходна знања и темпо рада, па се пред учитељем поставља задатак да организује наставу тако да омогући сваком ученику да у потпуности напредује према својим способностима. „Кроз историју образовања су се појављивале различите врсте, стратегије наставе, модели организације и идејна решења у тежњи да се створе услови у којима би се настава што више приближила потребама, интересовањима, могућностима и способностима ученика“ (Маричић и Милинковић, 2015: 63). У дидактичкој литератури се истиче да различите форме активног учења (наставе), међу које се сврстава и учење путем открића, подржавају различите стилове учења и способности ученика. У овим облицима учења диференцијација се остварује путем омогућавања ученицима да приступе садржају на различитим нивоима (INTO, 2017). У вези са тим, учење путем открића је најпродуктивније у индивидуализованој и диференцираној настави путем припремљених писаних материјала на којима су садржаји диференцирани по нивоима сложености у складу са нивоом знања, способностима и могућностима ученика за учење, како би свако од ученика могао да одговори на део захтева. На тај начин, процес учења је оптимално прилагођен индивидуалним разликама међу ученицима (Ilić, 2002).

Налази истраживача широм света (Kieran, 1981, 2004; Filloy & Rojano, 1989; Sfard & Linchevski, 1994; Knuth, Stephens, McNeil and Alibali, 2006; Vergnaud, 1988, према: Carraher, Schliemann, Brizuela & Earnest, 2006 и други) потврдили су да ученици млађег школског узраста имају бројне потешкоће при учењу алгебарских садржаја, које произилазе из асптрактности самих садржаја и ограничених когнитивних могућности ученика млађег школског узраста. То имплицира неопходност промене у приступу овим садржајима и проналажење одговарајућег методичког поступка за успешно учење почетних алгебарских појмова. У том контексту, наша размишљања су се кретала у правцу како унапредити наставу алгебре и прилагодити је могућностима ученика. С обзиром на то да најквалитетнија знања ученици стичу путем самосталне активности, при чему су садржаји и захтеви учења прилагођени њиховим индивидуалним могућностима, осмислили смо методички приступ заснован на функционалном повезивању учења путем открића и диференцирању садржаја у почетној настави алгебре. Диференцијација програмских садржаја је извршена на три нивоа сложености, ослањајући се на стандарде постигнућа ученика којима је описано која знања треба да поседују ученици на сваком од три нивоа образовних постигнућа. Ефекте овог приступа смо евалуирали експерименталним путем.

Опсежним проучавањем доступне литературе утврђен је недостатак теоријских и емпиријских истраживања учења путем открића уопште и учења путем открића на диференцираним садржајима у почетној настави математике, нарочито у нашој земљи. Осим тога, у пракси почетног математичког образовања недовољно је заступљен овај облик учења – у уџбеницима математике нема довољно задатака који би створили основу за учење путем открића, нити постоје друга дидактичка средства која би одговарала оваквом начину рада. То ово истраживање чини оправданим и значајним за педагошку теорију и праксу, а посебно за теорију и праксу наставе математике у млађим разредима основне школе.

Садржај докторске дисертације је структуиран у следеће целине: Теоријске основе истраживања, Методолошки оквир истраживања и Анализа и интерпретација резултата истраживања.

У поглављу *Теоријске основе истраживања* сагледани су сви непоходни теоријски аспекти истраживане теме на основу којих су постављена основна полазишта у истраживању. Пре свега, пошли смо од појмовног одређења учења путем открића и представљања основних карактеристика и специфичности овог облика учења. Како идеја о откривајућем учењу има своја утемељења у бројним теоријама учења и педагошким правцима, у оквиру овог дела дисертације представљена су теоријска полазишта која се налазе у основи учења путем открића. Такође, сагледане су и могућности функционалног повезивања учења путем открића и диференцијације садржаја у почетној настави математике. Представљене су педагошко-психолошке и дидактичке вредности и сагледана је улога учитеља и позиција ученика у овом методичком моделу. Како алгебра представља важан сегмент наставе математике те посебну пажњу треба усмерити на изграђивање адекватне појмовне базе из ове области, у раду су представљене и специфичности алгебарских садржаја у почетној настави математике, као и потешкоће које се јављају при њиховом усвајању. На крају овог поглавља су представљени научни резултати и закључци неких досадашњих радова и експерименталних истраживања који су представљали полазиште у нашем истраживању.

У поглављу *Методолошки оквир истраживања* изложена је методологија емпиријског истраживања, одређен је проблем и предмет истраживања, циљ, задаци и хипотезе истраживања, узорак, варијабле, технике и инструменти истраживања, представљени су основни статистички поступци примењени у обради података, као и ток истраживања. Израдили смо дидактичко-методичке моделе извођења учења путем открића на диференцираним садржајима алгебре и настојали смо да експериментално утврдимо њихове ефекте на образовна постигнућа ученика у почетном математичком образовању. При томе, кренули смо од опште претпоставке да учење путем открића на диференцираним садржајима алгебре значајно доприноси побољшању образовних учинака у почетној настави математике у поређењу с класичном наставом.

У оквиру поглавља *Анализа и интерпретација резултата истраживања* интерпретирани су налази истраживања који су изложени према истраживачким задацима и разматрани у складу са налазима сродних, тангентних истраживања.

Поглавље *Закључна разматрања* представља својеврстан сажетак резултата истраживања, а закључци истраживања су послужили као основа за методичке импликације у циљу будућег унапређивања васпитно-образовне праксе. Отворена су и нека нова питања која могу бити предмет будућих истраживања и која ће бити подстицај другим истраживачима да се баве овим проблемом и да га проуче и расветле с других аспеката.

I ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ ИСТРАЖИВАЊА

„Математика је краљица свих наука,
она се служи другим наукама,
али у свим приликама њој припада прво место.“

Gaus

1. УЧЕЊЕ ПУТЕМ ОТКРИЋА

1.1. Учење путем открића – појмовно одређење

Појам учења путем открића у литератури је одређен на различите начине. Најчешће се под овим појмом подразумева облик учења у којем ученици самостално откривају садржаје које треба да усвоје. Процес откривања обично није у потпуности самосталан, већ је вођен од стране учитеља, путем „сократовских питања“ или другим техникама, јер се не очекује да ученик потпуно самостално открије научне појмове за чије су откривање биле потребне године научног рада (Hammer, 1997). Учење путем открића подразумева да учитељи креирају наставне ситуације у којима се ученицима омогућава да уђу у улогу научника-истраживача и да задовоље своју (природну) радозналост тако што, уз подршку, активно конструишу менталне моделе који адекватно објашњавају њихово искуство (Driver et al, 2000, према: Kalathaki, 2015). Овај облик учења произилази из конструктивистичких теорија учења и одређује се као интерактивни процес у којем ученик као субјект путем самосталног откривања учи са разумевањем, са циљем да увећа и трансформише постојећа знања, осећања, ставове и смисао (Gazibara, 2018).

Док се у традиционалном, фронталном раду ученици доводе у пасиван положај, учење путем откривања има за циљ да ученик, „у креативном чину откривања, надилази границе познатог и напредује ка новом знању“ (Španović i Trbojević, 2010: 179). Код овог облика учења „самоактивност... и активно сучељавање ученика са својом околином достижу максимум. У процесу откривања не стиче се само ново знање нити само нове способности, већ се истодобно на вишој разини развија и знање како се у неструктуираним, проблемским ситуацијама можемо служити већ постојећим знањем и способностима“ (Terhart, 2001: 158).

Суштина учења путем открића јесте откривање непознатих правила, принципа и законитости, коришћењем властитог искуства и напора ученика. Дјуи и Пијаже учење путем открића одређују као стратегије које се ослањају на практичне и активне могућности за учење (Dewey, 1997; Piaget, 1954, према: Castronova, 2002). Кркљуш под учењем путем открића подразумева „релативно самостално упознавање са новим чињеницама, усвајање нових принципа и генерализација које нису ни на један други начин саопштене ученику“ (Krkljuš, 1977: 38). Учење путем открића је „усмерени самообразовни (индивидуални) ученички рад у настави, заснован на специјално програмираном материјалу и на интеракцијској комуникацији између учитеља и ученика“ (Радовановић, 1982: 11). Суштина учења путем открића се огледа у томе да се „садржај који треба научити ученику не презентује у готовом облику, већ га ученик самостално, независно открива“ (*Педагошка енциклопедија,* 1989: 461).

Квашчев под учењем путем открића подразумева вид учења у коме ученици вођени инструкцијама самостално стичу нова знања, на основу датих података продукују нове податке, откривају, дефинишу и вербализују правила и принципе, проналазе нове примере датих правила и принципа и проширују генерализације на нове случајеве. Учећи путем открића ученици организују чињенице на начин да их могу користити у различитим ситуацијама и тако развијају различите методе решавања проблема, али и позитивне ставове према активном учествовању у откривању нових знања (Kvaščev, 1980).

У литератури се учење путем открића често везује за решавање проблема. „Учење путем открића претпоставља индуктивну делатност ученика. Њу је могуће описати као процес решавања проблема“ (Neber, 1981, према: Terhart, 2001: 157). Говорећи о методама активног учења, Ивић и сарадници у методе учења које почивају на учењу путем открића сврставају решавање проблема и учење откривањем у ужем смислу (Ивић, Пешикан и Антић, 2001). Основна разлика између ових двеју метода односи се на то што учење откривањем подразумева самостално индуктивно долажење до сазнања, док решавање проблема обухвата проблемске ситуације за које не постоје директни одговори у претходно наученом градиву, већ ученици самостално траже решење примењујући углавном дедуктивно закључивање. Појам учења путем открића Кркљуш одређује као индуктивну делатност ученика у процесу решавања проблема у коме се „жељени степен оспособљености и потпуне доживљености остварује актом открића током стицања наизглед непонуђених, непланираних знања“ (Krkljuš, 1977: 39). Откриће, дакле, представља интегрални процес решавања проблема.

Учење путем открића је облик интерактивног учења у којем ученици индивидуално и самостално, са одговарајућим помоћним инструкцијама, стичу нова знања решавајући проблемске задатке. У интеракцији са учитељима и вршњацима добијају повратне информације о тачности својих решења и закључака. У процесу учења путем открића знања се структуирају, што значи да су ученици способни да их користе у бројним проблемским ситуацијама у свакодневном животном контексту. Иако су ученици аутономни у процесу стицања, увежбавања и примене знања, улога учитеља у учењу путем открића није занемарена – учитељ прати и мотивише ученика, даје додатна објашњења, пружа повратну информацију о тачности ученичких закључака и креира ситуације за примену стеченог знања (Малешевић, 2011; Malešević, 2014).

Аутори Бикнел Холмс и Хофман као кључне карактеристике учења путем открића наводе следеће:

1) Истраживање и решавање проблема у циљу конструисања, интегрисања и генерализације знања. Путем истраживања и решавања проблема ученици преузимају активну улогу у процесу учења. Они воде истраживачки процес, и уместо пасивног пријема информација путем предавања, они се ангажују у активностима које подстичу преузимање ризика, експериментисање и решавање проблема.

2) Активности су усмерене на ученике и њихова интересовања, они самостално одређују редослед и учесталост активности. Кроз учење путем открића ученици се охрабрују да уче сопственим темпом. Учење путем открића омогућава одређени степен флексибилности редоследа и учесталости активности, што позитивно утиче на мотивацију ученика.

3) Активности су усмерене ка подстицању интеграције новог знања у постојећу базу знања ученика. Учење путем открића се заснива на принципу коришћења претходног знања као основе за изградњу новог знања (Bicknell-Holmes & Hoffman, 2000: 314).

Трагајући за чиниоцима који сачињавају основе учења путем открића, Симић као битне компоненте овог облика учења наводи следеће:

– менталне операције – које су у основи учења путем открића: когниција, меморија, конвергентно и дивергентно мишљење, евалуација;

– теорија инструкције – која током учења путем открића мора задовољити следеће услове: да има висок ниво општости; да ефикасно подстиче развој индивидуалних диспозиција ученика; да што боље презентује материјал помоћу специфичних секвенци, при чему ученицима са различитим способностима, различитим предзнањем и различитом мотивацијом треба нудити алтернативне секвенце; да помогне ученицима да схвате и идентификују захтеве, и обезбеди већу вероватноћу да ће ученици доћи до тачних одговора; да непрекидно подстиче истраживачку делатност и учење ученика;
– способности и особине личности ученика – као последице учења путем открића: развијање интелектуалних способности, развијање унутрашње мотивације, овладавање техникама откривања у настави, боља трајност знања, ефикасна примена наученог у практичним ситуацијама, овладавање различитим техникама самосталног стицања знања, особине као што су независност, самосталност, конформизам и слично (Simić, 2015: 108–109).

У основи учења путем открића, према мишљењу Г. Гојков и Стојановића, јесте „принцип открића научних закључака, начина рада, налажење нових метода примене знања у пракси, што открива широке могућности за усвајање резултата научног сазнања као система знања, као и пута доласка до тих резултата“ (Gojkov i Stojanović, 2011: 157).

Када говоримо о појму учења путем открића, треба сагледати у којој мери је ученик у процесу учења самосталан и аутономан, а колико вођен од стране учитеља. Управо бројни аутори у разматрању учења путем октрића указују на ову чињеницу. Мајер (Mayer, 2004) прави разлику између чистог открића, процеса у којем је ученик у потпуности аутономан у откривању, и вођеног открића, у којем постоји већи или мањи степен надзора и подршке ученику од стране учитеља. Чисто откриће је као наставни метод у литератури често критиковано, на темељу претходно изнетих проблема са којима се ученици могу сусрести у процесу самосталног откривања знања, а „сам Брунер је сматрао да овакав облик учења није подесан у свим ситуацијама, често је непрактичан и нерационалан“ (Мићић, 2005: 14). Како Мајер наводи, дискусија о проблему или рад на проблему не воде нужно његовом решењу. Наиме, да би учење путем открића водило конструкцији знања, потребно је да ученици осмисле материјал који им се презентује тако што ће селектовати значајне информације, организовати их у кохерентну структуру и интегрисати их у постојећу базу знања. У том смислу, организацијом наставе код ученика треба да се подстакну управо ови процеси, што подразумева да је потребно да учитељи у процесу вођеног открића својим ученицима омогуће смисаоно истраживање (Mayer, 2004). Такав став износи и Д. Малешевић која наглашава да је учење путем открића индивидуално у процесу стицања, увежбавања и примене знања, али подразумева интеракцију између учитеља и ученика (2011: 10).

Ако учење путем откића посматрамо у школским условима, онда овај процес не подразумева спонтано откриће ученика, већ вођени процес који се одвија у интеракцији са учитељем и размени самостално откривених закључака с другим ученицима. Вођено откриће, у којем учитељ ученику пружа потребну подршку у процесу откривања, блиско је концепту подупирања о којем говори Виготски у својој социоконструктивистичкој теорији. Подупирање подразумева пружање подршке субјекту који учи од стране компетентног другог, а која је усклађена са учениковим тренутним нивоом способности и искуства. Ученици који имају више искуства и виши ниво способности добијају мање подршке, док се ученицима са мање искуства и способности пружа више помоћи (Honomichl & Chen, 2012: 615).

Ресник и Форд (Resnick i Ford, 1981) истичући разлику између учења путем открића и вођеног учења путем открића дефинишу ове облике учења на следећи начин:

1. „Учење путем открића је стратегија учења која подразумева да се ученицима предоче сви релевантни садржаји и предзнања који су у вези са новим појмом или проблемом и потом им се омогући да „лутају“ и испитују идеје, што их води самосталном открићу правила или односа“ (према: Мићић, 2005: 14).
2. „Вођено учење путем открића је стратегија учења у оквиру које наставник води ученике кроз све кораке или услове који воде до закључка, али их оставља да самостално дођу до актуелног (жељеног или очекиваног) правила“ (према: Мићић, 2005: 14).

Учење путем открића ученике поставља пред изазов да решавају аутентичне, смислене, реалне проблеме и да стичу комплексна знања, на темељу претпоставке да активно конструисање представља најефективнији начин стицања знања. Друга претпоставка на којој се темељи учење путем открића јесте да је стицање знања најефективније путем искуства које је засновано на процедурама и поступцима одређене научне области. Наиме, учење путем открића подразумева да ученици у процесу откривања користе сличне методе које се иначе користе у научној дисциплини коју проучавају (Kirschner, Sweller & Clark, 2006: 76). Настојање да се конструктивистичка теорија примени у образовању значило је промену фокуса наставе са учења као процеса трансмисије знања на искуствено учење, које је засновано на поступцима и процедурама научне области која се изучава. Ово је у пракси довело до широке примене практичног и пројектног рада са ученицима, заснованог на самосталној активности, истраживању и решавању проблема. Ипак, критичари овог приступа истичу да постоје велике разлике између поступака и активности у којима се ученици ангажују у процесу учења путем открића и процедура научне дисциплине, као и да учење путем открића не може да буде једини начин наставног рада (Kirschner et al., 2006: 78).

Према Шеферовој (Шефер, 2004), циљ образовања треба да се огледа у развоју способности решавања проблема, креативности, као и овладавању целином предмета, што доприноси разумевању појмовног система у одређеној научној дисциплини. За реализацију овог циља у наставу је неопходно „укључивати мишљење и способности који се користе у сазнавању научног система, али и садржај и сам појмовни систем који својом структуром утичу на откриће нових појмова кроз самосталну истраживачку делатност . На овај начин, учење постаје блиско стваралачком процесу у науци, што одговара Пијажеовом виђењу учења као реинвенције постојећих знања, и има везе са схватањем Виготског о важности целине и логике предмета као средства за стицање знања“ (према: Mirkov, 2011: 4). Иако непосредно експериментисање и истраживање јесте важно у процесу конструисања знања, истраживања показују да то није довољно. Наиме, сви релевантни извори научних информација, као што су експерименти, књиге, објашњења која дају учитељи, и даље имају своју улогу у процесу учења и подучавања. Њихова вредност се огледа у томе што обезбеђују научне информације које воде процес откривања. Учитељи у овом процесу, такође, морају бити активни јер је ученицима потребна помоћ у формулисању тврдњи, у планирању начина за обезбеђивање релевантних доказа и у ефикасном прикупљању података (Mirkov, 2011).

Током учења путем открића ученик је активан и интринзички мотивисан за учење. У процесу учења путем открића и истраживачког рада „развијају се различите способности за учење и подстиче инвентивност у тражењу одговора и рјешења постављеним проблемима. Учење откривањем је могуће на различитим нивоима образовања, у различитим наставним предметима и на различитим наставним садржајима“ (Бранковић и Микановић, 2012: 25).

Из претходног разматрања увиђамо да се у литератури могу пронаћи различита одређења учења путем открића, али све ове дефиниције истичу исте дистинктивне карактеристике овог облика учења. Закључујемо да су у основи учења путем открића процеси откривања, проналажења и трагања. У ситуацијама када ученик није довољно оспособљен за самостално откривање, неопходно је укључити одређени степен вођења, које се може кретати од потпуног вођења, преко делимичног вођења, до самоусмереног процеса учења. У одређењима овог облика учења наглашава се да је учење путем открића интерактивни, двосмерни процес, у којем је поред ученикове активности веома важна и улога учитеља. Учитељ у процесу учења путем открића треба да мотивише ученике за истраживање, да креира наставне ситуације које омогућавају ученицима да самостално истражују, те да прати и прилагођава наставне технике индивидуалним особеностима и способностима сваког ученика. Како се у литератури истиче да ефективност учења путем открића зависи од претходног знања ученика, њихових когнитивних способности, мотивације, интересовања и других особина, то се може закључити да је у самом одређењу учења путем открића уграђена идеја о индивидуализованом приступу.

Ако појам учења путем открића желимо одредити у контексту наставе математике, онда је то схватање да је суштина учења путем открића самостално откривање, руковођено од стране учитеља различитим техникама, које треба да омогући ученику да активним радом реорганизује дате податке, комбинује их са претходним искуством и трансформише на начин који му омогућава стицање нових сазнања.

1.2. Теоријска заснованост учења путем открића

Последњих година 19. и почетком 20. века долази до појаве реформских праваца у педагогији који су настали као резултат настојања да се превазиђу недостаци класичне наставе, а чије су основне одлике: настава усмерена на ученика, индивидуализован приступ ученику, активно учење и стицање знања које је употребљиво у ваншколском контексту. У основи реформске педагогије била је конструктивистичка теорија, која је у педагошкој науци своје зачетке имала у радовима Дјуија и Паркера и њиховој педоцентристичкој педагогији, а превасходно се развила у радовима Пијажеа и Виготског (Džinkić i Milutinović, 2018).

У педоцентристичкој педагогији, коју су почетком 20. века основали педагози Дјуи и Паркер, акценат није на механичком учењу и меморисању, већ на откривању и конструисању знања од стране ученика, па је самим тим фокус на способности ученика који самостално формира знање (Dmitrijev, 2008). Дјуи критикује вербализам и интелектуализам традиционалне наставе, која се примарно фокусирала на питање *шта ученици треба да уче*, као и неповезаност школског курикулума са дететовим потребама и интересовањима (Weimer, 1974), те усмерава пажњу на проналажење одговора на питање *како ученици треба да уче*. Према схватању филозофије прагматизма, која је у основи Дјуијеве „Нове школе“, истина је индивидуализована, ученик у школи треба да самостално открива, конструише знање и науку, и да открива сопствену истину, уместо да их сазнаје од других. Схватање учења у духу конструктивистичке теорије касније су разрађивали Пијаже, Виготски, Брунер и други (Lalović, 2009).

Дјуијева (Djui, 1966) схватања учења могу се изразити кроз три следећа става:

– знање није могуће непосредно, директно преносити од наставника до ученика;
– знање има вредност само уколико га ученик активно конструише у контексту сопственог искуства;
– уместо да буде обавештавање о искуству, настава треба да буде организована као процес стицања искуства (према: Lalović, 2009: 12).

Дјуијева схватања о неауторитативној и на ученика центрираној настави утицала су и на покрет прогресивног образовања, који је у великој мери популаризовао наставу путем открића. Овај покрет је, на темељу идеја филозофије прагматизма, оштро критиковао формализам наставе и неповезаност школског курикулума са дететовим потребама и интересовањима (Weimer, 1974).

Дјуи је сматрао и да је ментални развој посредован социјалном интеракцијом, те да је из тог разлога наставу потребно организовати на начин који ће задовољавати дечја природна интересовања у друштвеном контексту. Тако, уместо спречавања међусобних разговора, боље је да учитељ планира активности које наводе ученике на разговор и договарање у малим групама (Matijević, 2008).

Средином двадесетог века конструктивистичке теорије Брунера и Пијажеа постају најутицајнији когнитивистички приступи. Иако су ове теорије настале као настојање да објасне дечји развој, њихови принципи су широко примењени у образовању. Учење путем открића и диференцирана настава управо су утемељени на конструктивистичкој теорији. Конструктивистичке теорије учења одређују учење као „ауторегулисани, интерпретативни и нелинеарни процес конструкције знања потпомогнут активном интеракцијом са физичком и социјалном средином“ (Fosnot and Perry, 2005: 34). С друге стране, настава се схвата као пружање потпоре, подстицање и саветовање ученика у њиховом процесу учења (Palekčić, 2002).

Конструктивизам са аспекта дидактичке теорије наглашава активност ученика у наставном процесу, супротно формално организованој настави и разредно-предметном систему (Topolovčan, Rajić i Matijević, 2017). Дакле, важна конструктивистичка дидактичка поставка јесте да је то „како ученици уче важније од тога како наставник поучава“ (Вилотијевић и Вилотијевић, 2014: 24). „Основи циљ теорије конструктивизма у настави односи се на креирање курикулума који подстиче ефикасно учење“ (Džinkić i Milutinović, 2018: 131).

Конструктивистичке идеје су биле саставни део покрета реформске педагогије, који је био усмерен на превазилажење недостатака традиционалне школе и чије су основне поставке биле „настава усмерена на ученика, поштовање могућности и способности ученика, активност ученика у процесу школског учења, методе активног учења, стицање употребљивих знања и практичних вештина“ (Džinkić i Milutinović, 2018: 130). Конструктивисти критикују трансмисиони модел, према којем је ученик пасивни пријемник информација, истичући да су на овај начин стечена знања „неквалитетно структуирана и недовољно повезана са претходним знањима и искуствима“ (Jukić, 2013: 247).

У конструктивистичким теоријама на учење се гледа као на адаптивни процес који има за циљ организовање искустава, а путем којег се не сазнаје реално постојећа истина, већ се конструишу интерпретације искустава. У том смислу, знање не може бити резултат трансмисије у којој је онај који учи пасиван (Olssen, 1996), већ је резултат активне конструкције. Учење путем открића управо подразумева креирање наставних ситуација у којима ученици добијају улогу истраживача и упуштају се у процес откривања да би задовољили властиту радозналост. На тај начин ученици постају активни учесници у процесу учења, самостално уз вођење учитеља уче, изводе закључке, врше генерализације, примењују стечена знања у новим ситуацијама, једном речју – уче откривањем.

Конструктивисти сматрају да је конструисање знања резултат узајамног деловања претходних знања са новим информацијама, активностима и искуствима. Стицање знања се одвија путем интеракције са садржајем који се учи, уместо понављањем и подражавањем (Kroll & La Boskey, 1996). Активност онога који учи се огледа у укључености у сам процес учења, истраживачким активностима, решавању проблема, сарадњи са другима.

Конструктивистичка теорија је истовремено и критика објективизма. Према објективизму, знање је независно од перцепције и свести субјекта, оно је статично и непроменљиво, те одражава универзалну истину. Конструктивисти одбацују могућност спознаје као пресликане објективне реалности, већ сматрају да је знање активна и лична конструкција којом се реалност ствара (Duffy & Jonasen, 1992).

У оквиру конструктивистичке теорије развијено је више различитих приступа, при чему се у савременој литератури углавном истичу индивидуални (когнитивни или психолошки) и социјални конструктивизам (Richardson, 2003). Они су највише утицали на развој и организацију наставе усмерене ка ученику (Topolovčan i sar., 2017).

Психолошки конструктивизам, који је утемељио Пијаже, као циљ образовања види „подржавање ученикових интересовања и потреба, а нагласак ставља на индивидуални когнитивни развој“ (Jukić, 2013: 244). Схватање Пијажеа о когнитивном развоју значајно је „утицало на учење и наставу и представља основу за развој учења путем открића и хеуристичког модела наставе“ (Ljubojević, 2012, према: Džinkić i Milutinović, 2018: 134).

Психолошки или индивидуални конструктивизам је „теорија учења и развоја заснована на претпоставци да индивидуа активно конструише значење и да су те конструкције идиосинкратичне, и у одређеној мери зависе од претходног знања и искуства оног који учи“ (Richardson, 2003: 1625). Слично, кључна компонента учења путем открића јесте да ученици реконструишу претходно знање и искуство и поново откривају математичке идеје и појмове.

Учење се према индивидуалним конструктивистима схвата као активно реструктуирање мишљења и активна конструкција знања кроз интеракцију са средином (физичком и социјалном). Према мишљењу Пијажеа, ученик у процесу активног учења конструише знање на темељу интеракције са окружењем, које му „омогућава примену постојећих знања у новим ситуацијама, као и реконструисање постојећег знања и конструисање новог знања. У процесу откривања ученик изграђује знање различитих структура“ (Бранковић и Микановић, 2012: 24). При томе ученик је самосталан и до знања долази самооткривањем.

Према овом приступу, социјална интеракција јесте неопходан чинилац развоја и учења, али само као подстицајни, а не и формативни фактор. У том смислу, учитељ према схватањима психолошког конструктивизма има улогу фацилитатора промене кроз осмишљавање задатака и питања која за ученике представљају проблемске ситуације које захтевају решење (Jukić, 2013). Према Пијажеовом схватању, интеракција са вршњацима, такође, има подстицајну улогу. Сарадња са вршњацима, равноправним партнерима у процесу учења, ученику пружа перспективу другог, подстиче координацију акције и помаже решавању когнитивног конфликта.

Идеја конструкције знања и учења путем открића садржана је у основним поставкама и других теорија наставе и учења. Везе основних постулата учења путем открића могу се уочити и са теоријом *социјалног конструктивизма.* Основа ове теорије јесте схватање да је ученик конструктор сопственог знања, а улога учитеља је да креира активности осмишљавањем проблемских ситуација које омогућавају формирање одређеног појма. Учитељ треба да осмишљава делове наставних садржаја који ће омогућити развијање математичких конструкција од стране ученика, тј. да ствара окружење које подстиче истраживање и користи стратегије комуникације у којима долазе до изражаја интеракција и размена идеја (Cusi, Malara & Navarra, 2011). Дакле, основне поставке социјалног конструктивизма се базирају на чињеници да учење зависи од претходног знања и искуства ученика. Ангажованост у раду зарад осмишљавања садржаја, примена знања у решавању аутентичних проблема и активно упознавање са главним идејама наставног садржаја, уместо механичког памћења истих, омогућавају ефикасно учење ученика (Милутиновић, 2011). На овој доктрини се заснива и метода учења путем открића. Другим речима, учење путем открића се препознаје као битан елеменат социоконструктивистичке образовне теорије, у оквиру које ученик активно конструише знање у социјалној интеракцији.

Према социјалним конструктивистима, развој индивидуе произилази из социјалне интеракције. Знање се схвата као конструкција која се стиче путем комуникације и интеракције индивидуе са околином, односно социокултурним окружењем (Jukić, 2013). У складу са овим приступом, „знање је социјално конструисано у комуникацијској пракси. Комуникација се, према социјалном конструкционизму, схвата као социјално конструисање реалности“ (Babić, 2007: 220). „Социокултурни теоретичари су путем концепта 'зоне проксималног развоја' дефинисали учење као дистрибуирано, интерактивно, контекстуално те као резултат ученикове партиципације у *заједници праксе*“ (Steiner & Mann, 1996 према: Babić, 2007: 223). Социјална природа учења и поучавања поткрепљује значај социјалне интеракције у оквиру које појединац конструише своју стварност у узајамним односима са значајним другима који преносе социјално-културно искуство.

Виготски је један од најзначајнијих представника социјалног конструктивизма, и према његовој теорији когнитивног развоја, улога језика и културе у развоју је формативна (Jukić, 2013). Значај учења за процес психолошког развоја Виготски је описао увођењем новог појма – зоне наредног развитка. Зона наредног развитка се односи на оно што дете није још увек способно да самостално уради, али може уз помоћ одраслог, компетентног другог. Према теорији Виготског, осетљивост за препознавање ученикових потреба подразумева презентовати ученику праве садржаје који се налазе у његовој зони наредног развитка (Matejić Đuričić, 2012). Улога учитеља се огледа у пружању помоћи ученику (објашњења, давање информација, исправљање грешака, пружање подстицаја) како би досегао зону наредног развоја. Учитељ „у почетку даје снажну подршку ученику, да би касније поучавање укључило постављање проблема за самостално вежбање. У том оквиру ученик треба активно да учествује у процесу 'ко-конструкције' знања и управља властитим учењем, а наставник има улогу да креира наставне ситуације које омогућавају активно ангажовање ученика“ (Милутиновић, 2011: 187). Ова схватања се могу повезати и са праксом учења путем открића.

Кључна разлика између социјалног и психолошког конструктивизма јесте у фокусу. „У оба приступа претпоставка је да се значење и знање активно конструишу, што је суштина и учења путем открића. Ипак, социјални конструктивизам се фокусира на то како се знање развија под утицајем економских, социјалних и културних фактора, док се психолошки конструктивизам фокусира на то како се знање конструише унутар ума индивидуе која учи“ (Richardson, 2003: 1625).

Брунер учењу и настави приступа са когнитивистичког аспекта и један је од најзначајнијих заступника учења путем открића, које је засновано на конструктивистичким схватањима. Идеје које је Брунер изнео 60-их година XX века, иако нису у потпуности нове, већ се ослањају на радове његових претходника, попут Дјуија, имале су снажан утицај на савремену педагогију и утицале су на формирање целог покрета који се залагао за учење путем открића. Брунер истиче да је учење „усвајање нових информација, трансформација знања и провера адекватности знања“ (Вилотијевић, 2000: 241). За разлику од Пијажеовог схватања, према коме је когнитивни развој условљен искључиво узрастом, Брунер у први план истиче средину која може „убрзати, успорити или чак зауставити когнитивни развој“ (Вилотијевић, 2000: 243). У свом развоју човек пролази кроз три међузависне равне мисаоне представе: акционо представљање, иконичко представљање и симболичко представљање. Дете најпре „упознаје свет искључиво помоћу одређених радњи на које је навикнуто, и које су му потребне, да би могло да га проучава. С временом се појављује и представљање путем слика које је независно од физичког. Постепено се томе придодаје још један поступак који радњу и слику претвара у језички израз“ (Bruner, Olver & Greenfield, 1971: 21). У том смислу, „настава ће остварити своју улогу у интелектуалном развоју ученика само ако постоји јединство ова три начина представљања“ (Шпијуновић и Маричић, 2016: 67).

Брунер је пошао од става да је знање које човек стекне властитим интелектуалним напорима најтрајније, те да на исти начин треба да буде организовано школско учење. Критиковао је традиционалну наставу као вербалистичку и формалистичку, наводећи да настава у којој је ученик пасиван прималац информација не припрема ученика за каснију активну улогу у друштву (Малешевић, 2011; Malešević, 2014). Основни задатак учитеља јесте да ученику обезбеди чврсто разумевање садржаја који се учи и да га оспособи за самостално мишљење и решавање проблема које ће му бити од значаја и након завршетка формалног образовања (Bruner, 1961).

Брунерова теорија се, за разлику од традиционалних модела, фокусира на схватање о активној трансмисији знања, која се одвија посредством учења путем открића, при чему за њега откриће не представља само „акт проналажења нечега новог што је претходно било непознато људској цивилизацији, већ све облике самосталног стицања знања појединца ослањањем на сопствено мишљење“ (Bruner, 1961: 21). Једна од темељних поставки Брунерова теорије јесте да су претходно знање и искуство од кључног значаја за касније учење. Ученик у процесу учења селектује информације, формулише хипотезе и потом интегрише нови материјал у своје постојеће знање и когнитивне структуре. „Из великог броја информација ученик одабира оне које имају заједничке одлике и потом их сврстава у одређену категорију. Тај процес осмишљавања Брунер назива концептуализацијом или категоризацијом“ (Вилотијевић, 2000: 241).

Брунер у својој теорији полази од претпоставке да су ученици активни субјекти у процесу учења који конструишу своје знање (Bruner, 1961), те да је знање резултат активног процесирања информација ради конструисања решења за проблеме са којима се индивидуа сусреће. Према Брунеровом схватању, „ученик мора да буде активан у наставном процесу и да самостално открива везе и односе између садржаја које учи.

Тиме се повећава ефикасност мишљења и степен трансфера знања стеченог у школи на ситуације касније у животу“ (Grijak, 2019: 37).

Према Брунеровом схватању, свако дете, без обзира на узраст, има способност да разуме комплексне информације, под условом да је подучавање организовано на одговарајући начин, што је у директној супротности са становиштем Пијажеа и других теоретичара стадијума. У складу са овим схватањем учења, Брунер је предложио спирални курикулум – наставни приступ који подразумева да се сваки наставни садржај поново обрађује у одређеним интервалима, на вишем нивоу сваки пут (Вилотијевић, 2000). Организацијом курикулума у форми спирале обезбеђује се да се процес усвајања нових знања надовезује на претходно усвојена знања, што олакшава и подржава когнитивне процесе (Grijak, 2019). Према Брунеровом схватању, настава не треба стриктно да прати когнитивни развој ученика, него да подстиче интелектуални развој постављајући га пред одговарајуће проблемске ситуације, умерене тежине и доступне решавању (Nešić, 2010).

Према мишљењу Брунера, учење је акт открића, па читав наставни рад треба треба да буде усмерен ка открићу (Bruner, 1961). Учење путем открића је најважнији облик учења, док главни циљ наставног процеса треба да буде развој ученикове способности да самостално учи и решава проблеме, како у школским условима, тако и у реалним животним ситуацијама. Ово се, према мишљењу Брунера, може постићи самосталним конструкцијама знања ученика у процесу откривања. Настава заснована на открићу код ученика подстиче интризичку мотивацију за учењем, што је од пресудног значаја за покретање и одржавање успешног наставног процеса (Grijak, 2019). Циљ образовања, према Брунеру, јесте да ученици уче аутономно, а сврха образовања није трансмисија знања, већ подстицање мишљења и вештина решавања проблема и омогућавање трансфера наученог на нове ситуације. Учење и подучавање структуре, пре него меморисање чињеница и техника, представља централно питање трансфера. Како би претходно учење могло да олакша стицање новог знања, неопходно је да ученици стекну јасну генералну слику о везама између елемената (Bruner, 1960). Ученик треба да разуме структуру градива које учи, да информације и податке логички повеже и схвати хијерархију садржаја које изучава, јер једино такво знање може да буде употребљиво и ефикасно. Задатак школе је да знање „сложи“ у структуре које су за ученике разумљиве (Вилотијевић, 2000).

Како би се обезбедио трансфер у настави, потребно је да ученици самостално откривају знања, уместо да им се она дају у готовом облику. Из тих разлога се „Брунер залаже за стратегију учења путем открића јер је то модел учења којим се остварују предуслови за развој интелектуалних способности ученика, креативности и истраживачких техника, унутрашње мотивације, побољшања меморије, радозналости и способности да се откривају нова значења појмова, појаве ширег трансфера и способности решавања проблема“ (Nešić, 2010: 79). На основу тога Нешић закључује да се „Брунер залаже за широки трансфер, истичући да се у процесу трансфера преносе не готова знања, већ методе стицања знања. Дакле, битнији су процеси сазнавања од продуката и настава треба да буде усмерена на развијање свих механизама који доводе до успешнијег сазнавања“ (Nešić, 2010: 79).

Према Брунеровом схватању, учење путем открића се одвија у хипотетичком, пре него у експозиторном режиму. У режиму излагања учитељ је излагач садржаја који одлучује о начину, темпу и стилу излагања, док је ученик само слушалац. У хипотетичком модалитету учитељ и ученик више сарађују, и ученик често има главну улогу (Bruner, 1961).

Начин, техника откривања, према мишљењу Брунера, одређује ефикасност овог процеса. Брунер прави разлику између „кумулативног конструкционизма“ и „епизодног емпиризма“ као два начина откривања. Техника „епизодног емпиризма“ подразумева да у проблемској ситуацији ученик хипотезе продукује не-кумулативно једну за другом и тако се преплављује информацијама које су неорганизоване. Ово убрзо води до збуњености и обесхрабрености. Ученик који користи технику кумулативног конструктивизма користи претходно стечене информације за постављање нових упита. „Кумулативни конструктивизам“ ограничава природу накнадних питања у процесу откривања, повезује претходно стечена знања са новим знањима и организује долазни ток информација (Bruner, 1961).

У оквиру Брунерове теорије разматрају се четири кључна својства која морају бити укључена у процес учења путем открића:

– *предиспозиција за учење* – искуство и контекст који обликују вољу и способност детета при поласку у школу;

– *структура знања* – пажљива идентификација и дефинисање начина на које знање треба да буде структурирано да би га ученик што спремније усвојио;

– *редослед у инструкцијама* – редослед презентовања наставног градива;

– *појачавање* – природа и редослед система награде и казне (Grijak, 2019: 36–37).

Према Брунеровом схватању, мотивација која произилази из заинтересованости да се научи садржај који се учи има већи ефекат од спољашњих стимулуса, као што су оцене (Bruner, 1960).

Брунер је идентификовао шест индикатора когнитивног развоја који произилазе из процеса учења путем открића:

1. ученик реагује на ситуацију на нове начине, уместо увек на исти начин;

2. интернализација спољашњих догађаја;

3. повећан језички капацитет;

4. систематична интеракција са тутором;

5. језик као инструмент којим се уређује окружење;

6. повећан капацитет да се одговори на вишеструке захтеве (према: Hanafi, 2016: 293–294).

У конструктивистичкој настави, укључујући Брунерово схватање, улога учитеља није ригидно дефинисана као у традиционалним приступима. Ипак, улога учитеља се не занемарује, иако учитељи више нису у фокусу наставног процеса. Учитељ овде има улогу помагача, ментора, тренера или консултанта (Anyafulude, 2014). Иако је према мишљењу Брунера учење путем открића индивидуално у процесу стицања, увежбавања и примене знања, оно подразумева интеракцијску комуникацију учитељ – ученик – остали ученици. Учитељ има улогу да руководи наставним процесом тако што мотивише и прати рад ученика, даје додатна објашњења када то ученик затражи, организује различите начине давања повратне информације о тачности, омогућује ситуације за примену знања и врши праћење напредовања сваког ученика (Малешевић, 2011: 10). Учитељ треба да предочи чињенице и податке, док везе и односе међу њима морају откривати сами ученици, при чему учитељ треба да провоцира и подстиче максимално мисаоно ангажовање сваког појединог ученика. Ученици откривају на тај начин што „уочавају сличности и разлике међу предметима и појавама и на основу тога их групишу, тј. на основу веза и односа стварају хијерархију“ (Вилотијевић, 2000: 246–247).

Брунер у делу *Релевантност образовања* (*The Relevance of Education*, 1973) ре-евалуира своја схватања открића и наводи да учење путем открића представља нужну компоненту учења код људи, али истиче да не постоји консензус да овај начин учења може да буде и једини облик школског учења. У новом Брунеровом одређењу учења путем открића учење је усмерено ка томе да се ученику омогући да школско градиво научи на начин који ће му дозволити да га користи за решавање проблема у будућности и ван школског контекста. Учење путем открића обухвата шест компонената:

1) Став. Да би ученик могао да учи откривањем, предуслов је да препозна како постоје везе између информација које учи и других информација и ситуација, и да има став да може користити сопствено мишљење да реши проблем.
2) Компатибилност. Подразумева да ученик материјалу који учи треба да приступи на начин да га уклопи у сопствени систем асоцијација, категорија и референтних оквира.
3) Активација. Подразумева да ученик треба да се активира како би искусио сопствени капацитет за решавање проблема, као и да постигне успех који има ефекат награде за решавање проблема.
4) Вежба. Односи се на омогућавање ученику да вежба решавање проблема. Треба му омогућити да користи вештине решавања проблема које је стекао путем открића.
5) Проблем „самозапетљавања“. Дете ће, учећи у школском контексту, често бити способно да нешто уради, али не и да то што ради себи објасни.
6) Капацитет за руковање протоком информација – на начин да се и не могу користити за решавање проблема (Bruner, 1973).

Иако је Брунер откриће разумео као вођени процес, који је усмерен ка неком специфичном циљу и унапред одређеном сету критеријума у вези са оним шта треба открити, ипак, његови теоријски оквири су проширени изван ових граница и утицали су на пораст популарности тзв. неструктуираних учионица и на одређивање откривајуће наставе као обезбеђивања богатог контекста за учење и омогућавања ученицима да самостално изаберу сопствени програм учења.

Видимо да учење путем открића има дубоку теоријску заснованост у бројним теоријама наставе и учења. Готово да не постоји ниједна савремена теорија учења која у фокус не ставља активност ученика у процесу учења, његово вођење, инвентивност и креативност ученика, развијање способности критичког мишљења, самосталности и примену стеченог знања, што заправо представља основу учења путем открића.

У разматрањима о теоријским упориштима и карактеристикама учења путем открића, често се овај облик учења ставља наспрам рецептивног учења. Наиме, под утицајем теорије бихевиоризма у психологији је дошло до развоја става да развој појединца у пресудној мери зависи од techniques средински утицаја, што се у школском контексту односило на наставни садржај и учитеља. У бихевиористичком приступу настави улога учитеља је схваћена као доминантна, а учење је одређено као резултат активности учитеља, док је ученик пасиван прималац знања. Учење је схваћено као асиметрична релација у којој актер који више зна (учитељ) преноси знање ономе који мање зна (ученику) и који је у овом процесу пасиван. Оваква настава у литератури је позната као трансмисиона настава (као и вербална настава, екс-катедра, директна настава и слично), а овако схваћено учење као рецептивно учење (Lalović, 2009).

Основне карактеристике трансмисионе наставе и рецептивног учења јесу следеће:

- циљ наставе је трансмисија програмског садржаја;
- улога наставника је доминантна у наставном процесу – наставник тумачи и преноси у готовом облику наставне садржаје;
- ученик је у наставном процесу пасиван прималац знања – ученик слуша, памти и репродукује усвојени садржај (Lalović, 2009: 7–8).

У оваквом облику наставе ученик не открива знање, не долази до њега самостално, него га преузима од учитеља у већ одређеној, готовој форми. У процесу рецептивног учења учитељ врши трансмисију – преношење знања, док ученик врши рецепцију – примање знања. Основни задатак ученика у рецептивном учењу и трансмисионој настави јесте да предвиђено знање усвоји у датом облику, механички или са разумевањем. Учитељ у овом процесу има улогу главног, често и јединог извора знања, чије активности преношења знања ученика најчешће подразумевају вербално излагање, описивање, објашњавање, коментарисање или систематизовање наставних садржаја. Активности ученика су сведене на усвајање садржаја путем слушања, памћења и понављања (Lalović, 2009).

Док се дидактичке теорије које подржавају концепцију трансмисионе наставе и рецептивног учења највише баве описивањем улоге и дужности учитеља у наставном процесу, а мање самим учеником, у конструктивистичким теоријама које се залажу за учење путем открића истиче се да је за успешне исходе наставног процеса кључно да учитељ на адекватан начин уведе и подстакне ученике да се самостално ангажују у процесу откривања и решавања проблема. Из перспективе когнитивистичких теорија учења уместо да учитељ ученицима излаже и преноси закључне интелектуалне делатности, те да их подстиче да готове производе интелектуалне делатности усвајају, задатак учитеља треба да буде постављање проблема и подстицање ученика да их самостално решавају и да самостално доносе закључке (Lalović, 2009).

Брунер, највећи заговорник учења путем открића, свој рад је заснивао на схватању да настава треба да буде центрирана на ученика. Брунер ученика поставља у центар наставног процеса, као активног истраживача и конструктора властитог знања који се, уз подршку учитеља, доводи у ситуацију у којој самостално открива појмове, односе, везе и законитости. Циљ учења путем откривања није механичко запамћивање већ готових знања, него разумевање основних начела, законитости и идеја у области која се учи (Bruner, 1966). Супротну концепцију наставе је изнео Аусубел, који је такође био когнитивистички оријентисан, али се залагао за смислено вербално учење. Према Аусубеловом становишту, улога учитеља је централна у наставном процесу. У његовој теорији је истакнуто да је логичка организација садржаја који се учи кључна за учење, што имплицира важност припреме учитеља за предавање. Аусубел такође наглашава да учитељ у наставном процесу мора водити рачуна да су ученици когнитивно спремни за усвајање датог садржаја. У овоме се огледа једна од разлика двају приступа – док Аусубел улогу учитеља види као кључну, Брунер заступа становиште да је учитељ у процесу учења путем открића мање укључен и директиван. Такође, Аусубел заступа становиште да се процес учења примарно заснива на рецепцији и да је потпомогнут добром организацијом садржаја, док Брунер сматра да је процес учења примарно акт откривања (Peresuh, 1998).

Разматрајући предности и недостатке ових двају облика учења, у литератури се истиче да се посебна предност учења путем открића огледа у непосредном искуству трагања за знањем и овладавању начинима, умењима и вештинама долажења до знања, што га чини погодним за учење појмова, законитости, уочавање правила, принципа повезивања у целине и др. (Требјешанин, 2001).

Ипак, иако постоји низ позитивних ефеката учења путем открића у настави, постоје и проблеми у погледу његове практичне примене – дуготрајност процеса откривања, немогућност да курикулум буде у потпуности остварен, неки ученици могу имати потешкоће у учењу путем откривања, што за њих може бити веома обесхрабрујуће (Okwute, 2015).

Рецептивно учење захтева мање времена него учење путем открића, и може омогућити ученицима да стекну и организују знања, на начин на који без подршке учитеља не би самостално могли. У том смислу, учење путем открића и рецептивно учење могу бити комплементарни приступи настави математике (Okwute, 2015).

***

Резимирајући претходна разматрања о теоријским упориштима, закључујемо да је учење путем открића настало као резултат промене у теорији учења, која је била заснована на критици трансмисионог модела и која је акцентовала важност активности ученика у наставном процесу. Когнитивистичка теорија, заснована на раду Дјуија, претпоставља да је знање резултат активног процесирања информација у циљу решавања проблема. Когнитивистички приступ у фокус ставља процес, уместо садржаје учења, и истиче да ученик треба самостално да конструише своја знања, у социјалној интеракцији, а на темељу природне дечје радозналости коју треба подстицати.

Конструктивистички приступи Брунера и Пијажеа, који су се развијали у оквиру когнитивистичке теорије, изнедрили су наставу усмерену ка открићу, утемељену на идеји да се знање не стиче кроз пасиван процес пријема информација, већ се активно конструише. Настава заснована на открићу управо подразумева креирање наставних ситуација у којима ученици добијају улогу истраживача и упуштају се у процес откривања да би задовољили властиту радозналост. Учење путем открића директно произилази из Брунерове теорије. Брунер о учењу експлицитно говори као о акту откривања. Наглашава да свако дете може да научи било које градиво уколико је садржај и приступ прилагођен његовим индивидуалним карактеристикама. Виготски у својој теорији социјалног конструктивизма истиче формативну улогу социјалне интеракције у процесу учења и развоја, што је водило препознавању важности интеракције између учитеља и ученика, али и ученика и вршњака у процесу учења. У контексту појма зона наредног развоја, Виготски је истицао да се улога компетентног другог огледа, пре свега, у препознавању потреба оног који учи и актуелног нивоа његовог когнитивног функционисања. Тек уколико су ослоњене на индивидуалне могућности ученика, активности у зони наредног развитка јесу развојно подстицајне.

Можемо закључити да је настава усмерена ка открићу утемељена на теорији која препознаје неопходност самосталне активности ученика у процесу стицања знања, наглашава формативну улогу интеракције и захтева индивидуализован приступ сваком ученику.

2. НАСТАВА АЛГЕБРЕ У МЛАЂИМ РАЗРЕДИМА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ

2.1. Алгебра у раном математичком образовању

Интересовање за проучавање и разумевање проблема који се јављају при учењу алгебре на млађем школском узрасту датира још из античког периода. Тако, Диофант из Александрије у уводу дела *Arithmetica* (250. године) описује обесхрабрење са којим се ученици суочавају при првој употреби алгебарских поступака у решавању свакидашњих проблема (Radford, 2010). Ово питање је актуелно и у савременој методици наставе математике, јер су познавање проблема који се јављају при учењу алгебре и разумевање њихове природе кључни за унапређивање наставе алгебре, као и за осигуравање стимулативних околности за развој алгебарског мишљења.

Проблеми са којима се ученици млађег школског узраста суочавају при учењу садржаја алгебре, као и избор адекватног методичког приступа за ефикасно учење ових садржаја, предмет су интересовања бројних интернационалних дискусија. Тако се последњих деценија све више расправља о садржају, значењу и суштини алгебре на млађем школском узрасту.

Међутим, у литератури не постоји јединствени став о појмовном одређењу алгебре. Постоји више различитих одређења, при чему свако има одређене предности, али и недостатке. Ипак, „одређење школске алгебре веома је важан теоријски и методички задатак, будући да је знање алгебре од суштинског значаја за учење других математичких области, али и других дисциплина“ (према: Анђелковић, 2020: 120).

Основна становишта о томе шта је алгебра, произашла из Усискинове анализе, јесу:

- „алгебра је уопштена аритметика;
- алгебра је студија поступака за решавање одређених проблема;
- алгебра је студија о односима међу квантитетима;
- алгебра проучава структуре“ (Usiskin, 1988, према: Зељић, 2014: 16).

Капут на следећи начин описује оно што би требало разматрати у оквиру основношколске алгебре:

- „алгебра као генерализација и формализација образаца и ограничења;
- алгебра као синтаксички вођена манипулација симболима;
- алгебра као проучавање структура;
- алгебра као проучавање функција;
- алгебра као моделовање језика“ (Kaput, 1988: 25).

У оквиру *Принципа и стандарда за школску математику* алгебра се описује као:

- „разумевање обрасца, односа и функција;
- представљање и анализирање математичке ситуације и структуре користећи алгебарске симболе;
- анализирање промена у различитим контекстима“ (NCTM 2000: 37).

Можемо рећи да „савладавање школске алгебре подразумева овладавање новим језиком, новим методама знања, новим формама организације информација, као и новим погледима на реалност“ (Romano, 2009: 20), што је могуће само уколико се претходно код ученика развију одговарајући когнитивни предуслови.

Осим наведених, у литератури постоје бројне друге концептуализације алгебре, при чему се као заједничка замерка многих од њих може навести то што „недовољно пажње посвећују утврђивању садржаја који би чинили полазну основу у првим годинама учења алгебре“ (Зељић, 2014: 20).

У већини земаља настава алгебре се уводи на старијем основношколском узрасту, обично када ученици наврше 12 или 13 година (Зељић, 2014). Разлози за овакво стање ствари јесу, пре свега, историјске природе, јер је алгебра релативно млада област математике. Осим тога, на касно увођење наставе алгебре утиче и становиште да деца млађег школског узраста нису когнитивно (развојно) зрела за учење алгебарских појмова. Такође, пракса увођења алгебре на касном узрасту заснована је и на резултатима многих истраживања која су у фокусу имала потешкоће и проблеме ученика у настави алгебре (Carracher, Schliemann, Brizuela & Earnest, 2006).

Ипак, савремена стремљења у настави алгебре усмерена су на увођење алгебарских садржаја на најранијем школском узрасту, већ од првог разреда (Зељић, 2014). Разлози за увођење алгебре у наставне програме на раном основношколском узрасту и за развој алгебарског мишљења на овом узрасту јесу бројни, а један од најзначајнијих јесте схватање да настава алгебре на овако раном узрасту доприноси лакшем преласку са учења аритметичких садржаја на комплексне и апстрактне алгебарске појмове на старијем узрасту. Рана алгебра је, дакле, утемељена у идеји по којој „увођење алгебре у млађим разредима основне школе може да олакша усвајање сложенијих алгебарских појмова на каснијем узрасту, као и да развој алгебарског мишљења на раном узрасту може да омогући успешно савладавање алгебарског симболизма у каснијим разредима“ (Carracher & Schliemann, 2007: 675).

Становиште о увођењу алгебре на најранијем узрасту отворило је низ питања од којих се као најзначајнија издвајају врста алгебре и природа садржаја које ученици на раном узрасту могу да савладају (Blanton and Kaput, 2011).

Цвијановић истиче да „под раном алгебром подразумевамо процес инволвирања алгебарских садржаја заједно са уобичајеним аритметичким садржајима у нижим разредима основне школе“ (Cvijanović, 2016: 3). Ради се, пре свега, „о убацивању алгебарских алата у аритметичке појмове где год је то могуће“ (Стевановић, Црвенковић и Романо, 2014: 121). Дакле, евидентно је да постоји разлика између ране алгебре и формалне алгебре која је заступљена у програмима наставе и учења у вишим разредима.

Оптимални узраст ученика на којем треба почети са учењем алгебарских појмова предмет је бројних дискусија. Да јединствени став о овом питању не постоји, указали су Карахер и сарадници који наводе Дејвисово уверење како са учењем алгебарских садржаја треба започети у другом или трећем разреду основне школе (Davis, 1985, према: Carraher et al., 2006). С друге стране, Бодански (Bodanskii, 1991, према: Carraher, Schliemann & Schwartz, 2000) као и Вергно (Vergnaud, 1988, према: Carraher et al., 2006) залажу се да ученици са учењем алгебре почну на самом почетку школовања, тј. од првог разреда основне школе.

Истраживања појединих аутора (Carpenter and Franke, 2001; Blanton and Kaput, 2005) показала су да ученици у основној школи могу успешно да овладају алгебарским садржајима, као и да са разумевањем примењују синтаксичка правила алгебре, што представља уверљив аргумент у прилог значаја раног увођења наставе алгебре. То потврђују и резултати Брицуелове и Шлимановe студије који су доказали полазну претпоставку да десетогодишњи ученици могу смислено да баратају алгебарско-симболичким нотацијама како би представили генерализације до којих су дошли решавањем проблема у различитим контекстуалним ситуацијама (Brizuela & Schliemann, 2004).

Упознавање алгебарске нотације представља један од основних задатака ране алгебре, јер једино рано увођење алгебарске нотације може помоћи ученицима да открију њено право значење. Највећа потешкоћа код ученика се огледа у схватању да слово означава било који број (Carraher et al., 2007). „То је због тога што су ученици навикли да се баве конкретним случајевима јер у настави доминира аритметика, за разлику од наставе алгебре у којој преовладавају општи случајеви. Због тога се инсистира на раном увођењу алгебарске нотације у циљу убрзавања ученичког напретка и олакшавања будућег учења алгебре и математике“ (Анђелковић, 2020: 122).

Карпентер и Леви (Carpenter and Levi, 2000), у оквиру свог становишта, идентификују два аспекта ране алгебре: „генерализацију и употребу симбола за представљање математичких идеја и решавање проблема“ (према: Зељић, 2014: 20).

Ови аутори такође истичу да је основни проблем у настави ране алгебре у томе што ученици основне школе имају веома мање искуства са словом као променљивом него са словом као непознатом, а у алгебри су обе функције слова подједнако важне.

Садржаји наставе алгебре у почетној настави математике, према М. Зељић, могли би да обухватају следеће теме:

– „правила којима се истичу својства аритметичких операција и њихово процедурално и реторичко изражавање, те трансформисање аритметичких израза употребом ових правила;

– употреба слова као ознака за познату и непознату; решавање једначина и неједначина;

– словно записивање операцијских својстава; слова у улози слободне променљиве;

– састављање израза са променљивом којима се изражавају једноставни закони придруживања; развијање идеје о функцији и изражавање зависности међу променљивим“ (Зељић, 2014: 23).

Ова ауторка сматра да појам *рана алгебра*, који није ограничен на уско утврђен опсег разреда и прецизираних тема, има шире значење од школске алгебре. „Рана алгебра обухвата све поступке и садржаје који доприносе развоју алгебарског мишљења као јасног, прецизног и уопштеног начина размишљања, што, заправо, представља један од њених основних циљева“ (према: Анђелковић, 2020: 122).

Алгебарско мишљење је фундаментални елемент математичког мишљења, које преовладава у свим областима математике и неопходно је за коришћење математике у свакодневном животу. Међутим, у области математичког образовања не постоји јединствено одређење алгебарског мишљења. Капут истиче да „алгебарско мишљење не треба схватити као појам који обухвата једну идеју, већ појам који се састоји од разумевања симболичког формалног језика и различитих облика резоновања“ (Kaput, 1999: 134).

Алгебарско мишљење обухвата следеће врсте закључивања: „стварање генерализација из аритметике и узорака из свих области математике; употреба симболичког језика; проучавање структура међу бројевима; проучавање узорака и функција и процес математичког моделирања“ (Jukić Matić i Tutnjević, 2013: 32).

Алгебарско мишљење на раном узрасту односи се на развој посебног начина мишљења које обухвата „анализирање релација између величина, истицање структура, схватање промена, генерализацију, решавање проблема, моделовање, процењивање, проверавање и прогнозирање“ (Kieran, 2004a: 149). Киран схвата алгебарско мишљење као „скуп активности уопштавања, активности трансформације и општих активности“ (Kieran, 2004a: 142).

Суштина алгебарског мишљења, према Херберту и Брауну, огледа се у коришћењу симбола и алата за анализирање разних ситуација путем: „екстракције информација из дате ситуације; представљања тих информација математичким симболима, дијаграмима, табелама, графиконима и/или једначинама и интерпретације и примене математичких налаза, као што су проналажење непознатих и идентификација функционалних односа“ (Herbert and Brown, 1997: 123–124). С друге стране, Радфорд истиче да генерализације као битне одреднице алгебарског мишљења могу бити изражене и речима, гестовима и сл., а не искључиво симболима (Radford, 2006).

Генерализација представља основни пут за развој алгебарског мишљења ученика, па се може рећи да је уопштено третирање рачунских процедура један од начина његовог развоја. У прилог томе Зељић закључује да је „способност уопштавања, која доводи до повећане способности решавања проблема, суштинска карактеристика алгебарског мишљења“ (Зељић, 2014: 26). У процесу усвајања алгебарских садржаја од стране ученика учитељ је пред захтевом да представи алгебру као сврсисходну и свакодневно применљиву математичку дисциплину, а не као рутинско манипулисање симболима. Добро познавање и разумевање суштине саме алгебре омогућиће наставницима математике да делотворније помогну ученицима у превазилажењу тешкоћа које настају при усвајању садржаја алгебре (Jukić Matić i Tutnjević, 2013).

2.2. Алгебарски садржаји у почетној настави математике

Садржаји из области алгебре чине важан део програма наставе и учења у млађим разредима основне школе. На овом узрасту посебну пажњу треба усмерити на правилно формирање почетних алгебарских појмова. Међутим, треба имати у виду ограничења у вези са алгебарским садржајима која произилазе из њихове апстрактности, са једне стране, и ограничења когнитивних могућности деце млађег школског узраста за симболичко мишљење и представљање и за усвајање алгебарских садржаја, с друге стране. Истраживачи широм света (Kieran, 1981, 2004; Sfard & Linchevski, 1994; Filloy & Rojano, 1989; Vergnaud, 1988, према: Carraher et al., 2006; Knuth et al., 2006; Kriegler, 2008; Van Stiphout, Drijvers & Gravemeijer, 2013; Blanco & Garrote, 2007 и други) идентификовали су бројне тешкоће са којима се ученици суочавају при схватању и овладавању садржајима алгебре на млађем школском узрасту.

Претходно речено нас наводи на закључак да поред увођења алгебарских садржаја у наставне планове и програме, неопходно је пронаћи и адекватне начине за њихово усвајање од стране ученика. Зато је у последње време повећано интересовање бројних истраживача и теоретичара за проучавање проблема методичког приближавања алгебарских садржаја когнитивним способностима деце (Зељић, 2014). У млађим разредима основне школе заступљени су алгебарски садржаји који се односе на појмове у вези са непознатом и променљивом, једначинама, неједначинама и функцијама. Сви ови садржаји се спирално уводе из разреда у разред и постепено проширују кроз блокове бројева. Они су инкорпорирани и испреплетани са садржајима аритметике и у оквиру њих се усвајају. Међутим, сваки од ових садржаја је специфичан, и то, како у погледу методичког приступа, који карактерише њихово увођење, тако и апстрактности коју са собом носи. Стога ћемо у наставку рада указати на карактеристике, специфичности, али и проблеме са којима се ученици сусрећу приликом њиховог усвајања.

2.2.1. Слово као непозната и променљива у почетној настави математике

Познавање језика симбола и употреба математичких правила над њим чине суштину разумевања алгебре (Kriegler, 2008). Историјски посматрано, језик симбола и његово увођење за генерализацију и уопштавање представља прекретницу у развоју алгебре. С друге стране, симболичко представљање математичких идеја може представљати проблем ученицима при њиховом разумевању.

У почетној настави математике, према наводима Марјановића (1996), слова се као ознаке за „опште бројеве“ употребљавају у улози: непознате, променљиве и неусловљене (слободне) променљиве.

Претходницу увођењу слова у почетну наставу математике представља употреба „држача места“ која је предвиђена *Правилником о програму наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања* (2017). Како и сам назив „држачи места“ указује, ради се о месту у виду црте или празне кућице на које треба уписати тражени број. Касније се „држачи места“ замењују словима, што представља први корак увођењу слова, тј. симболичке нотације у почетну наставу математике (*Правилник о програму наставе и учења за други разред основног образовања и васпитања,* 2018). Када се уместо „држача места“ уведе слово, оно и даље представља држач места, али и ознаку за непознати број. Слово тада има улогу *непознате* која означава један број (Марјановић, 1996).

У случају када слово има више бројевних вредности, тада кажемо да се налази у улози *променљиве* (Марјановић, 1996). Увођење појма променљиве се предвиђа *Правилником о наставном програму за трећи разред основног образовања и васпитања* (2019). Ученици у почетку састављају и одређују вредност израза за различите вредности променљиве, за шта кажемо да представља рад са променљивом. Следећи корак у развијању идеје о променљивој представља решавање једноставних неједначина.

Слово у улози *слободне променљиве* користи се за означавање било ког броја у оквиру неког блока бројева или проширеног скупа природних бројева N_0 (Марјановић, 1996). Пример такве употребе слова јесте симболичко записивање закона аритметике у облику формула. Тако би асоцијативни закон за сабирање могао бити представљен на следећи начин: $(a+b)+c=a+(b+c)$, где a, b и c представљају било које бројеве. Програм наставе и учења математике за четврти разред предвиђа употребу симболичке нотације за изражавање свих правила и законитости у области аритметике (*Правилник о наставном програму за четврти разред основног образовања и васпитања,* 2019). То представља значајан корак ка овладавању апстрактним алгебарским садржајима у старијим разредима.

Програм наставе и учења математике у нижим разредима основне школе фокусиран је на операције са конкретним бројевима, док операције са општим бројевима, варијаблама и функцијама изостају, услед чега ученици у раним разредима основне школе не стичу појмовну основу за оперисање са *свим* бројевима (Warren & Cooper, 2005). Истраживањем које су спровели Карахер и сар. (Carraher et al., 2007) потврђено је да је ученицима највећи проблем да разумеју да слово *x* (може бити било које слово) може симболизовати било који број.

Ученици у вишим разредима основне школе почињу да уче разна правила и њихово коришћење, као и да оперишу општим бројевима који се означавају словима. Да би се ти садржаји усвојили са разумевањем, неопходно је да се у нижим разредима створи добра основа на којој ће ти садржаји бити осмишљени и која ће се надограђивати у вишим разредима. „Начин на који се ученици нижих разреда основне школе уче о употреби слова као алгебарских варијабли и непознатих, у свакодневној наставној пракси своди се на коришћење варијабле *x* како би се означило празно место у аритметичким записима и решавању једначина и неједначина у скупу природних бројева“ (Стевановић и др., 2014: 119).

Егзактност и језгровитост алгебарског језика узрокују бројне потешкоће у усвајању садржаја алгебре код ученика различитог календарског узраста. Тако, Зељић наводи да је „прихватање и разумевање алгебарских симбола једна од примарних тешкоћа са којима се сусрећу ученици при учењу алгебарских садржаја“ (Зељић, 2014: 44).

Питања која се логично намећу јесу: *Могу ли ученици млађег школског узраста да овладају симболима и алгебарском нотацијом*? и *Када треба почети са увођењем симбола и симболичке нотације?*

Резултати истраживања Блантона и сарадника (2017) показују да је непоходно да ученици најпре уочавају променљиву количину у математичком смислу, пре него што је симболизују. Овим истраживањем је потврђено и да ученици од првог разреда основне школе разумеју идеју непознате и променљиве (Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey & Newman-Owens, 2017).

Ван Амером (Van Amerom, 2002) је показала да је потребно код ученика истовремено развијати значење и симболизацију, као и да ученици треба да буду способни да користе симболизацију у проблемима из свакодневног живота.

Налази Карпентера и Франкеа (Carpenter & Franke, 2001) потврђују да деца млађег основношколског школског узраста разумеју да је $a + b - b = a$ за било коју вредност a и b. То значи да деца већ на раном школском узрасту могу разумети алгебарске садржаје и овладати алгебарским нотацијама само ако се правилно приступи овим садржајима и ако се омогући ученцима да кроз међусобну интеракцију логички расуђују и уопштавају односе.

Чињеница да слова у алгебри могу да буду употребљена на различите начине задаје велике проблеме ученицима. Тако се у литератури наводи да ученици имају потешкоће са интерпретацијом симбола који се налазе један поред другог. „У нашем бројевном систему симбол 149 означава број сто четрдесет и девет, док у алгебри израз $14x$ означава множење броја 14 са x. Такође, важи $14x = x14$, иако је конвенцијом као прикладнији прихваћен први израз. Променљиве које се употребљавају у алгебри узимају различита значења, у зависности од контекста у којем се појављују. На пример, у једначини 3 + x = 7, x је непозната, а 4 је решење једначине. Међутим, у изразу А (x + y) = Аx + Аy, x се користи за генерализацију обрасца“ (према: Анђелковић, 2020: 125).

Најчешћи извор тешкоћа за ученике јесте диференцирање различитих начина употребе слова у алгебри. На пример, интерпретација симбола који су написани један поред другог може бити проблематична за ученике.

У програму наставе и учења математике највећа пажња се придаје решавању једначина у којима се x (или неко друго слово) појављује као непозната. Међутим, значење алгебарских израза се проширује посматрањем слова као променљиве чија вредност може варирати. На тај начин ученици се поспешују да, уместо размишљања о операцијама са конкретним бројевима, пређу на размишљање о односима који постоје између променљивих (Carraher, Martinez & Schliemann, 2008).

„Поред идентификовања начина на које ученици греше приликом интерпретације алгебарских симбола, од пресудног је значаја анализирати ове грешке и разумети разлоге због којих до њих долази, те омогућити ученицима да развију адекватну способност симболизације. Савремени аутори процес симболизације и симболе схватају као продукт активности ученика који се формира у интеракцији“ (Анђелковић, 2020: 126).

Да би алгебарске нотације ученицима биле јасне, потребно их је уводити на начин који за њих има смисла. Јер „уколико се симболи уводе без адекватне основе која даје значење симболичким манипулацијама, ученици могу бити изложени преурањеној формализацији, док језик симбола постаје семантички празан“ (Зељић, 2014: 54).

Уопштеност и апстрактност алгебарске нотације ствара потребу за диференцираним приступом којим се уважавају индивидуалне карактеристике и разлике које постоје међу ученицима, чиме се стварају услови за активно учествовање свих ученика у процесу учења, при чему самостално истражују, откривају и мисаоно овладавају алгебарским нотацијама.

2.2.2. Једначине у почетној настави математике

Садржаји о једначинама су заступљени у програму наставе и учења математике у сваком од прва четири разреда основне школе, што значи да ученици садржаје ове теме усвајају поступно, корак по корак, и надограђују знања из разреда у разред.

Основни циљ изучавања садржаја о једначинама у почетној настави математике јесте да „ученици разумеју поступак решавања једначина, да реагују на одређену ситуацију записивањем једначина, да открију поступак одређивања непознатог броја на основу инверзности рачунских операција, да врше проверу тачности нађеног решења и схвате улогу једначина у решавању реалних проблема“ (Шпијуновић и Маричић, 2016: 321).

Формирање појма једначине се темељи на појму једнакости. Ученици, најпре, упознају једнакости са непознатим бројем који се означава „држачем места“ (На пример: 5 – __ = 3, 4 + $\square$ = 6). У једнакостима са сабирањем и одузимањем ученици првог разреда треба да одреде непознати број искључиво „погађањем“, на основу познавања структуре броја и коришћењем таблице сабирања и одузимања, тако да добију тачну једнакост (*Правилник о програму наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања*, 2017).

Правилник о програму наставе и учења за други разред основног образовања и васпитања (2018) предвиђа увођење појма непознате и замену „држача места“ словом. Такође, предвиђено је и развијање појма *једначина*. Након фазе погађања непознатог броја, ученици решавају једначине на основу везе између рачунских операција, тј. инверзности рачунских операција у оквиру блока бројева до 100. При томе, „није решавање једначина, већ њихово састављање оно што је најважније“ (Марјановић, 1996: 73).

Провера решења једначине се врши провером вредности израза за одређену вредност непознате. Провера решења једначине не ради се само у циљу контроле рада, већ представља мотивисан поступак валоризације тог словног израза (Зељић, 2011).

У трећем разреду предвиђа се решавање једноставних једначина на основу инверзности одговарајућих рачунских операција у оквиру блока бројева до 1000. У програму за трећи разред се, такође, наглашава важност провере тачности решења једначина (*Правилник о програму наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања*, 2019).

Захтевима *Правилника о програму наставе и учења за четврти разред основног образовања и васпитања* (2019) предвиђа се оспособљавање ученика за решавање и сложених једначина. Решавање ових облика једначина од стране ученика млађих разреда основне школе не подразумева примену формалних поступака. Њихово решавање подразумева да се, на основу познавања структуре израза, дата једначина своди на еквивалентну једначину са једном рачунском операцијом (Шпијуновић и Маричић, 2016).

Видимо да садржаји о једначинама заузимају знатан део програма у сваком разреду почетне наставе математике. Међутим, усвајање и разумевање ових садржаја од стране ученика прате бројне тешкоће које воде ка механичком усвајању датих садржаја и неразумевању од стране ученика.

Проблеми и тешкоће ученика које се јављају при решавању једначина предмет су бројних истраживања последњих деценија (Kieran, 1981; Sfard & Linchevski, 1994, Filloy & Rojano, 1989, Knuth et al., 2006. и др.). Аутори (Kieran, 1981; Knuth et al., 2006. и др.) сматрају да је погрешан приступ релацији једнакости у аритметици водећи проблем при решавању једначина.

Већина ученика на знак једнакости гледа као на „знак након чега следи решење“ а не као на симбол који означава једнакост леве и десне стране израза (Kieran, 1981). Да постоји повезаност између разумевања знака једнакости код млађих ученика и њиховог успеха у решавању једначина, потврдили су Кнут и сарадници (Knuth et al., 2006). Они су утврдили да ученици који имају релационо разумевање знака једнакости, тј. који на знак једнакости гледају као на знак еквиваленције, боље разумеју решавање једначина, иако се претходно нису сусрели са формалном алгебром.

Разумевање структуре математичког израза и појма једнакости чини основу за успешно усвајање апстрактних алгебарских садржаја. Међутим, истраживање Ван Стифаута, Драјвера и Гравермајера (Van Stiphout, Drijvers & Gravemeijer, 2013) потврдило је како многи ученици нису способни да се флексибилно баве математичком структуром израза и једначина. То значи да ученици нису способни да схвате израз као целину која постоји самостално и независно и којом се може манипулисати као са било којим бројем, већ израз виде само као процес обављања рачунске операције. Тако, на пример, када се пред ученицима нађе израз 12 + 6, они теже да одреде вредност овог израза, тј. да обаве рачунску операцију (12 + 6 = 18), док много теже могу да посматрају и разумеју овај израз као независан објекат (12 + 6).

Осим тога, ученици имају проблем у схватању односа између израза који се налазе са једне и друге стране знака једнакости. Кроз изучавање аритметичких садржаја ученици стичу навику да је са леве стране знака једнакости увек захтев за спровођењем операције, те због тога ови ученици када почињу са алгебром „нерадо прихватају једнакости попут 4 + 3 = 6 + 1 или 3 = 3. Они сматрају да би десна страна требало да указује на резултат, односно, 4 + 3 = 7" (Byers and Hersovics, 1977, према: Зељић, 2014: 89).

Проблем неразумевања појма *једначина* огледа се и у томе што ученици имају различите погледе на једначине као математичке објекте. Тако су у истраживању Стејси и Мек Грегор (1999) ученици исказали три различите представе о томе шта за њих представљају једначине:

- формула за решавање задатка;
- наратив који описује операције које дају резултат;
- опис суштинских односа (Stacey & MacGregor, 1999: 163).

Резултати истраживања које је спровела Киран (Kieran, 1981; Kieran, 1992) указују на то да код ученика различитог узраста недостају структурална схватања једначина. Она је извела експеримент са дванаестогодишњим ученицима који је био осмишљен тако да им помогне да прошире разумевање знака једнакости. Ученици су након експеримента прихватили једнакости са вишеструким операцијама са обеју страна знака једнакости. Тиме је показала да оваква интервенција представља темељ на коме је могућа конструкција значења алгебарских једначина са вишеструким операцијама на обема странама.

Истраживања су показала да многи ученици шаблонизују решавање једначина, тј. не сватају структуру која је у основи употребљеног поступака (Brown, Carpenter, Kouba, Lindquist, Silver & Swafford, 1988). У почетку ученици схватају алгебарске једначине процедурално. Доста времена прође док ученик почне схватати алгебарске формуле на структуралан начин (Sfard & Linchevski, 1994).

Како се садржаји о једначинама не би учили шаблонски и без разумевања, веома је битно да се они усвајају диференцираним приступом учењу који је у потпуности прилагођен учениковим могућностима, способностима, искуству и нивоу знања, али исто тако заснован на његовој активности у процесу учења, активностима у којима гради знање на бази постојећег знања и искуства кроз сопствено откриће.

2.2.3. Неједначине у почетној настави математике

Решавање неједначина у почетној настави математике јесте пропедевтичко. Садржаји ове наставне теме имају улогу да помогну ученицима да „схвате идеју функције и променљиве, увежбавају технику извођења рачунских операција, уочавају зависност између компонената рачунских операција, запажају значење речи *и, или, ако... тада*, *не* итд. (Шпијуновић и Маричић, 2016: 328).

Појам неједначине се формира ослањајући се на појам неједнакости. Са појмом бројевне неједнакости ученици су се упознали већ при изучавању бројева у првој десетици (На пример: $3 < 5$; $2 + 4 > 3$ и слично). Први облици неједначина са којима се ученици упознају, а који су предвиђени програмом за трећи разред, јесу неједначине облика $x > a$ и $x < a$ (*Правилник о наставном програму за трећи разред основног образовања и васпитања,* 2019). Слово x има улогу променљиве, а сви бројеви који задовољавају дату неједнакост јесу вредности променљиве. Следећи корак на путу развијања појма неједначине представља увођење неједначина облика $x \pm a > b$; $x \pm a < b$; $a \pm x > b$; $a \pm x < b$. *Правилником о наставном програму за четврти разред основног образовања и васпитања* (2019) предвиђа се да ученици увежбавају решавање простих неједначина са сабирањем и одузимањем и да се упознају са решавањем неједначина са множењем и дељењем са решењима из скупа N_0.

Шпијуновић и Маричић наводе да се неједначине у почетној настави математике могу решавати на више начина:

– „хеуристичким поступком, тј. „погађањем" решења, при чему ученици додељују вредности променљивој и одређују који бројеви задовољавају дату неједнакост;

– одређивањем скупа решења помоћу таблице, који се заснива на попуњавању таблице и читању вредности које задовољавају дату неједначину;

– решавањем одговарајуће једначине, која се добија када се у неједначини знак неједнакости замени знаком једнакости, уз функционалну примену зависности резултата рачунских операција од промене компонената" (Шпијуновић и Маричић, 2016: 322).

Овакав приступ омогућава потпуно разумевање поступка решавања неједначина. Наиме, формално мењање знака неједнакости у поступку решавања неједначина и објашњење да долази до промене знака неједнакости када је променљива на месту умањиоца нема оправдања у скупу природних бројева (Зељић, 2014).

Као основне проблеме у раду са садржајима о неједначинама, Зељић издваја следеће:

- „запостављање развијања значења појма неједначине;
- представљање појма и поступака симболичким језиком, док се остали начини репрезентације не користе;
- проблем повезаности садржаја који се односе на једначине и неједначине, који доводи до тога да се алгебарске трансформације, при решавању неједначина, изводе без обзира на ограничења која настају из чињенице да се знак > не понаша као знак =" (Зељић, 2014: 143).

Кијеран (Kieran, 2004b) као водећи проблем истиче то што садашњи приступи неједначинама не подразумевају активности контекстуалног решавања проблема, што би била основа на којој би се изградила симболичка форма неједначина, чиме се запоставља изграђивање значења појма неједначина.

Неразумевање симбола у неједначинама још једна је тешкоћа коју ученици имају у раду са овим садржајима. Верикиос и Фармаки (Verikios and Farmaki, 2008, према: Зељић, 2014) емпиријски су потврдили да употреба табела, симбола, текстуалних проблема или графичких репрезентација у обради садржаја о неједначинама може помоћи ученицима у схватању поступка решавања неједначина и код формирања значења симбола. Налази Бланко и Гарот (Blanco & Garrote, 2007), такође, потврђују да је неразумевање значења алгебарских симбола у неједначинама најчешћи проблем са којим се ученици сусрећу приликом изучавања ових садржаја. Наиме, ученици решавају неједначине по наученој шеми, тј. по неком утврђеном низу рутинских поступака које најчешће не разумеју, па самим тим не могу ни да објасне због чега су предузели одређене кораке.

Велики број проблема везаних за схватање неједначина проистиче из њихове, на први поглед, сличности са једначинама. О интуитивном схватању појма неједначине говоре налази истраживања које је спроведено од стране Базинија и Самира (Bazzini & Tsamir, 2003), а чији је циљ био да испита како ученици другог и трећег разреда средње школе доживљавају ове појмове. Објашњења ученика да неједначине виде као: „сличне једначинама“, „исте као једначине“ или „другу врсту једначина“, недвосмислено показују да се ради о интуитивном разумевању неједначина. Осим тога, налази овог истраживања указују да ученици користе једначине као модел у алгоритамским моделима решавања неједначина.

Разматрајући проблем повезаности између поступака решавања једначина и неједначина Кијеран истиче да „особине које леже у основи ваљаних трансформација при решавању једначина нису исте као оне које леже у основи ваљаних трансформација за решавање неједначина“ (Kieran, 2004b: 147). Због тога су наставници пред „дидактичким изазовом“ да пронађу адекватне методе како би помогли ученицима да промишљају о тим битним разликама између једначина и неједначина при манипулацији са симболима (Kieran, 2004b).

Сагледавајући проблеме са којима се ученици суочавају приликом формирања и усвајања појма неједначине, закључујемо да учитељи морају пажљиво бирати начине за представљање ових апстрактних алгебарских појмова ученицима како би их они усвојили са разумевањем. Методички приступ обради ових садржаја требало би да карактерише подстицање свих ученика на активно откривање и грађење нових знања, уз поштовање њихове индивидуалности.

2.2.4. Идеја функције и функционалне зависности у почетној настави математике

Појам функције представља један од комплекснијих појмова у математици. „Идеју функције треба развијати кроз схватање функције као релације коју карактерише својство да за сваки елемент из домена (полазни скуп), на основу датог прописа пресликавања (закона), имамо тачно један елемент кодомена“ (Дејић и Егерић, 2003: 73). У исходима, који су у вези са алгебарским садржајима у програмима наставе и учења математике за млађи основношколски узраст, функције се не наводе децидирано, али би идеја функције требало да прожима све садржаје почетне наставе математике. Стога прве кораке у развијању овог појма треба начинити већ при формирању појма броја, рачунских операција, мерења итд.

Развијању идеје функције доприноси употреба таблица и графичко представљање зависних величина. Таблице се могу користити на начин да ученици према унапред заданом критеријуму попуњавају празна места у табели или могу бити „дати бројеви из кодомена и домена, а од ученика се захтевати да утврде везу између њих и симболички је запишу“ (Дејић и Егерић, 2003: 74).

Правилник о наставном програму за трећи разред основног образовања и васпитања (2019) предвиђа увођење правила о зависности резултата операција од промене компонената. Основа на којој се граде поменута правила јесу садржаји аритметике који се односе на овладавање рачунским операцијама. Изражавање ових правила на часовима аритметике представља активност преко које се открива функционална зависност.

Изучавање садржаја који репрезентују зависност резултата рачунских радњи од промене њихових компонената има за циљ рационалније рачунање у скупу природних бројева и смислено овладавање поступком решавања неједначина.

У циљу развијања математичко-логичког мишљења, програмом наставе математике за четврти разред предвиђају се задаци који ће омогућити припрему ученика за развијање појма функције у наредним разредима. У том смислу посебно су корисни задаци у којима се захтева одређивање следећег члана у низу или одређивање правила за формирање низа задатог почетним члановима, формирање низа на основу задатог правила, као и осмишљавање правила за настајање новог низа (*Правилник о наставном програму за четврти разред основног образовања и васпитања,* 2019).

***

Претходно наведени проблеми и потешкоће ученика који се јављају приликом усвајања садржаја алгебре у нижим разредима основне школе могу представљати узрок за читав низ проблема у учењу алгебре у наредним фазама школовања. То имплицира неопходност промене у приступу овим садржајима и проналажењу ефикасног методичког поступка за успешно учење почетних алгебарских појмова. Идеја овог рада је заснован на чињеници да до најквалитетнијих знања ученици долазе путем самосталне активности, при чему су садржаји и захтеви учења прилагођени индивидуалним могућностима ученика. У вези са тим, осмислили смо модел учења који се заснива на учењу алгебарских садржаја путем открића, при чему је материјал за учење структуиран на три нивоа сложености.

3. УЧЕЊЕ ПУТЕМ ОТКРИЋА И ДИФЕРЕНЦИЈАЦИЈА САДРЖАЈА У УЧЕЊУ САДРЖАЈА АЛГЕБРЕ У МЛАЂИМ РАЗРЕДИМА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ

3.1. Учење путем открића – начин за унапређење учења садржаја алгебре

Многи ученици имају тешкоћа са разумевањем математичких појмова, делом услед тога што је математика апстрактна, а ученици су навикнути да размишљају о конкретним појавама и односима (Ramdhani, Usodo & Subanti, 2017). Ово посебно долази до изражаја у учењу садржаја алгебре, које карактерише велика апстрактност, симболичка нотација и генерализације које су изражене симболичким нотацијама. Од бројних фактора који утичу на ниска постигнућа ученика у математици, значајно место има пасивност ученика у наставном процесу (Kistian, Armanto & Su 2017). У настави математике учитељи још увек у великој мери користе традиционални приступ који се заснива на директном подучавању, што резултира простим запамћивањем математичких формула, теорема и дефиниција од стране ученика, без разумевања појмова и садржаја који су формулама изражени. У оваквој наставној ситуацији ученици немају могућност да развијају вештине решавања проблема (Herdiana, Wahyudin & Sispiyati, 2017), што као последицу има тешкоће у решавању математичких проблема, посебно када се они јаве као део свакодневних, животних ситуација (Ramdhani et al., 2017). Такође, у настави математике у којој доминира предавачка активност учитеља, мотивација ученика за учење је ниска, а њихова пажња није фокусирана. „Учитељи често не подстичу ученике да уочавају релевантност садржаја који уче за ситуације у свакодневном животу, да комуницирају и решавају проблеме, што доводи до недовољног развоја стратегија учења“ (Kistian et al, 2017: 2). Осим тога, многи ученици математику доживљавају као тежак и досадан предмет, што води негативним ставовима према математици и ниској самоефикасности у овој области (Ramdhani et al., 2017).

У *Плану и програму наставе и учења за први циклус основног образовања* (2017) као један од циљева изучавања предмета математика наводи се оспособљавање ученика за примену стеченог знања у даљем школовању, као и за решавање проблема у свакодневном животу. Математика као школски предмет има битну образовну улогу, јер „код ученика развија способности логичког мишљења, аналитичност, систематичност, критичност и креативност“ (Kistian et al., 2017: 1). Овакве интенције су у складу са интенцијама које истичу савремене реформе у области наставе математике које су фокусиране на два аспекта:

1) исход наставе математике треба да буде постизање дубоког појмовног разумевања и процедуралног знања математике;

2) настава математике треба да подстакне активност ученика у наставном процесу коришћењем иновативних наставних техника (Krajcik, McNeill & Reiser, 2008).

Поменуте интенције су посебно важне у настави алгебре, где је разумевање императив учења. Можемо поставити питање: *Који модалитет наставе математике може да води ка остварењу оваквих идеја у настави алгебре?* Имајући у виду поставке и карактеристике учења путем открића, можемо претпоставити да управо овај модел учења може да допринесе остваривању претходно наведених циљева. То, пре свега, из неколико разлога:

1) омогућава активност ученика у процесу учења;

2) самостално истраживање и откривање утиче на дуготрајно задржавање наученог;
3) самостално откриће утиче да се научено ефикасно примењује у другим ситуацијама;
4) коришћење стратегија откривања код ученика развија разумевање научног метода;
5) ученици уче да самостално размишљају и решавају проблеме, што се преноси и на свакодневни живот (Maarif, 2016: 115–116).

Примена поступака заснованих на открићу у настави математике развија интересовање ученика за математику и способност математичког мишљења (Weimer, 1974). Истраживања показују да способност резоновања има важну улогу у успеху ученика у математици. Ученици који имају развијене способности резоновања и решавања проблема имају добар успех у математици (Maarif, 2016). Из тог разлога настава заснована на учењу путем открића, која управо подстиче способности резоновања и решавања проблема, има значајну улогу у учењу садржаја алгебре.

У току учења путем открића ученици су у потпуности укључени у наставни процес, мотивисани да истражују и презентују своје идеје. Примена овог наставног метода наглашава комбиновање појмова, принципа и правила ради решавања проблема. Учење путем открића води јаснијем и дубљем разумевању појмова. Улога учитеља у наставном процесу који се заснива на открићу јесте да за ученике креира проблемске ситуације, те да их упознаје са чињеницама, условима и примерима који приказују појмове и принципе које је потребно открити. Учитељ усмерава ученике да самостално проналазе идеје и појмове у наставном садржају, те да их примењују за решавање проблема. „Активности ученика у наставном процесу заснованом на открићу наликују истраживачким активностима какве предузимају експерти у науци“ (Kistian et al, 2017: 9). На овај начин ученик је у ситуацији да самостално уочи везе између елемената проблемске ситуације, између познатих и непознатих величина, постепено их пребацује на план симболике и при томе све то разуме. У читавом процесу открића доминантна је активност ученика и његов стваралачки и проналазачки чин, за разлику од пасивног примања информација, добијања готових правила, симболичких генерализација и друго. Ученик може уочити правила, генерализације само ако је све делове уклопио у целину, чврсто их повезао, и ако их добро разуме.

Улога учитеља у процесу учења путем открића у настави математике јесте значајна. Од њега се, између осталог, очекује да поседује способност да креира наставне ситуације које подстичу ученике да буду активни и креативни, и које повећавају мотивацију за учење (Kistian et al, 2017). Улога учитеља као извора информација знатно је мања у односу на улогу учитеља који ће водити и усмеравати ученике на путу откривања нових знања.

Многи учитељи, међутим, не уочавају потребу за активирањем ученика у настави математике, будући да и сами математику схватају као статичну дисциплину у чијем језгру је комплексан систем правила. Истовремено, у образовном систему у којем се успех ученика процењује стандардизованим тестовима, учитељи често занемарују развој математичког резоновања и способности решавања проблема, јер припрему ученика за полагање тестова виде као приоритет свог наставног рада (Desimone, 2009). Примена метода заснованог на открићу у настави математике подразумева промену фокуса учења са проналажења једног тачног решења на процес решавања проблема, што истовремено значи и потребу за променом у ставовима и методама рада учитеља, што пред саме учитеље, али и ученике, поставља изазов (Hoffman, 2013). Учење путем открића пружа учитељима могућност да обликују наставни процес на начин да код ученика подстакну разумевање математичких садржаја и развој способности решавања математичких проблема (Herdiana et al., 2017).

Учење путем открића у настави алгебре мора бити добро припремљено и прилагођено актуелним могућностима и способностима ученика. Само презентовање математичких проблема и подстицање ученика да самостално трагају за решењем неће нужно довесто до учења (Garelick, 2009). Гарелик наглашава да проблемски задаци који нису прилагођени могућностима ученика не воде стицању активног и применљивог знања. Аутор истиче да у настави математике која се заснива на откривању задаци морају бити добро формулисани, да код ученика не изазивају збуњеност, те да буду одабрани тако да се њихова тежина постепено повећава, односно да се ученици подстичу да сазнања из једноставнијих задатака користе за решавање сложенијих. Овако структуирана настава путем открића, према схватању овог аутора, има значајну улогу у развоју и образовању, јер пружа ученику потребно подупирање (Garelick, 2009).

Истраживање ауторке Малешевић је показало да учење путем открића у почетној настави математике има следеће позитивне ефекте: „овај облик учења је подстицајан, јер се на почетку учења истиче циљ учења чиме се активирају мотиви ученика; ученици схватају смисао градива; знања су трајнија, квалитетнија и већи је њихов трансфер; развија се правилно расуђивање; ученици се оспособљавају за самообразовање и развијају у складу са индивидуалним способностима; учење постаје део унутрашњих мотива, учи се за себе, а не за оцену; код ученика се развија самосвесност о својим способностима“ (Малешевић, 2011: 10).

Пасивност ученика у процесу учења алгебарских садржаја, која подразумева просто меморисање формула, без суштинског разумевања појмова који се уче, онемогућава ученике да касније примењују научено, те значајно смањује интересовање за математику. Како је један од основних циљева наставе математике да се ученици оспособе и подстакну да научено примењују у пракси и свакодневном животу, учење путем открића би требало да заузме значајно место у процесу математичког образовања, а посебно у учењу алгебре. Стога ће у даљем разматрању детаљније бити приказане могућности примене овог облика рада у настави алгебре у млађим разредима основне школе.

3.2. Модалитети учења путем открића у учењу садржаја алгебре

У литератури постоје различити модалитети учења путем открића. Аутори Инам и Хаџар су предложили модел учења путем открића у оквиру којег процес истраживачке делатности ученика пролази кроз више фаза:

1) Презентовање стимулуса – наставник презентује ученицима садржај који је повезан са материјалом који је предмет учења, а који је дат у форми параграфа текста, слике или практичне ситуације.
2) Идентификовање проблема – ученици добијају задатак да идентификују све могуће проблеме који постоје у датој ситуацији. На овај начини они развијају дивергентно мишљење, вештине постављања питања, тражења информација и формулисања проблема.
3) Прикупљање информација – трагање за информацијама потребним за решавање проблема, ученици вежбају да буду селективни и тачни у избору релевантних информација, те да формулишу алтернативне начине за решавање проблема, у случају да изабрани модел не доведе до решења.

4) Обрада информација – у овој фази ученици истражују примену концептуалног знања у свакодневним животним ситуацијама. Ова активност обучава ученике да размишљају логично и да примењују научено.

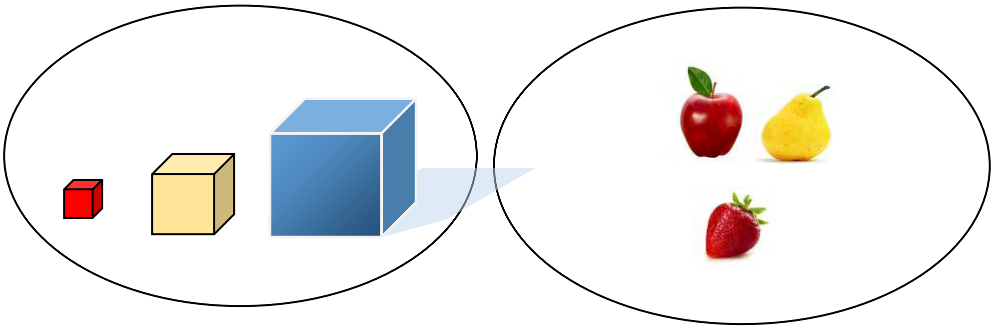
5) Верификација – ученици проверавају решење ангажујући се у различитим активностима, на пример, кроз дискусију са вршњацима или тражењем релевантних информација које могу да потврде или оповргну решење из различитих извора.

6) Закључивање – у овој фази ученици треба да генерализују закључке до којих су дошли на сличну ситуацију или проблем. На овај начин се подстиче развој метакогнитивних стратегија (In'am & Hajar, 2017: 59).

Као посебно важне за почетну наставу математике, Малиновић Јовановић и Малиновић издвајају следеће модалитете: *откривање чињеница (података) посматрањем, откривање појмова, откривање дефиниција, критичко читање и преиспитивање података, решавање проблема практичном активношћу* (Malinović Jovanović i Malinović, 2013: 86). Ове модалитете ћемо детаљније представити и на конкретним примерима садржаја алгебре показати моделе учења путем открића.

Суштина модела *откривање чињеница (података) посматрањем* јесте да се посматрањем објеката (предмета и појава) откривају њихова својства, издвајају карактеристична својства, апстрахују небитна и уочавају заједничка за све посматране објекте. Посматрање представља први корак у процесу формирања појма и уопште учења. Само посматрање је основа за даљу мисаону обраду. У овом процесу активност ученика је доминантна. Циљ је да ученик открије суштинска својства посматраних објеката и врши генерализацију. Како процес учења у почетној настави математике започиње посматрањем, овај модел има значајну улогу у том процесу.

Приказаћемо примену овог модалитета учења на примеру изграђивања појма једнакости. Како би ученик могао да разуме и правилно схвати остале алгебарске појмове, неопходно је да, пре свега, схвати појам једнакости као појам којим се изражава једнакобројност. Развијање овог појма је могуће помоћу посматрања конкретних скупова, уз захтев да ученици посматрају дате скупове, уочавају и упоређују њихова својства и да открију својства која су заједничка за посматране скупове (Слика 1).



Слика 1. *Пример два једнакобројна скупа*

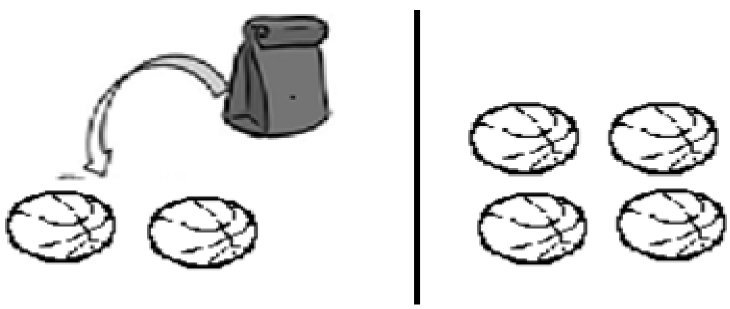
Посматрањем представљених скупова ученици закључују да су то скупови различитих елемената (различита боја, величина, врста), а заједничко им је то што се у обама скуповима налазе по три елемента. Након што се ученицима покаже још неколико примера еквивалентних скупова, учитељ их усмерава да кроз процес апстракције занемаре све разлике у карактеристикама елемената скупова, при чему генерализују бројност елемената у скуповима као карактеристично својство. Дакле, сопственом активношћу и процесом откривања ученици увиђају да посматрани скупови имају исти број елемената, тј. еквивалентни су по бројности. Еквивалентност, потом, изражавамо помоћу симбола „=“, па претходно констатовану једнакост симболички записујемо 3 = 3.

Суштина модалитета *откривање појмова* се састоји у томе да „ученици самостално изграђују појмове путем открића, односно откривају битна својства која ће их довести до појма. Да би се то постигло, потребно им је предочити одговарајуће податке и чињенице и поставити им права питања“ (Malinović Jovanović i Malinović, 2013: 87). За разлику од појмова који су механички усвојени, појмови алгебре које су ученици самостално открили и изградили усвајају се са разумевањем, ученици их дуже памте и могу их примењивати у новим ситуацијама и повезивати са другим појмовима.

Овај модалитет учења путем открића можемо илустровати кроз пример развијања појма непознате. Наиме, појам непознатог броја ученици треба да схвате као број који је тренутно непознат, а не као непостојећу вредност.

Полазимо од примера који одсликава реалну ситуацију из свакодневног живота (Пример 1).

Пример 1: *Колико лопти је додато из торбе?*



Слика 2. *Развијање идеје непознатог броја*

Ученик треба да уочи шта је непознато у задатку. На идеју непознатог броја указује слика торбе у којој се налазе лопте, али је број лопти у торби непознат (Слика 2). Такође, слика сугерише да се лопте из торбе додају осталим лоптама. На основу другог дела слике ученик увиђа односе о количинама представљеним на слици, генерализује ситуацију представљену на слици и закључује да може записати једнакост у којој би непозната представљала један од сабирака.

$$2 + \square = 4$$

Непознати број у овом математичком запису представили смо преко „држача места“, док се његова симболизација одвија касније.

Вредност непознатог броја ученици одређују користећи претходно искуство са сабирањем бројева; тачније, треба да открију који то број треба додати броју 2 да би добили број 4.

У оквиру модалитета *откривање правила* ученици пролазе кроз сазнајни процес, након чега се изводи одређено правило, при чему га ученици усвајају са разумевањем. Значај учења путем открића у учењу правила алгебре огледа се у самосталном откривању, схватању суштине правила и примени истог у другим ситуацијама.

Овај модалитет учења путем открића илустроваћемо кроз пример откривања правила о решавању једначина са непознатим умањеником.

Полазимо од реалне ситуације која се може представити записивањем једначине са непознатим умањеником (Пример 2).

Пример 2: *Марија је од свог џепарца купила атлас чија је цена 1200 динара. Остало јој је 1000 динара. Колико износи Маријин џепарац?*

Дату ситуацију можемо представити идеографом.

x	
1200	**1000**

Ученици посматрају слику и записују одговарајућу једначину: $x - 1200 = 1000$, а затим их хеуристички водимо до решења. Упућујемо ученике да на основу идеографа уоче везу између компонената и открију начин на који се може израчунати вредност x. Тачније, посматрањем откривају да се непознати умањеник одређује везом сабирања и одузимања.

$x =$ _______+________

$x =$ ______

На крају ученици апстрахују конкретан пример и генерализују начин решавања једначина са непознатим умањеником исказујући га кроз правило: *Непознати умањеник је једнак збиру умањиоца и разлике.*

Суштина модалитета *критичко читање и преиспитивање података* јесте у захтеву да се сваки задатак анализира и схвати, тј. „увиди шта је у њему дато, и да се открије шта се тражи (тј. шта је непознато)" (Malinović Jovanović i Malinović, 2013: 87), уз проверу тачности решења, ако за то постоји могућност. Недовољно анализирање података од стране ученика доводи до тога да многи математички задаци остају нејасни или погрешно урађени. Тиме се смањује ригидност и подстиче се аналитичност у мишљењу ученика. Овај модалитет учења путем открића илустроваћемо примером задатка који се односи на решавање неједначине (Пример 3).

Пример 3: Стева је током годину дана сваког месеца штедео исту суму новца. Пребројао је новац и утврдио да има довољно пара да купи комплет књига који кошта 4800 динара, али нема довољно пара за комплет књига који кошта 6600 динара. Колика би могла бити Стевина месечна уштеђевина?

Ученици се упућују на анализу садржаја задатка и увиђање познатих и непознатих елемената, односа и веза међу њима и разјашњавања значења сваке речи. Познато је да је Стева штедео годину дана, да је имао довољно пара да купи комплет књига који кошта 4800 динара, али није имао за комплет књига од 6600. Непознат је износ Стевине месечне уштеђевине. Ученици се затим упућују на састављање одговарајуће неједначине. Пошто је Стева штедео годину дана исту суму новца, то значи да је штедео током 12 месеци, па укупна годишња уштеђевина износи $12 \cdot x$. Како је Стева, из услова задатка, имао довољно новца за куповину књига од 4800 динара, ученици треба да закључе да је укупна Стевина уштеђевина већа или једнака 4800 динара, тј. $12 \cdot x \geq 4800$. Пошто Стева није имао новца за куповину књига од 6600 динара, то ученици треба да закључе да је његова укупна уштеђевина мања од 6600, тј. $12 \cdot x < 6600$. Обједињавањем претходних неједначина добијамо двоструку неједначину: $4800 \leq 12 \cdot x < 6600$. Након решавања неједначине и одређивања скупа решења ученици треба да провере тачност решења.

Модалитет *решавање проблема практичном активношћу* огледа се у постављању захтева пред ученике да шематски прикажу, измере, изврше упоређивање или друге практичне активности како би открили поступак решавања и дошли до решења задатка (Malinović Jovanović i Malinović, 2013: 87). Као пример овог модалитета учења путем открића наводимо манипулацију конкретним материјалом путем које ученици треба да открију поступак решавања једначина са непознатим сабирком.

Ученицима показујемо затворену кутију и говоримо им да се у њој налазе сличице. Пошто је број сличица у кутији непознат, означићемо га неким словом као ознаком за непознати број, нпр. x. Потом у кутију стављамо још 20 сличица. Један ученик пребројава све сличице које се налазе у кутији и закључује да укупно има 45 сличица. Ученике усмеравамо да открију односе и запишу одговарајућу једнакост на основу изведене практичне активности. Закључују да једнакост има облик: $x + 20 = 45$.

У овој једнакости је непознат први сабирак. Како би ученици открили поступак израчунавања непознатог сабирка, усмеравамо их подстицајним питањима: *Како можемо да израчунамо број сличица које су биле у кутији, ако знамо да је након додавања 20 сличица у кутији укупно било 45 сличица*? Ученици закључују да је потребно од укупног броја сличица одузети број сличица које смо додали у кутију и записују: $x = 45 - 20$, $x = 25$. Дакле, непознати сабирак се израчунава тако што се од збира одузме познати сабирак.

У претходном тексту су представљени различити модалитети учења путем открића. Избор модалитета зависи од постављеног циља у настави математике, карактеристика ученика, природе садржаја који се учи и др. Постојање разних модалитета указује на то да се учење путем открића може применити на свим садржајима алгебре, и то посебно у процесу учења, односно при формирању појмова, уочавању и долажењу до правила, законитости и дефиниција, али и у процесу оспособљавања ученика за решавање проблема и развијање способности критичког и стваралачког мишљења.

3.3. Диференцијација садржаја почетне наставе математике – потребе за диференцирањем, појмовно одређење и облици

Основни циљ образовања јесте да се свим ученицима омогући да максимално развију своје потенцијале. Достизање овог циља није могуће без уважавања индивидуалних разлика међу ученицима. Наиме, сваки ученик представља специфичну јединку, која се од других ученика разликује у погледу нивоа оствареног когнитивног, емоционалног и социјалног развоја, мотивације, нивоа аспирације, интересовања, стилова учења, као и према социјалном и економском контексту из којег потиче, претходним искуствима и многим другим обележјима. Једнако квалитетно образовање за све ученике, стога, не може подразумевати истоветан наставни рад са свима, с обзиром на то да се увек ради о веома хетерогеној групи индивидуа (Lubart, 2004).

Индивидуалне разлике међу ученицима које су кључне за наставни процес јесу, пре свега, у погледу интелектуалне способности, нивоа постигнућа – нивоа претходног знања, пола, стилова учења, етницитета и културе (Huitt, 1997). Индивидуалне разлике међу ученицима, између осталог, постоје у погледу когнитивних и конативних карактеристика и могу бити како квантитативне, тако и квалитативне. На пример, ученици се у квантитативном смислу разликују у погледу темпа когнитивног развоја, брзине и дубине учења. Истовремено, постоје и конативне разлике, па се ученици тако разликују у погледу степена аутономије, мотивације за постигнућем, толеранције неизвесности, испитне анксиозности и слично. Такође, ученици се разликују у погледу когнитивних стилова, односно стилова учења које преферирају (Lubart, 2004). Треба нагласити, да поред интериндивидуалних разлика, односно разлика које постоје између ученика, можемо говорити и о интраиндивидуалним разликама које се тичу варијација унутар самог ученика у различитим наставним областима (Lubart, 2004), а које су од значаја за планирање и организовање наставе.

Квалитетан и ефикасан наставни процес подразумева да учитељи приликом организовања наставе узимају у обзир бројне разлике међу ученицима. Ученици се не могу посматрати као хомогена група, с обзиром на бројне разлике које постоје између њих као индивидуа. Из тог разлога, настава која није прилагођена постојању ових варијација негативно ће утицати на постигнуће ученика (Kubat, 2018). То потврђује и истраживање које су спровели Ефклидис и сарадници (Efklides, Papadaki, Papantoniou & Kiosseoglou, 1999), у коме је испитиван утицај индивидуалних разлика између ученика на успешност у математици и на доживљај тежине математичких задатака. У студији је показано да разлике у когнитивним способностима ученика имају директан утицај на успешност, док је доживљај тежине задатака под утицајем способности, али и афективних карактеристика, као што су анксиозност и потреба за постигнућем.

Истраживање које је спровео Адамс (Adams, 2007), такође, показује да радна меморија има значајну улогу у решавању математичких проблема, односно да индивидуалне разлике у погледу ефикасности радне меморије утичу како на процесирање математичких информација, тако и на њихово задржавање, односно прелазак у дуготрајну меморију. Ученици који имају снижено функционисање радне меморије приликом решавања математичких задатака суочавају се са проблемима попут заборављања упутства и тешкоћама у праћењу редоследа. У настави математике са децом која имају тешкоћа са запамћивањем корисно је употребљавати помоћна средства која олакшавају запамћивање (нотесе, калкулаторе), редуковати сложеност инструкција, те охрабривати ученике да препознају своја ограничења и учити их да усвајају нове стратегије, попут тражења помоћи.

Према традиционалном концепту Коменског, ученици се организују у одељења по календарском узрасту због претпоставке да су ученици истог узраста приближно једнаки у погледу способности. Ипак, у пракси се испољавају значајне разлике између ученика истог календарског узраста, што је подстакло трансформацију традиционалног фронталног рада ка индивидуализованој настави (Вилотијевић и Вилотијевић, 2008). Појава разредно-часовног система доводи до бројних противречности у настави, међу којима је посебно истакнут несклад између фронталног рада и индивидуалног учења, што је отворило потребу за усклађивањем наставе са индивидуалним особеностима ученика (Шпановић, 2011).

Дјуи, као представник прагматизма, наглашава да базично искуство настаје путем активности појединца, те да циљеви васпитања морају бити утемељени на унутрашњим потребама појединаца које васпитавамо, зависно од њихових способности (Дјуи, 1934, према: Шпановић, 2011).

За разлику од класичне наставе која је усмерена на „просечног“ ученика, односно у оквиру које су сви ученици, без обзира на разлике, подучавани на исти начин, индивидуализована настава, која заузима све важније место у савременој школској пракси, представља „дидактички систем у којем се наставни захтеви усклађују са индивидуалним могућностима ученика; они уче самостално, а њихов рад се континуирано прати“ (Lazarević, 2005: 48).

У литератури се могу пронаћи бројна одређења индивидуализоване наставе. Тако је у *Педагошком речнику* синтагма *индивидуализована настава* одређена као „настава у којој се, при остваривању задатака наставе, води рачуна не само о просеку ученика одређеног узраста него и о индивидуалним разликама појединих ученик или групе ученика (просечни, натпросечни, исподпросечни), и према нивоу развијености и темпу напредовања у учењу одмеравају и подешавају захтеви, задаци, методе, поступци и темпо рада“ (*Педагошки речник,* 1967: 362).

Према схватању Ј. Ђорђевића, „индивидуализовати наставу значи оријентисати се на реалне типове ученика, узети у обзир разлике међу њима, ускладити и варирати методе и поступке педагошког деловања према тим разликама, помоћи ученицима да напредују према властитом темпу и могућностима“ (Ђорђевић, 1997: 394). „Индивидуализација наставе је, у ствари, прилагођавање дидактичких активности ученицима, али се при томе води рачуна о њиховим индивидуалним особеностима, што заправо значи да треба подстицати активност појединца на путу његовог развоја“ (Trnavac, Đorđević, 1998: 230). Према мишљењу П. Мандића, индивидуализована настава „претендује да задовољи психолошке способности, општа и специјална интересовања, индивидуалне трендове развоја и личне карактеристике појединца“ (Mandić, 1972: 49).

Из претходних одређења можемо закључити да се схватања различитих аутора о индивидуализованој настави битно и суштински не разликују. Сви се они слажу да индивидуализована настава представља такву дидактичку организацију наставног рада у којој се наставни захтеви прилагођавају индивидуалним могућностима, потребама и интересовањима ученика. Оваква организација наставе подразумева да учитељи упознају индивидуалне разлике међу ученицима, уз континуирано праћење ученика и вођење одговарајуће документације о томе.

Теоријску заснованост индивидуализоване наставе налазимо у когнитивним теоријама, које у први план истичу значај менталних структура ученика, њихова предзнања, као и поступак овладавања новим појмовима. Како се ученици разликују између себе у погледу претходних знања и изграђености менталних структура, Пијаже истиче да је, у циљу успешног образовања, неопходно да учитељ прилагоди организацију наставе узимајући у обзир интелектуални и социјални ниво ученика. Слично, Брунер наглашава да се педагошки поступци и методе рада одређују према карактеристикама ученика (Lazarević, 2005). Индивидуализована настава је утемељена и на теорији развоја Виготског. Овај аутор истиче значај социјалне интеракције у наставном процесу која има конструктивну функцију у процесу стицања знања. Ова теорија истиче важност сарадње у процесу учења, путем концепта зоне наредног развитка – „оно што дете уради у сарадњи, у следећем тренутку ће урадити самостално“ (Шпановић, 2011: 505). У том процесу је значајна улога учитеља који треба да, на основу процене развијености психичких функција за сваког појединог ученика, задаје примерене захтеве како би сваки ученик што брже овладао зоном наредног развоја. Виготски заступа став да учење иде испред развоја, а организација наставе би требало да подстиче развој и формирање оних мисаоних функција које су у зони наредног развоја, тј. које тек треба да се појаве (Вилотијевић, 2000). Само уколико су ослоњене на индивидуалне могућности ученика, активности у зони наредног развитка јесу развојно подстицајне.

Педагошка пракса указује на бројне предности индивидуализације наставе, а неке од њих су:

– развијање способности ученика за самостални рад и критичко сагледавање сопствених радних способности;
– индивидуализованим радом се поспешују сложенији облици интелектуалног рада, као што су решавање проблема, истраживачки рад и слично;
– индивидуализовани начин рада подстиче рад ученика који је усклађен са њиховим темпом;
– ученици постају независни у процесу учења;
– обезбеђује различите прилазе настави, избор наставног материјала, метода рада и сл., који највише погодују ученицима;
– после сваке активности ученик добија повратну информацију, што ученике подстиче за рад;
– стимулише ученике да раде самостално, истраживачки и креативно (Simić, 2015: 90).

Организациона структура часа који је припремљен у складу са принципима индивидуализоване наставе обухвата три фазе: припремну, оперативну и верификативну (Вилотијевић и Вилотијевић, 2008: 64; Simić, 2015: 85; Marković, 2005: 62; Lazarević, 2005: 52).

У припремној фази учитељ идентификује индивидуалне разлике између ученика, одабира садржаје који ће бити обрађени на индивидуализован начин, бира облик индивидуализације, припрема и планира час и одабира готови или израђује нови дидактички материјал за рад (Lazarević, 2005: 52). За идентификовање индивидуалних особености ученика могу се користити различите технике. Ничковић и Продановић наводе следеће облике идентификовања:

– „помоћу наставниковог посматрања и праћења развоја ученика и докумената које наставник води у том циљу, као нпр. ученички досије, белешке, протокол;
– на основу писмених и усмених облика изражавања ученика, као нпр. писмени задаци, домаћи задаци, писмене вежбе, предмети у практично-техничкој делатности и друго;
– помоћу инструмената објективног вредновања, као што су тестови знања и извршења, тестови различитих способности, скале тестова, скале преференција, упитници, инвентари радних навика, интервју и друго“ (Prodanović i Ničković, 1974: 394).

У другој, оперативној фази одвија се индивидуализована настава, што подразумева самостални рад ученика, прилагођен њиховим могућностима. Индивидуализована настава подстиче аутономију ученика, развија осећање одговорности за сопствено постигнуће, креативност и активност (Marković, 2005).

У фази верификације учитељ прикупља податке о оствареним резултатима рада и вреднује индивидуални рад ученика (Lazarević, 2005: 52).

Индивидуализација наставе представља императив савременог математичког образовања. У условима нашег школског система, услед преобимних наставних садржаја и великог броја ученика у одељењу, прилагођавање наставе индивидуалним способностима сваког појединог ученика готово је немогуће остварити. То значи да у оваквим околностима потпуна индивидуализација није најпогоднији облик индивидуализације. Како се у сваком одељењу могу формирати групе ученика сличних или истих спрособности, знања, интересовања и друго, много је делотворније и рационалније спроводити диференцијацију, тј. прилагођавање наставе особеностима ових група ученика.

Уколико би настава математике подразумевала само наставне садржаје у елементарној форми и базичне захтеве, на овај начин способности просечних и натпросечних ученика не би могле бити развијене, а њихова мотивација за учење би била веома ниска. Истовремено, прилагођавање наставе просечним ученицима имало би негативне утицаје како на слабије, тако и на ученике са бољим успехом из математике, с обзиром на то да би мотивација и једних и других била веома ниска. Прва група би била демотивисана услед превеликих захтева и немогућности да постигне успех, док би група изнадпросечних ученика била демотивисана услед прениских захтева. Имајући на уму све наведено, индивидуализација наставе, која се реализује диференцирањем, оправдано се сматра најефикаснијим обликом наставе, јер омогућава развој способности свих категорија ученика, уважавајући њихове индивидуалне особености (Andrić i Ćirović, 2013). Индивидуализација наставе математике подразумева добро познавање одлика ученика и диференцирање наставе (Petrović, Mrđa i Lazić, 2010).

Диференцирање наставе „подразумева груписање ученика по одређеним својствима по којима су слични, као што су способности, претходна знања, искуства и интересовања, темпо учења, ставови према учењу и спремност ученика за учење“ (Вилотијевић и Вилотијевић, 2008: 60). Диференцијација наставе се односи и на „структуирање садржаја према својствима ученика интегрисаних у исте групе“ (Malinović Jovanović i Malinović, 2013: 78).

Неки аутори изједначавају појмове индивидуализације и диференцијације наставе, док други аутори диференцијацију одређују као посебан наставни систем.

У *Енциколопедијском рјечнику педагогије* (1963) под диференцијацијом наставе се подразумевају „разноврсни облици поделе рада у настави у сврху ефикаснијег усклађивања школовања са специфичним физичким и психичким особинама појединих ученика“ (наведено према: Лакета и Василијевић, 2006: 177).

„Диференцирана настава подразумева организациона и методичка настојања да се уваже разлике међу ученицима и да се на темељу тих разлика ученици групишу по одређеним сличним особинама (интелектуални ниво, интересовања, претходна знања, темпо учења, ставови према учењу, мотивација за учење и др.) како би се омогућио оптимални развој сваког појединца“ (Дејић и Егерић, 2003: 343).

Резимирајући становишта већег броја дидактичара, Ђорђевић закључује да „диференцијација означава низ друштвених, школских, наставних и организационих мера, помоћу којих школа покушава да одговори на различите способности и интересовања ученика, као и на могуће захтеве друштва“ (Ђорђевић, 1981: 122).

Ова врста наставе је заснована на неколико уверења:

– ученици истог узраста између себе се разликују у погледу бројних карактеристика – спремност за учење, интересовања, стилови учења, претходна искуства, животни контекст различити су код различитих ученика;
– индивидуалне разлике између ученика имају значајан утицај на њихове образовне потребе;
– ученици најбоље уче када имају могућност да праве везе између курикулума и личних интересовања и животних искустава;
– основна улога школе јесте да омогући пун развој потенцијала сваког детета (Tomlinson & Imbeau, 2010).

Говорећи о односу индивидуализоване и диференциране наставе, Шпановић (2011) наводи да је диференцијација шири појам од индивидуализације, истичући да је индивидуализација један од могућих критеријума за разврставање ученика по групама. У вези с тим, Ђорђевић истиче да: „Што се настава више оријентише на потребе и способности појединих ученика, диференцирање се више приближава индивидуализацији“ (Ђорђевић, 1981: 123). Диференцираном наставом се уважавају преовлађујућа својства групе ученика (Гусев, 2003), и „не може се говорити о правилном диференцирању наставе, ако се оно не прилагођава захтевима индивидуализације“ (Ђорђевић, 1981: 123).

Закључујемо да се диференцијацијом узимају у обзир разлике између појединих група ученика, док се индивидуализацијом респектују и индивидуалне разлике сваког појединог ученика.

Диференцијација наставе се односи на сет стратегија које учитељи користе како би обезбедили да ученици са различитим карактеристикама буду укључени у наставни процес. Кроз развој школства су се јављали бројни покушаји диференцирања на основу различитих критеријума: „диференцирање према предметима, способностима, полу, интересовањима, стилу учења“ (Вилотијевић и Вилотијевић, 2008: 60).

Према мишљењу Томлинсонове и Стрикландове, постоји неколико критеријума на основу којих је могуће диференцирати наставу:

1. Садржај – подразумева варирање тежине и сложености захтева и начина на који се садржај презентује ученицима. Садржај се може диференцирати тако што се материјал за учење приказује у различитим формама, на пример, аудитивно и визуелно, или тако што ученици добијају различите задатке у вези са истим садржајем.

2. Процес – односи се на диференцирање начина на који ученици стичу знања. Диференцијација процеса је могућа варирањем степена подршке коју ученици добијају и извора садржаја, при чему је од кључне важности да се обезбеди да сви ученици стекну потребна базична знања.

3. Производ – односи се на диференцирање начина на који ученици демонстрирају шта су научили.

4. Средина – подразумева диференцирање средине у којој се учи; на пример, уређивањем организације рада тако да у учионици постоје места на којима ученици раде самостално и места која су предвиђена за групни рад.

5. Афекти – подразумева диференцирање афективне климе у учионици, тј. прилагођавање наставе афективним компетенцијама ученика. (Tomlinson & Strickland, 2005: 7–15).

У нашој литератури, диференцирање наставе се најчешће дели на спољашњу, унутрашњу и флексибилну диференцијацију (Дејић и Егерић, 2003; Дејић и Милинковић, 2012).

Спољашња диференцијација се односи на „размештање ученика у хомогене групе за учење или разреде на основу способности, знања или других обележја“ (Вилотијевић и Вилотијевић, 2008: 60). У питању су групе „бољих или слабијих ученика који су административно-технички подељени, са различитим наставним циљевима, садржајима и различитим даљим образовним могућностима“ (Дејић и Егерић, 2003: 344). Спољашња диференцијација је често критикована форма диференцијације наставе, с обзиром на то да овај облик диференцијације може негативно да утиче на динамику и интеракцију у групи, тако да се у многим школама одустало од њене примене (Simić, 2015).

С друге стране, унутрашња диференцијација се односи на „структуирање садржаја, захтева и задатака који се заснивају на поштовању различитих способности, претходних знања и других својстава ученика интегрисаних у заједничке групе" (Вилотијевић и Вилотијевић, 2008: 62). Дорофејев, Кузњецова и др. (1990) суштину унутрашње диференцијације виде у настави организованој „у једном одељењу, по истом програму и уџбенику, при чему ученици могу да усвајају садржаје на различитим нивоима" (према: Дејић и Милинковић, 2012: 100). Унутрашња диференцијација задатака доприноси остваривању захтева које поставља индивидуализована настава, задржавају се природне, хетерогене наставне групе које делују повремено и краткотрајно. Код ове форме диференцијације нема хомогених одељења, већ се групе ученика формирају од различитих појединаца. Овакав облик диференцијације наставе је заступљен у нашим школама (Дејић и Егерић, 2003).

Флексибилна диференцијација подразумева комбинацију хомогених и хетерогених наставних група. „Значајан део наставе се реализује у хетерогеним групама, док се преостали део наставе организује у мањим, хомогеним групама, у које су укључени ученици сличних способности или интересовања" (Дејић и Милинковић, 2012: 100).

На основу карактеристика наведених облика диференцијације, а имајући у виду услове рада у школи и социопсихолошке тешкоће које произилазе из саме спољашње диференцијације, запажамо да спољашња диференцијација није погодна за примену у почетној настави математике. С обзиром на то да структуру одељења у нашим школама чине ученици просечних, исподпросечних и натпросечних способности, за оптимални развој и ангажовање свих наведених категорија ученика у настави математике погоднија је садржајна диференцијација, као један од видова унутрашње диференцијације. Код овог облика диференцијације „основни циљеви и задаци наставе математике не подлежу диференцијацији, већ само обим, дубина, степен тежине, сложености и апстрактности наставног садржаја, као и темпо и начин усвајања градива" (Дејић и Егерић, 2003: 344). Егерић истиче да ће „диференцијацијом садржаја, метода, облика и средстава, уважавањем темпа учења и индивидуализованим приступом наставник допринети остваривању заједничких циљева и задатака васпитно-образовног процеса" (Егерић, 2004: 25). Слично, Цех наводи да је једина могућност да се довољно уваже различите карактеристике појединачних ученика у „обимним садржајним диференцијацијама, повезаним са уобличавањем разумљивих материјала за учење више оријентисаним на самостално учење" (Zech, 1999: 47).

Како би васпитно-образовни циљеви и задаци остали непромењени, један од основних захтева приликом диференцирања програмских садржаја у настави математике јесте да „сви ученици морају достићи одређени ниво знања неопходан за даљи лични развој" (Дејић и Егерић, 2003: 344; Дејић и Милинковић, 2012: 101). Дакле, диференцирана настава математике треба да буде заснована на чињеници да је диференцијацијом потребно обезбедити општи фонд знања који је потребан сваком ученику (Petrović i Mrđa, 2005). Овај захтев је веома важно поштовати у основном образовању, с обзиром на то да знања стечена у основној школи представљају основу стицања нових знања на каснијим нивоима образовања (Дејић и Егерић, 2003; Дејић и Милинковић, 2012). То значи да би приликом диференцирања у настави математике требало обезбедити „везу између градива, која су обавезна за све ученике и градива које задовољава индивидуалне потребе сваког ученика понаособ" (Маричић и Милинковић, 2015: 63).

Диференцијација наставе се углавном врши на три нивоа сложености, при чему су ови нивои прилагођени трима подгрупама ученика: исподпросечним, просечним и натпросечним. Први ниво диференцијације, стога, подразумева селектовање суштинског садржаја који треба да обезбеди минимални фонд знања код ученика. На следећем нивоу се издваја оптимални садржај који је прописан наставним програмом, док се на трећем нивоу фундаментални садржај проширује до дозвољеног максимума у наставном програму (Дејић и Милинковић, 2012: 101) „Садржаји наставне јединице морају одражавати логичку целину на сваком нивоу“ (Дејић и Егерић, 2003: 345), без обзира на то што су захтеви другачији за сваки дефинисани ниво. У вези са тим, у оквиру садржаја једне наставне јединице, требало би разрадити минимални, оптимални и максимални део програма (Дејић и Милинковић, 2012).

Код овог облика диференцијације од учитеља се захтева да, поред уважавања способности појединих категорија ученика, уважава и захтеве фронталног наставног рада. Међутим, „овај облик диференцијације се не огледа само у изради диференцираних захтева програмских садржаја, већ и у различитим приступима ученицима, различитим начинима мотивације, усмеравања итд.“ (Дејић и Егерић, 2003: 345).

Дакле, с обзиром на индивидуалне разлике између ученика, различитим нивоима захтевности, пружа се прилика сваком ученику да дође до неког закључка, да нешто увиди, научи итд. Тиме садржајна диференцијација у почетној настави математике омогућава ученицима да, у зависности од индивидуалних могућности, приступе садржајима на различитој дубини, у чему се огледа њен посебан значај.

С обзиром на тростепено остваривање садржајне диференцијације и дефинисаност стандарда постигнућа ученика на три нивоа, између њих се може уочити извесна повезаност. У тексту који следи биће разматране могућности садржајне диференцијације према израђеној операционализацији захтева за алгебарске садржаје која је урађена на основу образовних стандарда постигнућа ученика у почетној настави математике.

3.4. Полазишта за диференцијацију садржаја у настави алгебре у млађим разредима основне школе

Савремена настава математике подразумева уважавање разлика међу ученицима и прилагођавање рада њиховим индивидуалним карактеристикама. Будући да су одељења најчешће састављена од ученика просечних, исподпросечних и изнадпросечних способности, јавља се потреба за стимулацијом ради подстицања оптималног развоја свих ученика. Као једно од могућих решења, Дејић и Егерић (2003) предлажу унутрашњу садржајну диференцијацију у настави математике, која произилази из структуре одељења у нашим школама. Код овог облика диференцијацији подлежу „обим, дубина, степен тежине, сложености и апстрактности наставног садржаја, као и темпо и начин усвајања градива“ (Дејић и Милинковић, 2012: 101).

Један од основних захтева приликом диференцирања програмских садржаја у настави математике јесте да „сви ученици морају достићи одређени ниво знања неопходан за даљи лични развој“ (Дејић и Егерић, 2003: 344). Тачније, диференцирана настава математике треба да буде заснована на чињеници да је диференцијацијом неопходно обезбедити општи фонд знања који је потребан сваком ученику (Petrović i Mrđa, 2005).

Испуњење тог захтева олакшавају стандарди постигнућа који исказују „знања која ученици треба да усвоје на основном, средњем и напредном нивоу“ (Дејић, Миленковић, 2016: 16). Заправо, они прописују минималне компетенције које се очекују од ученика који постижу одређени ниво постигнућа (OECD, 2005).

Образовни стандарди постигнућа ученика представљају једно од решења за унапређивање квалитета наставе, учења и образовног система у целини. Глобалном реформском процесу заснованом на увођењу стандарда у образовни систем прикључила се и Србија. Ове активности су резултирале доношењем *Образовних стандарда постигнућа за крај првог циклуса основног образовања и васпитања,* 2011. године, и то за следеће наставне предмете: српски језик, математика и природа и друштво (Маричић, 2012).

Према одређењу у литератури, стандарди постигнућа подразумевају „ниво компетенција ученика, утврђене образовном политиком, које је могуће проверити применом објективних инструмената“ (Meyer 2004: 21). Тачније, „стандарди представљају суштинска знања, вештине и умења које ученици треба да поседују на крају одређеног циклуса образовања“ (Станојевић, 2010: 7). Према мишљењу Палекчића (2007), „образовни стандарди служе као референтни оквир за програмирање, организацију и извођење процеса поучавања и учења у школи и као основа за евалуацију постигнућа ученика“ (према: Маричић, 2012: 536).

Стандардима постигнућа за наставни предмет математика описани су исходи које ученик треба да оствари на сваком од нивоа когнитивних постигнућа (основни, средњи, напредни). Тако се очекује да ученик са основног нивоа постигнућа „влада појмовима бар у смислу њиховог разликовања на класи одговарајућих примера и распознаје и користи одговарајуће термине и ознаке. Уз помоћ интерпретација (сликом, узорним примерима и сл.) способан је за основно оперисање. Очекује се да ће сви ученици, а најмање 80% њих, постићи овај ниво“ (Станојевић 2010: 7). Ученик који остварује постигнуће средњег нивоа треба да „сам издваја одговарајуће примере и уме да истиче њихова карактеристична својства. Оперише са њиховим назнакама по правилима која процедурално изражава (тачно рачуна, правилно иконички (тј. путем слике) их представља и сл.) и притом има виши степен рачунске увежбаности. Очекује се да ће око 50% ученика постићи овај ниво“ (Станојевић 2010: 7). Ученик са напредног нивоа треба да „потпуно влада појмовима, оперише са њима по прихваћеним правилима која уме да исказује вербално (тј. путем природног језика) и симболички. Разуме хијерархију која успоставља односе међу појмовима по степену њихове апстрактности, уме да закључује на основу претпоставки које су формално исказане (разуме и сам изводи неке једноставније доказе) и достиже високи степен аутоматског извођења операција. Очекује се да ће око 25% ученика постићи овај ниво“ (Станојевић, 2010: 7). Ученици са различитих нивоа постигнућа разликују се по степену остваривања описаних компетенција. „Виши нивои знања подразумевају овладаност претходним нивоима у односу на дефинисани стандард“ (Дејић и Милинковић, 2012: 98).

Улога и допринос образовних стандарда постигнућа у почетној настави математике је вишеструка. Пре свега, „стандарди постигнућа ученика као образовна иновација имају за циљ да помогну учитељима у припремању наставе у којој ће се уважавати индивидуалне карактеристике ученика“ (Дејић и Милинковић, 2012: 15). Тачније, образовни стандарди би требало да „подстакну учитеље да стварају услове, креирају окружење које је прилагођено учениковим могућностима и усмерено на његов развој, одаберу садржаје, поступке, методе, облике рада и друго како би ученици на крају одређеног образовног нивоа поседовали знања одређеног нивоа квалитета“ (Маричић, 2012: 542).

„За разлику од наставе која је усмерена на образовне циљеве и задатке који су засновани на садржајима, њихово формулисање и постављање, стандарди захтевају наставу која је оријентисана ка исходима и провери да ли су постављени циљеви и задаци заиста и остварени“ (Маричић и Шпијуновић, 2014: 22). Како су образовни циљеви и задаци уопштено формулисани, стандардима постигнућа се они „преводе на много конкретнији језик који описује постигнућа ученика, стечена знања, вештине и умења“ (Станојевић, 2010: 7). Дакле, стандарди образовних постигнућа су усмерени искључиво на ученика и резултате учења и поучавања који се огледају у променама које настају код ученика. Међутим, њима се не исказује само која ће знања и вештине ученик усвојити, већ имају и значајну улогу у вредновању (Бауцал, 2013).

Хијерархијска дефинисаност (конкретизација) образовних стандарда на три нивоа постигнућа ствара услове за тростепену диференцијацију у складу с тим, при чему сваком нивоу стандарда постигнућа пристаје и одређени ниво тежине, сложености захтева и апстрактности наставног садржаја. Могућност диференцијације у складу са стандардима заснива се на томе да се према процени нивоа постигнућа могу поставити конкретни захтеви према ученику (Маричић, 2012). Односно, пред ученике се постављају квалитативно различити когнитивни захтеви у зависности од процењеног нивоа постигнућа.

„Значај припремања диференциране наставе математике помоћу стандарда постигнућа огледа се у подизању нивоа знања ученика, као и у развијању потенцијалних способности сваког ученика“ (Дејић и Миленковић, 2016: 15). Наиме, овим обликом наставе ученицима је омогућено да остваре захтеве и са виших нивоа сложености. Решавајући задатке са вишег нивоа, ученик је у прилици да стекне дубља знања. На тај начин се стварају услови за квалитетније и продуктивије математичко образовања. Дакле, диференцирана настава помоћу стандарда постигнућа пружа сваком ученику могућност за оптимални успех и развој који је усклађен са његовим индивидуалним способностима и потенцијалима.

У документу О*пшти стандарди постигнућа – образовни стандарди за крај првог циклуса обавезног образовања* (2011), у оквиру области *Природни бројеви и операције са њима,* одређени су исходи наставе математике за крај првог циклуса основног образовања за алгебарске садржаје, диференцирани на три нивоа когнитивних захтева.

„Основни ниво:

1МА.1.1.5. уме да решава једноставне једначине у оквиру прве хиљаде

Средњи ниво:

1МА.2.1.5. уме да решава једначине

Напредни ниво:

1МА.3.1.5. уме да одреди решења неједначине са једном операцијом“ (*Општи стандарди постигнућа – образовни стандарди за крај првог циклуса обавезног образовања – Математика,* 2011).

Уочавамо да су претходно наведени стандарди постигнућа за наставне садржаје алгебре глобални, непрецизни и дају само опште напомене о потребним постигнућима ученика. С друге стране, од школске 2018/2019. године почео се примењивати нови План и програм наставе и учења математике, најпре у првом, а касније и у вишим разредима разредне наставе. Увидом у најновије програме наставе и учења математике, а узимајући у обзир алгебарске садржаје, закључујемо да горенаведени стандарди постигнућа ученика нису усклађени са садржајима нових програма.

Пре свега, увиђамо да у поменутим стандардима није дато довољно простора за поједине алгебарске садржаје, јер у њима своје место нису пронашли садржаји који се односе на функционалне зависности и низове. Осим тога, за поједине алгебарске садржаје нису дефинисани исходи за сва три когнитивна нивоа. Тако су за садржаје о неједначинама образовни стандарди дефинисани само за напредни ниво, док се на прва два нивоа постигнућа не помињу експлицитно стандарди који захтевају од ученика решавање неједначина. *Да ли то значи да на основном и средњем нивоу постигнућа ученици не би требало да овладају решавањем неједначина?* Осим тога, за садржаје о једначинама нису предвиђени стандарди постигнућа за напредни ниво, док су за средњи ниво постигнућа стандарди о овим садржајима прилично неодређено дефинисани јер су у њима наводи да ученик треба да научи да решава једначине, али без прецизирања начина решавања истих.

Описана непрецизност и непотпуност прописаних стандарда постигнућа ученика отежавају диференцијацију садржаја која се на њима заснива. Наиме, овако дефинисани образовни стандарди за алгебарске садржаје не дају јасне смернице учитељима при креирању наставних часова, тј. избору садржаја и дидактичко-методичког поступања који су прилагођени могућностима ученика. Зато смо за потребе нашег рада приступили операционализацији захтева за алгебарске садржаје, ослањајући се на дефинисане стандарде постигнућа.

3.5. Диференцијација захтева алгебарских садржаја у почетној настави математике

С обзиром на недостатке дефинисаних стандарда постигнућа ученика за алгебарске садржаје, за потребе истраживања, а на основу описа захтева за сваки од нивоа когнитивних постигнућа (Станојевић, 2010), приступили смо одређивању минималних, оптималних и максималних захтева за алгебарске садржаје предвиђене програмом наставе и учења математике за четврти разред основне школе по следећим областима: Зависност резултата рачунских операција од промене компонената, Једначине, Неједначине, Изрази са променљивом (Табела 1).

Табела 1. *Диференцијација захтева за алгебарске садржаје*

Подобласт: Зависност резултата рачунских операција од промене компонената	
Ниво захтева	Ученик треба да:
Минимални захтеви	– препознаје, репродукује на једноставним примерима, вербално изражава и именује правила која се односе на зависност резултата од промене компонената операција и сталност истих; – препознаје зависност резултата од промене компонената, као и сталност резултата рачунских операција на визуелним репрезентацијама којима је зависност, тј. сталност представљена.
Оптимални захтеви	– на одговарајућим примерима или уз помоћ таблице уочи и схвати зависност резултата од промене компонената операција и сталност резултата рачунских операција; – симболички (помоћу слова) записује вербално исказана правила која се односе на зависност резултата од промене компонената операција и сталност истих; – уочи (утврди) „скривене“ вредности у примерима којима је представљена зависност и сталност резултата у зависности од промене компонената; – примењује знања о зависности резултата од промене компонената, као и сталности збира, разлике, производа и количника у експлицитно датим примерима, као „олакшицу“ за рационалније рачунање.
Максимални захтеви	– примењује знања о зависности резултата од промене компонената, као и сталности збира, разлике и производа, у решавању текстуалних задатака који се односе на реалне животне ситације, као и на решавање проблемских задатака.
Подобласт: Једначине	
Ниво захтева	Ученик треба да:
Минимални захтеви	– препознаје записе који представљају једначине и непознату компоненту у њима; – записује одговарајућу једначину са једном операцијом на основу идеографа (слике) и објасни (својим речима) поступак одређивања решења дате једначине; – решава експлицитно дате једноставне једначине са сабирањем и одузимањем до нивоа троцифрених бројева, једначине са множењем и дељењем у оквиру прве хиљаде и једначине са множењем и дељењем декадним јединицама у скупу N.

Оптимални захтеви	– образложи поступак решавања и користи правила о инверзности рачунских операција за решавање једначина са једном рачунском операцијом (сабирањем, одузимањем, множењем или дељењем) у скупу N; – за једноставне текстуалне задатке који се односе на реалне животне ситуације саставља и решава одговарајућу једначину са једном операцијом; – саставља текст задатка за дату једначину са једном рачунском операцијом; – симболички (помоћу слова) записује вербално исказана правила која се односе на поступак решавања једначина са једном операцијом.
Максимални захтеви	– решава сложене једначине у којима је непознат елемент сабирка, умањеника, умањиоца, чиниоца, дељеника или делиоца у скупу N; – решава сложене текстуалне и проблемске задатке помоћу једначина.
Подобласт: Неједначине	
Ниво захтева	Ученик треба да:
Минимални захтеви	– препознаје записе који представљају неједначине и непознату компоненту у њима и вербално их именује; – правилно употребљава симболе {,} и ∈ при записивању скупа решења неједначине; – одређује скуп решења неједначине облика $x < a$, $x > a$ и $a < x < b$; – зна таблично да одреди скуп решења неједначине у једноставним случајевима; – зна поступак одређивања скупа решења експлицитно датих неједначина са сабирањем, одузимањем и множењем, али без дубљег разумевања истог и образлаже га својим речима.
Оптимални захтеви	– схвати поступак решавања и одређује скуп решења неједначине са сабирањем, одузимањем, множењем и дељењем користећи знања о решавању једначина и уз функционалну примену правила о зависности резултата од промене компонената; – за једноставније текстуалне задатке саставља и решава одговарајућу неједначину са једном операцијом.
Максимални захтеви	– саставља одговарајућу неједначину на основу датог скупа решења; – решава сложеније неједначине (са две операције); – решава двоструке неједначине (са два знака неједнакости); – решава сложеније текстуалне задатке помоћу неједначина; – симболички (помоћу слова) записује вербално исказана правила која се односе на поступак решавања неједначина са једном операцијом.

Подобласт: Изрази са промењивом	
Ниво захтева	Ученик треба да:
Минимални захтеви	– препозна и вербално именује израз са промењивом; – одређује вредност израза са промењивом за дате вредности промењиве са једном рачунском операцијом.
Оптимални захтеви	– одређује вредност израза са промењивом за дате вредности промењиве таблично; – саставља и одређује вредност израза са промењивом за дате вредности промењиве са највише две рачунске операције.
Максимални захтеви	– решава текстуалне задатке формирањем израза са промењивом; – саставља, чита и одређује вредност израза са промењивом за дате вредности промењиве са више операција.

Већ је претходно наглашено да су одељења у нашој школи хетерогено структуирана, при чему се најчешће издвајају три категорије ученика: исподпросечни, просечни и натпросечни. У таквим околностима се јавља потреба за прилагођавањем наставе овим групама ученика. Претходно извршеном диференцијацијом захтева за алгебарске садржаје на три нивоа когнитивних постигнућа указује се на конкретна знања која припадник одређене групе треба да стекне. Овако извршена диференцијација исхода учитељу може бити од користи при одређивању и припремању садржаја за различите категорије ученика, али и при одабиру одговарајућег дидактичко-методичког поступка како би ученици по завршетку обраде садржаја стекли знања одређеног обима и нивоа когнитивне сложености. Конкретизација захтева по нивоима постигнућа омогућава учитељу да ствара одговарајуће ситуације које су прилагођене могућностима ученика одређене категорије, што омогућава њихов оптимални развој. Све ово доприноси стицању квалитетних математичких знања.

3.6. Учења путем открића на диференцираним садржајима алгебре у почетној настави математике

Истраживачка и наставна пракса показују да ученици имају велике тешкоће са схватањем алгебарских садржаја када се са њима први пут сусретну у вишим разредима основне школе. Разлог за то је недовољна повезаност аритметике, са чијим учењем се почиње у раним разредима основне школе, и првих алгебарских садржаја који се у наставу уводе крајем основношколског образовања (Cvijanović, 2016). Традиционални приступ настави математике подразумева да аритметика треба да претходи алгебри и да представља основу за усвајање алгебарских појмова. И данас је у већини земаља доминантно становиште *аритметика па алгебра,* које се аргументује тврђењем да је алгебра апстрактнија, па је тиме и захтевнија од аритметике која је конкретнија, те због тога и лакша (Зељић, 2014).

Ипак, проблеми који се јављају код ученика при преласку са учења аритметике на учење алгебре отварају питање у чему су разлике између ових двеју математичких области. У поређењу са аритметиком, алгебра подразумева другачију „интерпретацију слова, симбола, израза и једнакости, као и начин решавања проблема“ (Зељић, 2014: 295). Слова у аритметици се углавном користе као скраћенице, док слова у алгебри представљају променљиве или непознате бројеве. Аритметика се бави оперисањем са познатим бројевима, док се алгебра односи на манипулисање непознатим и променљивим величинама, те на разликовање конкретних и општих ситуација (Van Amerom, 2003). Програм наставе и учења у нижим разредима основне школе фокусиран је на операције са конкретним бројевима, док операције са општим бројевима, варијаблама и функцијама изостају, услед чега ученици у раним разредима основне школе не стичу појмовну основу за оперисање са свим бројевима (Warren & Cooper, 2005).

Ученици старијих разреда основне школе имају тешкоће у разумевању знака једнакости, и многи од њих интерпретирају овај симбол као знак након чега следи решење. Наиме, ученици на основу ранијег искуства сматрају да је једна страна знака једнакости проблем, док је друга страна једнакости његово решење. Знак једнакости нема исто значење у аритметици и алгебри. У почетној настави математике знак једнакости се схвата као сигнал за обављање неког израчунавања, док у алгебри знак једнакости означава једнакост леве и десне стране израза (Cvijanović, 2016).

Многи аутори сматрају да уколико ученици не савладају правила која леже у основи аритметике, већ само меморишу аритметичке процедуре, долази до проблема у учењу алгебре. У том смислу Бут (Booth, 1988) закључује да „потешкоће које ученици имају са алгебром нису толико потешкоће са самом алгебром, већ проблеми са аритметиком који су остали некориговани“ (према: Зељић, 2014: 83). Истраживања у основним школама показују да ученици имају веома уско разумевање аритметике, за шта се претпоставља да омета каснији развој алгебарског знања (Carpenter, Franke & Levi, 2003).

Једна од могућности „да се алгебра успешно инкорпорира у наставни програм математике за млађе разреде основне школе јесте да се угради у аритметику“ (Suh, 2007: 247). Аутори у овој области сматрају да је неопходно да ученицима у основној школи буде омогућено искуство са математиком које „иде даље“ од аритметике, и које укључује разумевање дубљих и темељних математичких структура. У питању су школска искуства која треба да пруже ученицима продубљено разумевање структуралних форми и генерализација у математици, а за која се у литератури употребљава назив *рана алгебра* (Blanton and Kaput, 2011). Успешно формирање раноалгебарских појмова утемељено је у добро формираној основи аритметике. Усвајање садржаја алгебре у нижим разредима основне школе треба да омогући ученицима формирање појмовне основе која ће им олакшати прелазак са аритметике на алгебру, као и учење алгебре у вишим разредима.

Сложеност, апстрактност и симболика која прати садржаје алгебре, као и потешкоће које ученици имају при усвајању ових садржаја, условљавају одабир посебних метода и поступака при њиховом методичком обликовању (Kieran, 2004a).

Тако, уопштеност алгебарске нотације ствара потребу за диференцираним приступом. Диференцијација алгебарских садржаја омогућава да се ови садржаји приближе различитим категоријама ученика тако што ученици могу да приступе садржају на различитим нивоима сложености. Тиме се стварају услови за активно учествовање ученика у њима прилагођеној настави, при чему самостално истражују, мисаоно овладавају садржајима и активно примењују откривена решења. Отуда концепт наставе заснован на уважавању индивидуалних карактеристика и разлика које постоје међу ученицима, као и на активирању ученика у процесу учења, заснованом на откривању, представља добру основу за ефикасније усвајање алгебарских садржаја.

Диференцирана настава, као и учење путем открића, имају основу у конструктивистивистичкој теорији учења, у којој се ученик схвата као активан креатор свог знања. Уважавање претходног знања и искуства ученика, те схватање улоге учитеља као помагача у процесу учења, заједничке су одлике диференцијације и учења путем открића. Учење путем открића представља добар контекст за диференцијацију и индивидуализацију наставе и учења. У дидактичкој литератури се истиче да различите форме активног учења (наставе), међу које се сврстава и учење путем открића, подржавају различите стилове учења и способности ученика. У овим облицима учења диференцијација се остварује путем омогућавања ученицима да приступе садржају на различитим нивоима (INTO, 2017).

Поборници учења путем открића сматрају да ученици у потпуности разумеју само оне садржаје које су сами открили и да је суштинска карактеристика ове врсте учења управо мисаоно овладавање образовним садржајима. Почетна настава математике треба бити организована тако да ученик стиче знања сталним откривањем појмова, правила, својстава итд. „Дакле, учење путем открића треба бити присутно у остваривању целокупног програма наставе математике (на свим нивоима математичког образовања), без обзира на то којим обликом наставе се он реализује и без обзира на тип часа који се при томе примењује“ (Вуковић, 1998: 206).

Међутим, знамо да у наставној пракси не могу сви ученици истовремено да реше све задатке. У таквим условима у први план се истичу индивидуалне особености ученика, њихова претходна знања и темпо рада. Зато је препоручљиво да се материјал за учење креира по нивоима сложености и тежине како би свако од ученика могао да одговори на део захтева. У вези са тим, учење путем открића је најпродуктивније у индивидуализованој и диференцираној настави путем припремљених писаних материјала на којима су захтеви диференцирани по нивоима сложености. И поред тога што у овој врсти наставе ученик учи сам, он је помоћу посебно припремљеног писаног материјала (програмираног, полупрограмираног, проблемски постављеног радног уџбеника итд.) и усмено, током целог процеса учења, вођен од стране учитеља сигурним путем. Тако ученици остварују јасан увид у структуру садржаја и стичу знања која се одликују функционалношћу, примењивошћу и оперативношћу (Вуковић, 1998).

Имајући све то у виду, учење путем открића треба да има доминантну улогу у примени модела диференциране наставе математике. Основу овог рада чини методички приступ који се темељи на идеји функционалног повезивања учења путем открића и диференцијације садржаја приликом усвајања алгебарских садржаја.

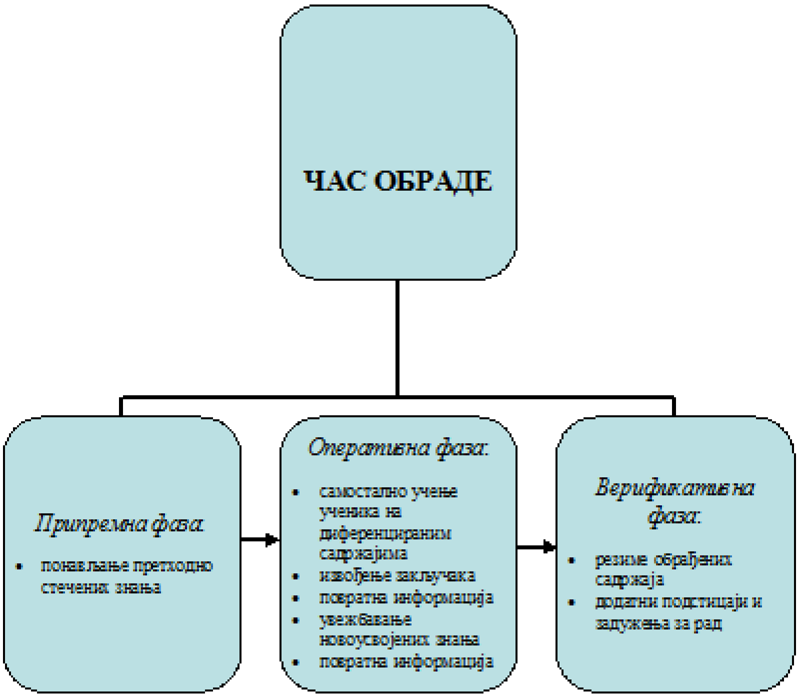
3.7. Методички оквир за примену учења путем открића на диференцираним садржајима алгебре

Веза диференцијације и учења путем открића заснива се на могућности диференцирања математичких садржаја за откривање појмова, правила, алгоритама итд. у складу са индивидуалним способностима ученика. Дакле, ученици, радећи на посебно припремљеном материјалу, уз одговарајућу помоћ и инструкције учитеља, самостално откривају одговарајуће математичке појмове, правила итд. На листићима за самостално учење налазе се исти математички садржаји, али са различитим захтевима који су диференцирани на три нивоа сложености. Диференцијација програмских садржаја алгебре је извршена у односу на прописане стандарде постигнућа ученика којима је описано којим знањима ученици треба да овладају на основном, средњем и напредном нивоу, при чему сваком нивоу стандарда одговара одређени ниво сложености и тежине захтева на листићу за самостално учење. При оваквом начину рада постоји и могућност пружања дифернциране помоћи ученицима на различитим нивоима.

Приликом дизајнирања садржаја за учење, тј. припремања наставе по моделу учења путем открића на диференцираним садржајима, треба узети у обзир следеће:

– Предзнање које ученици имају о области. Ученици који имају недовољно знања о конкретној области имаће тешкоћа да деривирају значење из истраживачке активности и њених резултата (Janssen, Westbroek & van Driel, 2014). За ефикасност учења путем открића потребно је да „ученик има развијене основне појмове и везе које може да користи у учењу новог садржаја; језичка предзнања – у писању, читању и разумевању прочитаног; основне способности за активно стицање знања – способност да самостално решава задатке, самостално контролише сопствена решења, мотивисан је и отворен за стицање нових знања, поштује радну дисциплину у одељењу, има адекватан ниво развијености пажње и да је навикнут да слободно тражи помоћ када му је потребно“ (Malešević, 2014: 336).
– Ефекте учења. Ефекти учења путем открића су већи када ученици знају шта је циљ и сврха активности у којој се ангажују. Учитељ има важну улогу у јасном артикулисању сврхе истраживачке активности у којој се ученици ангажују и у сталном охрабривању ученика да повезују своја открића са већ постојећим формално стеченим знањем (Janssen et al., 2014).
– Повратну информацију. У процесу учења, неопходно је ученицима обезбедити довољно могућности за повратне информације, рефлексију и модификовање идеја до којих долазе самосталним откривањем (Janssen et al., 2014).

На основу претходно наведених методичких оквира за учење путем открића на диференцираним садржајима, конструисана је организациона структура часа обраде и часа утврђивања. Шематски приказ структуре часа обраде приказан је на слици 3.



Слика 3. *Шематски приказ организационе структуре часа обраде*

Организациона структура часа по моделу учења путем открића на диференцираним садржајима садржи следеће фазе у реализацији часова обраде наставних јединица: припремна, оперативна и верификативна фаза.

Припремна фаза: Понављање претходно стечених знања ученика која су у непосредној вези са садржајем који се обрађује у оперативној фази.

Оперативна фаза:

1) Самостално учење путем открића на диференцираним садржајима на припремљеном материјалу (Ученици одговарају на постављена питања или решавају задатке, уз претходно извршење назначених радњи: посматрање цртежа, цртање, упоређивање и сл. уколико је то наведено у материјалу). Током самосталног рада учитељ пружа диференцирану помоћ ученицима за сваки ниво. Ученицима који постижу минимални ниво захтева учитељ треба да понуди следеће видове помоћи:

- постављање питања која воде ка решењу,
- указивање на правило које је потребно користити у задатку,
- указивање на грешке,
- скретање пажње на аналогије,
- указивање на текст који је потребно поново прочитати са пажњом,
- давање решења за самоконтролу итд. (Дејић и Егерић, 2003: 346).

2) Самостално извођење закључака и генерализација.

3) Повратна информација о тачности решења и закључака, анализа и исправка погрешних одговора, као и сумирање резултата.

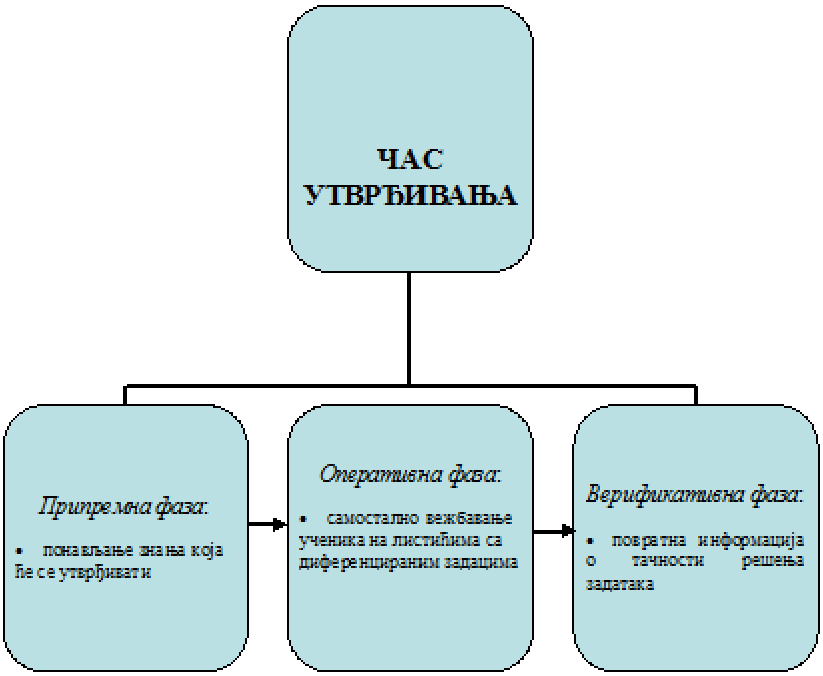
4) Увежбавање новоусвојених знања помоћу наставних листића са задацима који су диференцирани на три нивоа сложености. Формулација задатака на сваком наставном листићу је таква да ученик може успешно да их реши само ако поседује знања одређеног нивоа.

5) Повратна информација о поступку и тачности решења задатака са наставних листића за увежбавање.

Верификативна фаза: Верификативни резиме обрађених садржаја, тј. провера остварености циља учења. Затим следе додатни подстицаји и задужења за рад.

Предвиђено је да ученици самостално уче на материјалу који је припремљен за њих, јер је овај начин рада погодан за моделовање тока размишљања и оспособљавање ученика за рационално учење. На почетку сваке садржајне целине дат је истраживачки задатак. Истраживачки задатак, заправо, представља одговор на питање: Шта ученик треба да открије и закључи у току самосталног рада на припремљеном материјалу? Улога истраживачког задатака јесте да води ученике кроз самостално учење јер је важно да ученици унапред знају исходе како би могли да врше самоконтролу и процену разултата учења и свог рада. Такође, истраживачки задатак подстиче радозналост код ученика и има мотивациону улогу, јер је познато да се ученици радо ангажују у настави ако знају шта се од њих очекује да науче. Иза сваке самосталне активности ученика предвиђа се повратна информација учитеља јер је то психолошка потреба сваког појединца.

Организациона структура часа утврђивања по моделу учења путем открића на диференцираним садржајима састоји се из следећих фаза: припремна, оперативна и верификативна (Слика 4).



Слика 4. *Шематски приказ организационе структуре часа утврђивања*

Припремна фаза: Понављање претходно научених знања која ће се утврђивати (увежбавати) у оперативној фази.

Оперативна фаза: За часове утврђивања је потребно припремити материјале за учење у којима су задаци конципирани на три нивоа сложености, при чему унутар сваке групе задатке треба поступно и систематично распоредити по логичкој структури.

Ученици, према својим могућностима, самостално раде на наставном листићу одговарајућег нивоа сложености. Осим тога, потребно је предвидети и могућност за напредовање ученика на виши ниво. Из тих разлога, сваки наставни листић за утврђивање, осим задатака предвиђених за тај конкретни ниво сложености, треба да садржи и одређени број задатака који одговарају наредном, вишем нивоу. При томе, листић за напредни ниво, поред задатака који одговарају том, највишем нивоу постигнућа, садржи и теже задатке предвиђене за ученике са бољим успехом из математике, а то су проблемски задаци или задаци за такмичење. Уколико ученици успешно решавају и задатке предвиђене за виши ниво постигнућа у односу на онај у коме су груписани, прелазе на тај виши ниво. Током самосталног рада учитељ пружа диференцирану помоћ ученицима на различитим нивоима.

Верификативна фаза: Ученици добијају повратну информацију о тачности решавања задатака са одговарајућег наставног листића и исправљају евентуалне грешке.

Пошто смо у претходном тексту одредили минималне, оптималне и максималне захтеве за алгебарске садржаје предвиђене наставним програмом математике за четврти разред основне школе, по појединачним подобластима, у наставку ћемо посебно размотрити методичко обликовање ових садржаја применом учења путем открића. Тачније, путем конкретних примера садржаја алгебре представићемо процес учења путем открића на диференцираним садржајима. Направљен је избор за сваки од садржаја ране алгебре, и то: Зависност збира од промене сабирака, Једначине са непознатим дељеником, Неједначине са сабирањем и Изрази са промењивом. Методички оквир је разрађен за сваки ниво операционализованих захтева.

*3.7.1. Методички приступ обради садржаја о **Зависности збира од промене сабирака** применом учења путем открића на диференцираним садржајима*

Зависност резултата рачунских операција од промене компонената јесте садржај путем којег се ученици први пут упознају са појмом функције на млађем основношколском узрасту. Ови садржаји представљају алгебарску тему која због своје апстрактности задаје бројне проблеме и ученицима и учитељима. Како би ове садржаје ученици усвојили са разумевањем, осмислили смо приступ у оквиру којег ученици сопственом активношћу откривају функционалну зависност између компонената и резултата рачунских операција, и то на садржајима прилагођеним њиховим могућностима. Зато смо за потребе обраде наставне јединице *Зависност збира од промене сабирака* у четвртом разреду израдили следећу операционализацију захтева:

Основни ниво: Ученик треба да:

- препознаје зависност збира од промене сабирака на цртежима и примерима којима је зависност представљена;
- репродукује на једноставним примерима, вербално изражава и именује правило које се односи на зависност збира од промене сабирака.

Средњи ниво: Ученик треба да:

- схвати правило о зависности збира од промене сабирака које уочава на одговарајућим примерима и вербално изражава то правило;

– симболички (помоћу слова) записује вербално исказано правило које се односи на зависност збира од промене сабирака;
– уочава (одређује) „скривене“ вредности слова у примерима којима је представљена зависност збира од промене сабирака;
– примењује знања о зависности збира од промене сабирака као „олакшицу“ за рационалније рачунање збира у скупу N.

Напредни ниво: Ученик треба да:

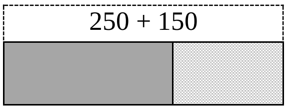
– примењује знања о зависности збира од промене сабирака у решавању текстуалних задатака који се односе на реалне животне ситуације, као и на решавање проблемских задатака.

Истраживачки задатак који смо ставили ученицима гласио је: Открити како се мења збир променом једног од сабирака.

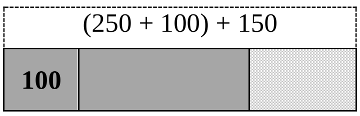
Основни ниво

Обраду садржаја који се односи на уочавање правила о зависности збира од промене сабирака на основном нивоу можемо започети користећи се схемама које сугеришу универзалност значења овог правила. У креирању припрема за експериментални програм користили смо примере схема које је развила М. Зељић (2014) у оквиру свог модела учења алгебарских садржаја. Схема као визуелна репрезентација омогућава лакше уочавање односа који постоје између компонената, што је посебно значајно ако су узму у обзир карактеристике мишљења ученика млађег школског узраста. Затим се ученици воде кроз одговарајуће активности путем којих откривају и изводе закључке о поменутом правилу.

Пример 5. Извршено је сабирање следећих бројева:
250 + 150 =_____
а) У наредним примерима је извршено повећање првог сабирка. Погледај слику и утврди какве су промене настале код збира.

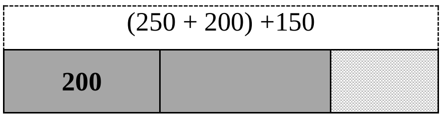


250 + 150 = _____

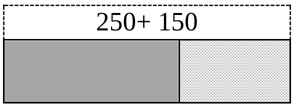


(250 + **100**) + 150 =______+ 150 = _______, а то је 400 + **100**.

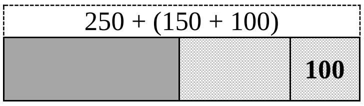
Први сабирак се повећао за______, па се и збир повећао за _____.



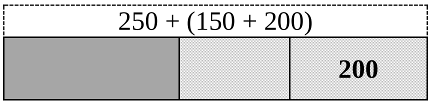
(250 + **200**) + 150 =_____+ 150 =______, а то је 400 + _____.
Први сабирак се повећао за _____, па се и збир ________за_____.
б) У следећим примерима је извршено повећање другог сабирка. Погледај слику и утврди какве су промене настале код збира.



250 + 150 = ____



250 + (150 + **100**) = 300+______=______, а то је 400 +_____.
Други сабирак се повећао за ______, па се и збир повећао за______.

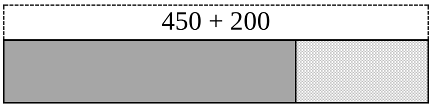


250 + (150 + **200**) = 250 +______=______=, а то је 400 +_______.
Други сабирак се повећао за _____, па се и збир _____ за_____.
Дакле, када други сабирак повећамо за неки број, и збир се __________ за тај исти број.
Изведи закључак о промени збира након повећања једног од сабирака:
Закључак: Ако се један од сабирака повећа за неки број, и збир ће се _____________ за тај исти број.

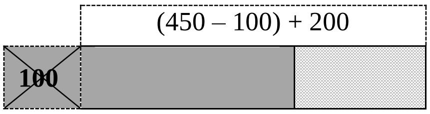
За сваки појединачни случај схема може послужити као оквир на основу кога ученик на очигледан начин уочава и препознаје промене збира услед промене једног од сабирака.

У Примеру 5 ученике упућујемо да на основу полазне једнакости 250 + 150 = 400 у следећим корацима (када најпре први, а потом и други сабирак повећамо за неки број), посматрајући промене на схемама на којима је зависност представљена, изразе збир у односу на почетну једнакост (нпр. 400+ 100) и закључе о променама збира у односу на промену првог сабирка.

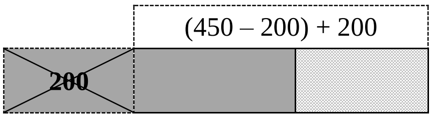
Пример 6. Извршено је сабирање следећих бројева:
450 + 200 = 650
а) У наредним примерима је извршено смањење првог сабирка. Погледај слику и утврди какве су промене настале код збира.



450 + 200 =_____

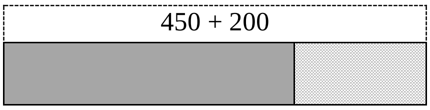


(450 – **100**) + 200 =__+ 200 =__, а то је 650 – **100.** Први сабирак се смањио за ____, па се и збир смањио за_____.

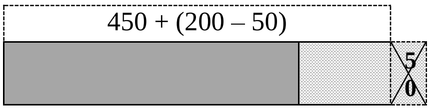


(450 – **200**) + 200=____+ 200 =____, а то је 650 –_______.
Први сабирак се смањио за ___, па се и збир смањио за ______.

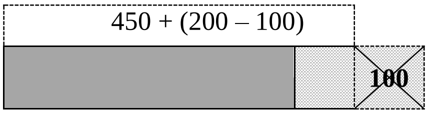
б) У следећим примерима је извршено смањење другог сабирка. Погледај слику и утврди какве су промене настале код збира.



450 + 200 =_____



450 + (200 – **50**) = 450 +____=_____, а то је 650 –______. Други сабирак се смањио за___, па се и збир смањио за___.



450 + (200 – **100**) = 450 +_____=_____, а то је 650 – ____. Други сабирак се смањио за _______, па се и збир смањио за ______.
Изведи општи закључак о промени збира након смањења једног од сабирака:
Закључак: Ако се један од сабирака смањи за неки број, и збир ће се _________ за тај исти број. Ово својство сабирања се назива _________ (погледај наслов на табли!).

Као и у претходном примеру, ученике упућујемо да, на основу полазне једнакости 450 + 200 = 650, у следећим корацима (када најпре први, а потом и други сабирак умањимо за неки број), посматрајући промене на схемама на којима је зависност представљена, изразе збир у односу на почетну једнакост (нпр. 650 – 100) и закључе о променама збира у односу на промену другог сабирка.

На основу претходна два примера ученици изводе закључак да збир расте (опада) када један од сабирака расте (опада), а затим то правило и вербално изражавају.

У циљу дубљег разумевања изведеног правила о зависности збира од промене сабирака, ученици са основног нивоа постигнућа вежбају путем задатака у којима треба да препознају, репродукују на једноставним примерима, вербално изражавају и именују правило које се односи на зависност збира од промене сабирака (Пример 7, Пример 8 и Пример 9).

Пример 7. Како и за колико ће се променити збир ако се:
а) први сабирак повећа за 36, а други сабирак остане непромењен?
____.
б) први сабирак смањи за 59, а други сабирак остане непромењен?
____.
Ово својство називамо:____.

Пример 8. У празна поља упиши одговарајући број тако да добијеш тачне једнакости:
1200 + 400 = 1600
(1200 + 100) + (400 –____) = 1600
(1200 –____) + (400 + 255) = 1600

Пример 9. Збир два броја је 14500.

а) Колико ће износити збир ако се први сабирак повећа за 345? ___________.

б) Колико ће износити збир ако се други сабирак смањи за 550? __________.

в) Колико ће износити збир ако се први сабирак смањи за 4356? __________.

Средњи ниво

У складу са постављеним захтевима за средњи ниво постигнућа, правило о зависности збира од промене сабирака ученици могу да открију и уоче преко одговарајућих бројевних једнакости. Полазећи од почетне једнакости врши се промена једне од компонената рачунске операције сабирање. Ученици се наводе да упоређују вредности полазног и новог израза на основу чега закључују о промени резултата након промене компоненте. Након неколико примера ученици индукују правило које вербално изражавају. У следећој фази ученици на средњем нивоу постигнућа симболички записују вербално исказано правило о зависности збира од промене једног од сабирака (Пример 10 и Пример 11).

Пример 10. Изврши сабирање следећих бројева:

а) 3354 + 46 = ______

Први сабирак је ______, други сабирак је_____, збир је број______.

б) У наредним примерима утврди како се мења први сабирак (из примера под *а*) и какве су промене настале код збира.

1) 3355 + 46 =___. Први сабирак је повећан за ___ и збир се ____за ____.

2) 3360 + 46 =___. Први сабирак је ____ за _____ и збир се _____ за _____.

3) 3364 + 46 =___. Први сабирак је _____ за ____ и збир се ____ за _____.

У наредним примерима је извршена промена другог сабирка. Упореди промену збира са бројевима за које смо променили други сабирак.

1) 3354 + 47 =___. Други сабирак је _____ за ____ и збир се ____ за ____.

2) 3354 + 50 =___. Други сабирак је _____ за ____ и збир се ____ за ____.

3) 3354 + 56 =___. Други сабирак је _____ за ____ и збир се _____ за _____.

На основу претходних примера изведи општи закључак о промени збира након повећања једног од сабирака:

Закључак: Ако се један од сабирака_________ за неки број, и збир ће се _____________ за ___________________________.

Како се уместо бројева могу ставити слова као замена за било који природан број, претходни закључак можемо записати овако: ако је $a + b = c$, онда је $(a + x) + b = c +$ ____ и $a + (b + x) = c +$ ____.

Пример 11. Изврши сабирање следећих бројева:

а) 4940 + 40 =_____

б) У наредним примерима утврди како се мења први сабирак (из примера под *а*) и какве су промене настале код збира.

1) 4920 + 40 =___. Први сабирак је смањен за ___ и збир се ____за ____.

2) 4910 + 40 =___. Први сабирак је ____ за _____ и збир се ____ за ____.

3) 4900 + 40 =___. Први сабирак је ___ за _____ и збир се _____ за ____.

в) У наредним примерима је извршена промена другог сабирка (из примера под *а*). Упореди промену збира са бројевима за које смо променили други сабирак.
1) 4940 + 30 =___. Други сабирак је ____ за _____ и збир се ____ за ____.
2) 4940 + 20 =___. Други сабирак је ____ за _____ и збир се ____ за ____.
3) 4940 + 10 =___. Други сабирак је ____ за _____ и збир се ____ за ____.
На основу претходних примера изведи општи закључак о промени збира након смањења једног од сабирака:
Закључак: Ако се један од сабирака ________за неки број, и збир ће се _____________ за тај исти број.
Како се уместо бројева могу ставити слова као замена за било који природан број, претходни закључак можемо записати овако: ако је $a + b = c$, онда је $(a - x) + b = c -$ ____ и $a + (b - x) = c -$____ (при чему је $a > x$ или $a = x$ и $b > x$ или $b = x$).

Схватању и разумевању промене резултата операција у зависности од промене једне од компонената значајно може допринети представљање ових односа помоћу таблице као једног од начина визуелне репрезентације. Узмимо за пример задатке из Примера 12 и Примера 13.

Пример 12. Израчунај збир датих бројева 3200 + 800 = ________.
У табели је извршена промена првог сабирка. Попуни празна поља и утврди како се мења збир у зависности од промене првог сабирка.

a	**3200 + 200**	**3200 + 350**	**3200 – 150**	**3200 – 200**
b	**800**	**800**	**800**	**800**
a + b				

Како се у претходној табели мења први сабирак?______________________
Посматрај колону у којој је први сабирак повећан за 200 и закључи каква промена је настала код збира.
Збир се ______________ за ______.
Посматрај колону у којој је први сабирак повећан за 350 и закључи каква промена је настала код збира.
Збир се ______________ за ______.
Посматрај колону у којој је први сабирак смањен за 150 и закључи каква промена је настала код збира.
Збир се ______________ за ______.
Посматрај колону у којој је први сабирак смањен за 200 и закључи каква промена је настала код збира.
Збир се ______________ за ______.
Закључак: Ако се први сабирак _________ или __________ за неки, број збир ће се _____________ или ________________ за исти тај број.
Како се уместо бројева могу ставити слова као замена за било који природан број, претходни закључак можемо записати овако: ако је $a + b = c$, онда је $(a + x) + b = c +$ _____ и $(a - x) + b = c -$ ____ (при чему је $a > x$ или $a = x$).

Пример 13. Израчунај збир датих бројева: 3600 + 400 = ________.
У табели је извршена промена другог сабирка. Попуни празна поља и утврди до каквих промена долази код збира услед промена другог сабирка.

a	**3600**	**3600**	**3600**	**3600**
b	**400 + 100**	**400 + 250**	**400 – 50**	**400 – 100**
a* + *b				

Како се у претходној табели мења други сабирак?____________________
Посматрај колону у којој је други сабирак повећан за 100 и закључи каква промена је настала код збира.
Збир се ______________ за ______.
Посматрај колону у којој је други сабирак повећан за 250 и закључи каква промена је настала код збира.
Збир се ______________ за ______.
Посматрај колону у којој је други сабирак смањен за 50 и закључи каква промена је настала код збира.
Збир се ______________ за ______.
Посматрај колону у којој је други сабирак смањен за 100 и закључи каква промена је настала код збира.
Збир се ______________ за ______.
Закључак: Ако се други сабирак ________________ или __________ за неки број, збир ће се ____________ или ________________ за исти тај број. Пошто дата слова замењују било који природан број, ако је $a + b = c$, онда је и $a + (b + x) = c +$ ____ и $a + (b - x) = c -$____ (при чему је $b > x$ или $b = x$).
Ово својство сабирања се назива:________________________________.

У примерима 12 и 13 ученик је у ситуацији да посматра податке дате у табели и уочава одговарајуће промене на сабирцима и збиру. Допуњавајући започете реченице ученици се хеуристички воде да кроз апстракцију и генерализацију открију функционалну зависност између промене сабирака и одговарајућих промена збира и изразе одговарајуће правило. У последњој фази ученици уочени однос изражавају симболима као генерализовано својство зависности која постоји између резултата и компонената рачунске операције.

У циљу дубљег разумевања изведених правила о зависности збира од промене сабирака, ученици са средњег нивоа постигнућа вежбају путем задатака у којима се захтева да уочавају (одређују) „скривене“ вредности слова у примерима којима је представљена зависност збира од промене сабирака (Пример 14) и примењују знања о зависности збира од промене сабирака као „олакшицу“ за рационалније рачунање у скупу N (Пример 15).

Пример 14. Ако је 850 + 350 = 1200, одреди вредност x *у следећим једнакостима:*

$(850 + x) + 350 = 1450$ $x =$ ________
$850 + (350 - x) = 1000$ $x =$ ________
$(850 - x) + 350 = 900$ $x =$ ________

Пример 15. Ако знаш да је тачна једнакост 1450 + 250 = 1700, упиши одговарајуће резултате на цртама рачунајући само једном:
а) (1450 – 45) + 250 = ______
б) 1450 + (250 + 25) = ______

Напредни ниво

Обрада садржаја о зависности збира од промене сабирака на напредном нивоу може започети креирањем проблемских ситуација у којима се имплицитно одсликава функционална зависност, а које се односе на реалне животне ситуације. Најпре се креира ситуација која захтева израчунавање вредности збира. Потом се та полазна ситуација модификује тако што се увећава, а потом умањује једна од компонената рачунске операције сабирање из полазне једнакости, а ученици се хеуристички воде да открију по ком правилу се променом једне од компонената мења резултат рачунске операције. У последњој фази ученици апстрактност уочених промена исказују језиком алгебре, тј. уочени однос изражавају симболима као генерализовано својство зависности која постоји између резултата и компонената рачунске операције. На тај начин ученици прелазе из реалног света проблема у апстрактни свет симбола, тј. алгебарске нотације. Узмимо за пример реалну ситуацију (Пример 16):

Пример 16. Аутобус који вози на релацији Београд – Ниш стаје само на једну станицу између Београда и Ниша. У Београду је у аутобус ушло 28 путника. На следећој станици је ушло 22 путника, а нико није изашао из аутобуса. Колики је укупан број путника који су путовали у Ниш?
а) Укупан број путника је ______+________=_______.
Први сабирак је ______, други сабирак је_____, збир је број______.
б) *Да су у Београду ушла 3 путника више, колико би путника допутовало до Ниша овим аутобусом?*
Напиши преко бројевног израза и израчунај укупан број путника.
(______+______) +______=______+______=_____= 50 +_____
Шта се десило са бројем путника који су ушли у аутобус на станици у Београду?___________________.
Шта се десило са укупним бројем путника?__________________________.
Дакле, први сабирак се _____________ и збир се________________.
в) *Да је на другој станици ушло 5 путника више, колико би путника допутовало до Ниша овим аутобусом?*
Напиши преко бројевног израза и израчунај укупан број путника.
______+ (______+______) =______+_____=_____= 50 +_____
Шта се десило са бројем путника на другој станици?_________________.
Шта се десило са укупним бројем путника?__________________________.
Дакле, други сабирак се _____________ и збир се_________________.
Упореди промену збира са бројевима за које смо увећавали сабирке.
*Закључак:*____.
Пошто дата слова замењују било који природан број, ако знаш да је $a + b = c$, напиши чему је једнако $(a + x) + b$ = ____+ ____ и $a + (b + x)$ = ____ + ____
г) *Да је на првој станици ушло 7 путника мање, колико би путника допутовало до Ниша овим аутобусом?*
Напиши преко бројевног израза и израчунај укупан број путника.
(______–______) +______=______+______=_____= 50 – _____

Шта се десило са бројем путника на првој станици?__________________.
Шта се десило са укупним бројем путника?__________________________.
Дакле, први сабирак се _____________ и збир се________________.
д) *Да је на другој станици ушло 10 путника мање, колико би путника допутовало до Ниша овим аутобусом?*
Напиши преко бројевног израза и израчунај укупан број путника.
______+ (______–______) =______+_____=_____= 50 – _____
Шта се десило са бројем путника на другој станици?_________________.
Шта се десило са укупним бројем путника?___________________________.
Дакле, други сабирак се _____________ и збир се________________.
Упореди промену збира са бројевима за које смо смањивали сабирке.
*Закључак:*____.
Ако су a, b, c и x природни бројеви и ако знаш да је $a + b = c$, напиши чему је једнако $(a - x) + b =$ ___– ___ и $a + (b - x) =$ ____ – ____, при чему је $a > x$ или $a = x$ и $b > x$ или $b = x$.
Ово својство сабирања се назива __________________________.

Задатком у Примеру 16 водимо ученике до открића о променама које настају код збира услед промене сабирака. Најпре је створена ситуација која даје повод за израчунавање вредности збира. Варирањем полазне ситуације најпре се повећава, а потом смањује први затим други сабирак, а ученици се хеуристичким вођењем, уз помоћ питања на листићу за самостално учење, усмеравају да открију утицај промене сабирака на промену збира.

Дубље разумевање и примену усвојеног правила о зависности резултата од промене компонената рачунске операције сабирање развијамо путем примера у којима се од ученика захтева да примењује знања о зависности збира од промене сабирака у решавању текстуалних задатака који се односе на реалне животне ситације, као и на решавање проблемских задатака (Пример 17 и Пример 18).

Пример 17. У двама камионима има укупно 3275 килограма кромпира. Ако се у први камион утовари још 50 килограма кромпира, колико килограма треба истоварити из другог камиона да би у обама камионима укупно било 3250 килограма?

Образложи одговор ____.

Пример 18. Миша и његов брат Лука су имали укупно 4400 динара. Обојица су купили по књигу од 200 динара. Колико имају укупно новца после куповине књига? (Примени правило промене збира у зависности од промене сабирака) ____.

3.7.2. Методички приступ обради садржаја о ***Једначинама са непознатим дељеником*** *применом учења путем открића на диференцираним садржајима*

Садржаји о једначинама представљају најбољи оквир за смислени рад са словима. За Марјановића (1996) једначине представљају помоћно средство ученицима у развијању идеје о променљивој. Наш програм предвиђа да се са обрадом садржаја о једначинама крене још у првом разреду основне школе. Како је наш експериментални програм реализован у четвртом разреду основне школе, предвидели смо следећу диференцијацију захтева за наставну јединицу *Једначине са непознатим дељеником*:

Основни ниво: Ученик треба да:

– препознаје записе који представљају једначине са непознатим дељеником и непознату компоненту у њима;
– запише одговарајућу једначину на основу идеографа (слике) и објасни (својим речима) поступак одређивања решења дате једначине;
– решава експлицитно дате једноставне једначине са дељењем.

Средњи ниво: Ученик треба да:

– образложи поступак решавања и користи правила о инверзности рачунских операција за решавање једначина са непознатим дељеником у скупу N;
– за једноставне текстуалне задатке који се односе на реалне животне ситуације саставља и решава одговарајућу једначину са непознатим дељеником;
– саставља текст задатка за дату једначину.

Напредни ниво: Ученик треба да:

– решава једначине (са две операције) у којима је непознат елемент дељеника у скупу N;
– решава сложене текстуалне и проблемске задатке помоћу једначина са непознатим дељеником.

Истраживачки задатак који постављамо ученицима могао би да гласи: Открити поступак израчунавања непознатог дељеника у скупу *N*.

Основни ниво

При креирању модела учења алгебарских садржаја који смо емпиријски проверили, у обради садржаја о једначинама путем открића на основном нивоу пошли смо од примера задатка у коме ученик треба да на основу идеографа симболички запише одговарајућу једначину и уочавањем односа између компонената у једнакости, који је јасно изражен пратећом сликом (идеографом), открије поступак решавања исте (Пример 19). Основу за креирање идеографа у нашем експерименталном моделу учења представљали су идеографи које је разрадио Марјановић (1996).

Пример 19. Количник непознатог броја и броја 8 износи 120. Одреди непознати број.

Погледај слику, постави и реши једначину.

x							
120	**120**	**120**	**120**	**120**	**120**	**120**	**120**

Решење: *x* : ________= _________.
У претходној једнакости дељеник је ________, делилац је _________, количник је број________.
Ова једнакост представља једначину са непознатим ________________.
Погледај слику и одговори како можемо израчунати вредност *x*?

x = _______ · ________

x = ______, тј. помножили смо количник и _________.

Решење једначине је број_______.

Проверу тачности решења извршићемо тако што добијено решење, тј. број________, заменимо у полазној једначини и утврђујемо да је _______ : ________ = _________, тј. _______=________.
На основу претходног примера изведи закључак о израчунавању непознатог дељеника.
Закључак: Непознати дељеник се израчунава тако што се _______ и________ помноже.

У Примеру 19 ученик се на основу иконичке представе задатка наводи да уочи односе између делиоца и количника, али и дељеника који треба одредити. То ће овај идеограф послужити да ученик запише једнакост која му одговара, дакле: $x : 8 = 120$. Приликом одређивања непознатог броја ученика поново упућујемо на дату слику (идеограф) којом је сликовито изражен однос између познатих и непознатих вредности и која јасно изражава везу између компонената дате једначине. Дакле, осим за састављање одговарајућих једначина, слике (идеографи) се користе и при откривању самог поступка решавања истих јер јасно сугеришу везу између операција множења и дељења. Ученик закључује да ће непознати број одредити тако што ће број 8 помножити бројем 120, тј. $x = 8 \cdot 120$. Апстракцијом се закључује да је непознати дељеник једнак производу делиоца и количника.

Решење у алгебарском облику би било:

$x = 960$

Следећи корак у поступку решавања једначина јесте провера тачности пронађеног решења. Приликом провере тачности решења једначине, проверава се вредност израза за израчунату вредност непознате, тј. утврђује се да ли је израз који се налази са леве стране знака једнакости еквивалентан броју који се налази са његове десне стране. На крају се од ученика захтева да генерализују правило о одређивању непознатог дељеника.

У поступку даљег утврђивања на диференцираним садржајима ученици обједињују и проширују усвојена знања (Пример 20).

Пример 20. Који број треба поделити бројем 100 да би се добио број 150?
Једначина:____
Провера: ____

Средњи ниво

Обраду садржаја о једначинама на средњем нивоу започињемо текстуалним задатком, који се односи на реалну животну ситуацију, на основу којег ученик састављa и решава одговарајућу једначину са једном операцијом (Пример 21).

Пример 21. Мања је у шуми брала шумске јагоде. Када се вратила кући, одлучила је да све јагоде које је убрала равномерно подели са Тањом, Нином и Ањом, па је свака девојчица добила по 60 јагода. Колико је јагода Мања убрала?
Решење: С обзиром на то да не знамо колико је јагода Мања убрала, тај број обележавамо са _______.
На основу података датих у задатку састави одговарајућу једначину:
Једначина: ________ : _______= ________
Претходна једнакост представља једначину, са непознатим __________.

Како можемо израчунати колико је Миња убрала јагода, ако знамо по колико је јагода добила свака од четири девојчице?____________________.
Дакле, x = ________________________, x = _______,
тј. количник смо _____________ са ___________ и добили _________________.
Провера: _______________, ______________, решење једначине је ______________.
Одговор на питање у задатку:____.
На основу претходног примера изведи закључак о израчунавању непознатог дељеника.
Закључак: ____.
Ако су слова a, b и x замена за било који природан број, закључујемо да ако је $x : a = b$, онда је x =_______ · ________ (a, b и x су из скупа N).

У Примеру 21, полазећи од текстуалног задатка који одсликава практичну животну ситуацију, хеуристички смо водили ученика да открије однос између познатих и непознатих вредности у задатку и на основу тога састави и запише одговарајућу једначину $x : 4 = 60$.

Затим се ученик питањима води до открића да ће број јагода које је Миња убрала у шуми одредити тако што ће помножити број девојчица са бројем јагода које је добила свака од њих, што језиком формалне нотације записује као $x = 4 \cdot 60$. Апстраховањем и уопштавањем ученик закључује да се непознати дељеник добија множењем делиоца и количника и алгебарски записује: $x = 240$. Тачније, за изналажење решења дате једначине ученик је користио везу између операција множења и дељења.

Одговор на питање у задатку би гласио да је Миња убрала 240 јагода. Следећи корак у процесу решавања дате једначине јесте провера тачности решења. На крају, ученика са средњег нивоа постигнућа водимо до открића симболичког записа вербално исказаног правила које се односи на поступак решавања једначина са непознатим дељеником.

Како бисмо проширили ученичко разумевање ових садржаја, предвидели смо и активности у оквиру којих ученик треба да за дату једначину саставља одговарајући текст задатка.

Напредни ниво

Диференцијацијом захтева за напредни ниво предвидели смо да ученик решава једначине (са две операције) у којима је непознат елемент дељеника у скупу N. Да би ученици успешно решавали овај облик једначина, неопходно је да добро познају структуру аритметичких израза. На основу познавања приоритета извођења рачунских операција, ученике најпре упућујемо да правилно схватају изразе. На пример: израз $99 : 3 - 20$ ученици теба да схвате као *разлику количника бројева 99 и 3 и броја 20.* Обраду сложених једначина започињемо текстуалним задатком који се односи на неку реалну животну ситуацију или активност (Пример 22).

Пример 22. Неда је имала одређени број сличица. Од брата је добила још 260, па је затим све сличице поделила седморици другова, тако да је свако од њих добио по 150 сличица. Колико је Неда имала сличица?
Решење: Како не знамо колико је Неда имала сличица, тај број ћемо обележити са нпр. x (може и неко друго слово!).
Постави одговарајућу једначину на основу услова из задатка:

(x +______) :______ = ________.
Овај израз представља количник ______________________________ и броја_______.
Дакле, дељеник је израз_____________, делилац је _______, а количник је ________.
У овој једначини је непознат _______________________. (подвуци га)
Реши једначину (издвајамо непознато и примењујемо научени поступак решавања једначина):
x + ______=________________
x +_____= _____ – сада смо добили једначину са непознатим___________.
Ову једначину си научио(ла) да решаваш раније.
x =____________
x = ____
Провера: (____ +____) : ____=_____
______: ______=_____
______ =_______
Решење једначине је број ______.
Одговор на питање у задатку: ____________________________________.

У Примеру 22 ученике упућујемо да анализирају текст задатка и на основу описаних услова поставе одговарајућу једачину: (x + 260) : 7 = 150. Затим од њих тражимо да правилно прочитају израз као количник збира бројева x + 260 и броја 7. У даљем поступку наводимо ученике да увиде израз у коме се појављује непознати број x, и упућујемо их да тај израз посматрају као непознати дељеник. Након што се израчуна вредност непознатог дељеника (x + 260), почетна сложена једначина се своди на просту, x + 260 = 1050, у којој фигурише непознати сабирак. Последњи корак у процесу решавања сложених једначина јесте провера тачности добијеног решења.

У процесу даљег утврђивања ученици на напредном нивоу решавају сложене текстуалне и проблемске задатке моделовањем у једначине (Пример 23).

Пример 23. Бака је петину своје пензије поделила тројици унука тако да је сваки од њих добио по 1000 динара. Колика је бакина пензија?
Једначина: ____
Провера: ____

*3.7.3. Методички приступ обради садржаја о **Неједначинама са сабирањем** применом учења путем открића на диференцираним садржајима*

Претходно је истакнуто да учење садржаја о неједначинама на млађем основношколском узрасту прате бројне потешкоће. Чини се да се процес решавања неједначина своди на механичку примену научених корака по утврђеном редоследу. Бројни аутори широм света су проучавали проблеме ученика у учењу садржаја о неједначинама, и покушали су да осмисле методичке поступке како би им приближили ове садржаје и омогућили им да их усвоје са разумевањем. Наш модел учења се базира на претпоставци да ће ученици успешно усвојити садржаје о неједначинама ако самостално дођу до закључака о поступку њиховог решавања, и то на садржајима који су прилагођени њиховим могућностима, интересовањима итд. Како бисмо садржаје приближили могућностима ученика, извршили смо операционализацију захтева на три нивоа. За наставну јединицу *Неједначине са сабирањем* у четвртом разреду предвиђена је следећа диференцијација захтева:

Основни ниво: Ученик треба да:

– препознаје записе који представљају неједначине са сабирањем и непознату компоненту у њима и вербално их именује;
– записује скуп решења неједначине исправном употребом симболичке нотације ({,} и ∈);
– зна таблично да одреди скуп решења неједначине са сабирањем у једноставним случајевима;
– зна поступак одређивања решења експлицитно дате неједначине са сабирањем, али без дубљег разумевања истог.

Средњи ниво: Ученик треба да:

– схвати поступак решавања и одређује скуп решења неједначине са сабирањем користећи знања о решавању једначина са сабирањем и уз функционалну примену правила о зависности збира од промене сабирака;
– за текстуалне задатке саставља и решава одговарајућу неједначину са сабирањем.

Напредни ниво: Ученик треба да:

– саставља одговарајућу неједначину на основу датог скупа решења;
– решава двоструке неједначине (са два знака неједнакости);
– решава сложеније текстуалне задатке помоћу неједначина са сабирањем.

Истраживачки задатак који смо поставили пред ученике гласи: Открити поступак решавања неједначина са непознатим сабирком.

Основни ниво

Имајући у виду претходне захтеве, обрада садржаја о неједначинама путем учења путем открића на основном нивоу може започети обнављањем знања о симболичком записивању неједначина и употреби симбола {,} и ∈ за записивање скупа решења неједначине, као и о табличном одређивању скупа решења неједначине. Неједначине се помоћу таблице решавају тако што се у први ред табеле уписују могуће вредности непознатог броја. У други ред се уписују вредности неједначине за сваку вредност непознатог броја. Након тога, из табеле се читају оне вредности непознатог броја за које је дата неједнакост тачна, и на крају се записује скуп решења неједначине уз помоћ скуповно-теоријске нотације (Пример 24).

Пример 24. Реши неједначину: $x + 1000 < 1010$
Дата неједначина представља неједначину са непознатим______________.
За решавање неједначина се може користити табела. У једном реду табеле су уписане могуће вредности непознатог броја x. У други ред упиши вредности израза $x + 1000$ за сваку вредност непознатог броја.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x + 1000$	1000	1001											

Из табеле прочитај вредности x за које је неједнакост $x + 1000 < 1010$ тачна.

Скуп решења неједначине $x \in \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

Следећи корак у изучавању садржаја о неједначинама на основном нивоу односи се на решавање једноставнијих облика неједначина које су само симболички представљене. Од ученика најпре захтевамо да препознају непознату компоненту у датој неједначини, а потом их путем питања на листићу водимо до открића поступка решавања. Најпре их упућујемо да у неједначини знак неједнакости замене знаком једнакости како би добили одговарајућу једначину коју су већ претходно научили да решавају. Приликом одређивања скупа решења неједначине ослањамо се на примену правила зависности резултата од промене компонената, тј. подсећамо ученика када резултат рачунске операције расте (опада) у зависности од промене компонената на основу чега их наводимо да открију и запишу скуп решења (Пример 25).

Пример 25. Реши неједначину: 620 + x > 750

Дата неједначина представља пример неједначине са непознатим _______________. У неједначини знак неједнакости замени знаком једнакости и реши добијену једначину:

$620 + x =$ _______ (Једначина са непознатим _______________)

$x =$ _______ – _______

$x =$ _________

Треба одредити када је збир $620 + x$ већи од _______.

Знамо да се збир повећава (расте) када се један од сабирака повећава, па ће се вредност израза $620 + x$ повећавати ако се x _________, тј. $x >$ ______

Скуп решења неједначине је: $x \in \{\_\_\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_\_ ....\}$

Средњи ниво

Обраду садржаја о неједначинама на средњем нивоу можемо започети текстуалним задатком који има одлике реалног контекста за чије решавање ученик треба самостално да састави одговарајућу неједначину. Ученик треба да увиди односе који постоје у задатку и закључи које вредности су познате, а које су непознате, на основу чега саставља одговарајућу неједначину. Осим састављања неједначина, диференцијацијом захтева за средњи ниво постигнућа предвиђено је да ученик схвати поступак решавања неједначине (који се заснива на решавању одговарајуће једначине) и одређује скуп решења исте уз функционалну примену правила о зависности резултата од промене компонената, као и да проверава тачност решења неједначине. Примена правила о зависности резултата од промене компонената у поступку одређивања скупа решења неједначине посебно је значајна јер омогућава ученицима да овај поступак усвоје са разумевањем, тј. да схвате смисао одређивања знака неједнакости у поступку решавања. Провера тачности решења неједначине врши се тако што се у полазну неједначину променљива замени неком од нађених вредности из скупа решења и утврђује се тачност добијене неједнакости. Оно на шта посебно треба скренути пажњу ученицима приликом одређивања скупа решења неједначина јесте изводљивост рачунских операција у скупу N_0 (Пример 26).

Пример 26. На паркингу је било 1100 аутомобила. Након што је пристигло још неколико аутомобила, а ниједан није отишао, на паркингу је било више од 1370 аутомобила. Колико је аутомобила могло доћи на паркинг?

Решење: У задатку је познато да је на паркингу било ________________ аутомобила. Непознат је ____ и означићемо га са *x* (или неким другим словом). Након што је на паркинг дошао одређени број аутомобила, било је _____________ од _____________ аутомобила. То записујемо:

$x +$_______ > _______

Добили смо неједначину са непознатим ______________. У неједначини знак неједнакости замени знаком једнакости и реши добијену једначину:

_______ $+ x =$ _______

$x =$ ______________

$x =$ _________

Треба одредити када је збир ______ $+ x$ већи од______. На основу правила о зависности збира од промене сабирака вредност збира ______ $+ x$ расте (повећава се) када се сабирак *x* ____________.

Скуп решења неједначине је: $x \in \{$_______, _______, _____, ______....$\}$

Тачност решења проверавамо тако што у полазној неједначини *x* заменимо неком од нађених вредности и утврђујемо да ли важи добијена неједнакост.

______$+ x >$_______

_____+ _____ > ______ (*x* замени неким решењем из скупа решења)

_____> ______

Закључак: Неједначине са сабирањем решавамо тако што најпре одредимо непознати сабирак или умањилац, а затим одређујемо знак неједнакости примењујући правило зависности_____________________________________.

Након што ученици довољно увежбају поступак решавања у даљем раду, неједначине могу решавати директно преко неједнакости (Пример 27).

Пример 27.

$x + 1100 > 2550$

$x > 2550 – 1100$

$x > 1450$

Напредни ниво

Захтевима за напредни ниво постигнућа предвиђено је да ученици решавају сложеније текстуалне задатке помоћу неједначина, али и да решавају сложеније неједначине (са две операције) које су изнад оквира програма текућег разреда (Пример 28).

Пример 28. У каси једне књижаре је 6500 динара. Дошла је Маја и купила две књиге по истој цени. Након тога је у каси је било мање од 7500 динара. Колика би могла бити цена једне књиге?

У задатку је непозната ____________________________________, и обележићемо је са *x* (може и неким другим словом!).

Напиши преко бројевног израза укупну суму новца коју је Маја дала за куповину 2 књиге: ______$\cdot$ x. Напиши бреко бројевног израза укупну суму новца у каси након куповине књига:______ + ______$\cdot$ x. Из услова задатка, та сума је_________ од _______ динара.
Запиши одговарајућу неједначину: ______ + ______$\cdot$ $x <$ ______
Ово је неједначина са непознатим ________________________.
Вредност збира ______ + ______$\cdot$ x у неједначини треба да буде __________од ________.
Сети се правила о зависности збира од промене сабирака. Да би се збир смањивао, променљиви сабирак ______$\cdot$ x, треба да се ______________.
______$\cdot$ $x <$ _______ –_______
______$\cdot$ $x <$ _______
$x <$ _____ : _____ (да би се производ смањивао, чинилац треба да се ________)
$x <$ _________
Скуп решења неједначине је:

$$x \in \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$$

Одговор:____.

У Примеру 28 је представљен методички поступак обраде сложених неједначина путем учења путем открића. Задатак је дат у текстуалној форми и односи се на реалну животну ситуацију, која даје повод за записивање сложене неједначине. Ученици се, најпре, хеуристичким питањима воде да открију оно што је у задатаку познато и непознато, а затим записују одговарајућу неједначину. Да би решили добијену неједначину, упућујемо ученике да реше одговарајућу сложену једначину, а да би одредили знак неједнакости, упућујемо их на функционалну примену правила о зависности резултата од промене компонената.

Када ученици довољно увежбају садржаје који се односе на решавање неједначина, можемо од њих захтевати да симболички записују вербално исказана правила која се односе на поступак решавања неједначина са једном операцијом.

У процесу даљег утврђивања ученици вежбају задатке у којима се од њих захтева да решавају двоструке неједначине (са два знака неједнакости) (Пример 29), као и да састављају одговарајућу неједначину на основу датог скупа решења (Пример 30).

Пример 29. Стева је у касици имао 3000 динара. Добио је џепарац од маме и утврдио да има довољно пара да купи књигу која кошта 4370 динара, али нема довољно пара за књигу која кошта 4700 динара. Колики је могао бити Стевин џепарац?
Неједначина:____
Одговор:____

Пример 30. Састави неједначину са сабирањем чији је скуп решења $\{1001, 1002, 1003...\}$
Неједначина:____

3.7.4. Методички приступ обради садржаја о ***Изразима са променљивом*** *применом учења путем открића на диференцираним садржајима*

Појмови променљиве и непознате представљају кључне појмове у алгебри (Skemp, 1986, према: Akgün & Özdemir, 2006). У вези са тим, правилно развијање ових појмова неопходно је започети још од најранијег школског узраста.

Увођење појма *непозната* и симболичко означавање непознатог броја предвиђа се *Правилником о програму наставе и учења за други разред основног образовања и васпитања* (2018). У трећем разреду се предвиђа увођење појма променљиве, где се слово употребљава у својству симбола променљиве (*Правилник о наставном програму за трећи разред основног образовања и васпитања,* 2019). *Правилник о наставном програму за четврти разред основног образовања и васпитања* (2019) предвиђа да се ученици оспособе да одређују вредност израза са променљивом за различите вредности слова у скупу N_0, што представља изузетно значајну активност за развој променљиве.

Развијање појма променљиве и непознате на овом узрасту није једноставно, па је зато неопходно при обради ових садржаја користити различите приступе како би се они приближили мишљењу ученика на млађем школском узрасту. Наш модел учења подразумева усвајање ових појмова путем открића на садржајима који су диференцирани на три нивоа у складу са могућностима ученика. За потребе израде модела учења садржаја о *изразима са променљивом* у четвртом разреду израдили смо следећу операционализацију захтева:

Основни ниво: Ученик треба да:

- препозна и вербално именује израз са променљивом;
- одређује вредност израза са променљивом за дате вредности променљиве са једном рачунском операцијом.

Средњи ниво: Ученик треба да:

- одређује вредност израза са променљивом за дате вредности променљиве таблично;
- саставља и одређује вредност израза са променљивом за дате вредности променљиве са највише две рачунске операције.

Напредни ниво: Ученик треба да:

- решава текстуалне задатке формирањем израза са променљивом;
- саставља, чита и рачуна вредност израза са променљивом за дате вредности променљиве са више операција.

Истраживачки задатак који смо поставили ученицима гласио је: Открити како се саставља израз са променљивом и како се одређује његова вредност за дате вредности променљиве.

Основни ниво

У креирању садржаја којима смо желели да ученици усвоје знања о изразима са променљивом на основном нивоу, пошли смо од следећег примера:

Пример 31. Одреди вредност израза $a \cdot 2$.

Слово *у* овом изразу се назива променљива и пише се малим писаним словима латинице, може нпр: *x, y, a, b, c*...

За разне вредности променљиве *а* израз $a \cdot 2$ ће имати различите вредности. Ако је:

$a = 0$, онда је $0 \cdot 2 =$________.

$a = 1$, онда је ______ $\cdot$ 2 = ___________.
$a = 2$, онда је _______________________.
$a = 3$, онда је __________________________.
Шта се дешава са вредношћу израза када се мењају вредности за ***a***?
____.

Закључак: Изрази који садрже слово чија се бројевна вредност може мењати називају се изрази са___________________.
Вредност израза са променљивом израчунавамо тако што променљиву заменимо __________.

У Примеру 31 је представљено како се ученици на основном нивоу воде до открића о одређивању вредности најпростијих израза са променљивом. Тачније, ученици се упућују да за разне вредности променљиве a одређују вредност израза $a \cdot 2$ и да упоређују његову вредност евалуирајући израз за више вредности променљиве.

У процесу даљег утврђивања ученици могу да решавају задатке као у примерима 32 и 33.

Пример 32. Заокружи све изразе са променљивом:
а) $829 + 140 - 49 \cdot 2$
б) $x \cdot 25 + 293$
в) $(232 - c) \cdot 100$
г) $(122 : 2) + 234$
Пример 33. Одреди вредност израза $a + 420$, ако је $a = 125$.

Средњи ниво

Као ослонац у остваривању дефинисаних захтева за средњи ниво постигнућа у вези са схватањем израза са променљивом и одређивањем његове вредности, може послужити Пример 34.

Пример 34. Марко је замислио неки број x. Двоструку вредност замишљеног броја је повећао за 2400. Напиши одговарајући израз.
Тражени израз има облик: _____ $\cdot$ _____ +_____
Слова у овом изразу се називају променљиве и пишу се малим писаним словима латинице: *x, y, a, b, c*... Променљиве могу имати више бројевних вредности.
Вредност овог израза можемо одредити и помоћу таблице тако што ћемо за дате вредности променљиве x и y израчунати вредност израза и уписати је на одговарајућем месту у табели:

x	100	200	300	400	500	600	700	800	900
_____ $\cdot$ _____ +_____									

Шта се дешава са вредношћу израза када се мења вредности за x?
____.
Закључак: Изрази који садрже слово (или више слова) чија се бројевна вредност може мењати називају се изрази са___________________.

Вредност ових израза можемо израчунати тако што _______________________________________.

У Примеру 34 од ученика се најпре захтева да анализира текст задатка и на основу тога састави одговарајући израз који садржи променљиву. Након тога, пред ученика се поставља захтев да одреди вредности састављеног израза за разне вредности променљиве које су дате таблично. Таблица, дакле, омогућава сагледавање и схватање функционалног односа који постоји између компонената у изразу и омогућава процес закључивања о промени вредности израза услед варирања вредности променљиве.

У циљу даљег увежбавања ових садржаја добре су вежбе као у Примеру 35.

Пример 35. Напиши израз који ће одређивати број за 50 већи од троструке вредности променљиве x.

Напиши одговарајући израз: ____________________________

Одреди вредност претходног израза за дате вредности променљивих у табели.

x	100	200	300	400	500	600	700	800
______________								

Напредни ниво

У циљу остваривања захтева предвиђених за напредни ниво, обраду садржаја о изразима са променљивом можемо започети следећим примером:

Пример 36. У продавници је било a килограма воћа. Први дан је продато b килограма, други дан c килограма мање него што је остало после првог дана. Колико је килограма воћа продато другог дана?

После првог дана у продавници је остало ______–______ килограма воћа.

Из услова задатка напиши у облику израза колико је килограма воћа продато другог дана:____

Израчунај вредност претходног израза за $a = 1356$, $b = 956$, $c = 20$.

____

Слова у овом изразу могу имати више бројевних вредности и називају се _______________________.

Закључак: Изрази који садрже слово (или више слова) чија се бројевна вредност _________________ називају се изрази са____________________.
Вредност ових израза можемо израчунати тако што___________________.

У Примеру 36 ученик се, најпре, води да анализом садржаја задатка запише одговарајући израз у коме фигуришу три променљиве. Затим се за дате вредности променљивих од ученика тражи да одреди вредност израза поштујући приоритет извођења рачунских операција. Све ове активности воде ученика до открића о одређивању вредности сложених израза са више променљивих.

За увежбавање ових садржаја значајни су задаци као у Примеру 37 и Примеру 38.

Пример 37.
а) Састави следеће изразе:
збир количника бројева a и 12 и количника бројева 180 и 12 (одреди вредност израза ако је a = 228) ____
производ збира бројева 12 и a и разлике бројева c и 15_________________
б) Прочитај следеће изразе:
$m + b \cdot n$ ____________________________________
$(458 + n) - b$ ____________________________________

Пример 38. У воћњаку има a стабала шљива, b пута више стабала крушака него шљива, а јабука је за c више него шљива. Колико стабала има у воћњаку? Напиши одговарајући израз. _________________________

3.8. Улога учитеља и позиција ученика у учењу путем открића и диференцијацији садржаја у настави математике

Учење путем открића у настави математике поставља ученика у центар наставног процеса, при чему он постаје субјект процеса учења, док учитељ добија улогу координатора и медијатора. Ученик у процесу учења има задатак да проучава одређени проблем, да открива нове релације, особине и законитости у садржају који истражује. Нова улога подразумева да ученик у што већој мери ради самостално или у сарадњи са вршњацима, при чему се ангажује у активностима као што су дебате, истраживачки рад, решавање стварних или симулираних проблема, извођење експеримената (Podrug, 2017). Учитељ у процесу учења путем открића има задатак да код ученика подстакне радозналост и мотивацију, што подразумева висок степен стручности, креативност и добру методичку припрему.

Једно од темељних питања приликом учења путем открића јесте: *Да ли учитељ треба да води процес учења или ученику треба да буде допуштено да следи сопствена интересовања без ограничавања*? У учењу путем открића постоји могућност да ученици у процесу откривања не открију оно што је било предвиђено да сазнају или, чак, да дођу до погрешних открића, те се поставља питање у којој мери и којим методама учитељ треба да води ученике у процесу откривања да би тај процес резултирао адекватним открићима (Hammer, 1997).

Рани модели учења путем открића наглашавали су да ученик у процесу учења ради мање или више независно, док савремена теорија и емпиријска евиденција сугеришу да је одређени степен подршке и вођења ученика пожељан и потребан. Мајер (Mayer, 2004) прави разлику између чистог открића, у којем је ученик у потпуности самосталан у процесу учења, и вођеног открића, које подразумева активно и према учениковим потребама прилагођено вођење. Самостално откривање води бихевиоралној активности, али може бити недовољно да подстакне когнитивну активност, путем које ученик организује и реорганизује знање, разматра различите стратегије и перспективе и прави метакогнитивне процене. Према схватању Мајера, управо ове менталне активности треба подстицати у настави заснованој на открићу.

Чи (Chi, 2009, према: Honomichl & Chen, 2012: 615), слично Мајеру, прави разлику између три врсте ангажовања у процесу учења – активно, конструктивно и интерактивно. Активно ангажовање се односи на бихевиоралну активност, као што је манипулисање објектима или подвлачење делова текста. Према мишљењу овог аутора, конструктивно и интерактивно ангажовање води стварању новог знања. Конструктивне активности се односе на креације које настају самосталном активношћу ученика, као што је предвиђање или поређење примера, док се интерактивне активности заснивају на ко-креацији знања која настају у интеракцији између ученика и учитеља.

У истраживању које су спровели Борек и сарадници (Borek, McLaren, Karabinos & Yaron, 2009), ученици су били распоређени у три групе. Једна је решавала одређени задатак путем слободног откривања, што је подразумевало да је ученицима задат проблем који треба да реше, а у процесу решавања су добијали минималну асистенцију и одговор, који се састојао у информацији о тачности коначног решења и решења подзадатака. Такође, ученици су добијали информацију и шта је тачно решење уколико самостално нису тачно решили задати проблем. Друга група је задатак решавала путем вођеног открића. То је подразумевало да ученици добијају одговор када погреше и удаље се од тачног решења, али не добијају конкретан одговор шта су погрешили. Током решавања ученици добијају сугестије уколико их затраже, и то на три нивоа – на почетном нивоу инструкције су имплицитне, потом постају експлицитније, да би тек на последњем нивоу ученицима била дата конкретна солуција. У трећој ситуацији ученици су добијали директне инструкције и непосредан одговор након сваког корака у решавању. Истраживање је показало да је група испитаника која је задатке решавала у ситуацији вођеног открића испољила боље појмовно разумевање материјала који су учили, у поређењу са другим двема групама. Истраживачи ово објашњавају већом мотивацијом, која је била резултат могућности да самостално доносе одлуке. Истовремено, ученици су у овој ситуацији добијали помоћ када им је била потребна, што је умањило осећање фрустрације. У трећој ситуацији ученици су били демотивисани услед добијања превише помоћи у решавању, док су ученици у ситуацији учења путем слободног открића били фрустрирани јер су добијали недовољно подршке. Налази овог истраживања су у складу са социјално-конструктивистичком теоријом према којој подршка омогућава процес учења у зони наредног развоја (Vygotsky, 1962, према: Alfieri, Brooks, Aldrich &Tenenbaum, 2011).

Према савременом приступу и емпиријским истраживањима, предлаже се да активности учитеља у процесу учења путем открића укључе:

1. стратешку презентацију материјала,
2. повратне информације,
3. потпитања и самообјашњења (Honomichl & Chen, 2012: 616).

Пажљив одабир, структуирање и селекција задатака и материјала имају важну улогу у процесу подстицања учења путем открића. Када се сусрећу са новом облашћу или концептом, ученицима може бити тешко да самостално одреде аспекте и детаље на које треба да се фокусирају. Улога учитеља на овом месту јесте да редукује сложеност и да смањи могућност заблуда и грешака, путем стратешког селектовања и презентовања проблема и примера. Наставни садржаји који се презентују ученику морају да буду дизајнирани тако да су у складу са његовим развојним могућностима. Истраживања (Rittle-Johanson & Star, 2007) показују да је поређење успешна техника стратешке презентације материјала која подстиче процес учења путем открића. Утврђено је да је код ученика који су поредили различите поступке у решавању истог проблема дошло до повећања процедуралног знања и флексибилности, у поређењу са ученицима који су различите поступке анализирали изоловано. Поређење, као когнитивна активност, помаже ученицима да уоче везе између атрибута, те да развију апстрактне шеме за решавање проблема и олакшава нове интерпретације информација. Поређења могу бити посебно корисна у настави математике, где карактеристике проблема и променљиве систематски варирају.

Обезбеђивање повратне информације ученицима једна је од суштинских одлика учења путем открића. Улога учитеља јесте да помаже процес откривања тако што прати ученииков рад на одређеном проблему и скреће му пажњу на грешке, илуструје погрешне стратегије које не воде до решења, даје сугестије за превазилажење погрешних претпоставки и грешака. Ученик у процесу самосталног истраживања добија повратну информацију и из властитог, непосредованог искуства, пратећи исход истраживања у којем се ангажовао. Ипак, грешке и погрешне претпоставке не морају увек бити уочене од стране ученика, посебно уколико нису експлицитне или уколико ученикове метакогнитивне способности нису довољно развијене. У овим ситуацијама учитељ треба да обезбеди ученику подупирање, пруживши му потребну повратну информацију, како би омогућио успешно учење. У учењу путем открића је важно да повратна информација не помери фокус са процеса учења. Наиме, ученици не треба да постану фиксирани на добијање повратне информације као крајњи исход процеса учења, већ повратну информацију треба да схвате као средство за стицање знања (Honomichl & Chen, 2012).

Учитељ у учењу путем вођеног открића треба систематично да користи потпитања како би усмерио пажњу ученика на важне карактеристике проблема, те како би илустровао заблуде и погрешке. На овај начин се доприноси дубљем разумевању и већем трансферу наученог. Такође, учитељи треба да подстичу ученике да наводе и осмишљавају примере појмова које уче, што олакшава разумевање појмова и трансфер наученог. Подстицање ученика да својим речима објасне поступак решавања проблема у којем су били ангажовани такође има позитиван ефекат на исходе учења путем открића (Honomichl & Chen, 2012).

Брунер је предложио неколико начина како да учитељи припреме ученике за учење путем открића:

1. Развити код ученика став да проблеме могу самостално решавати, чак и када су суочени са ограниченим или неповезаним информацијама.

2. Приступати новом садржају који је потребно научити на начин аналоган пијажетанском процесу асимилације и акомодације. Брунер, као и Пијаже, процес учења, односно сазнавања, разуме као конструкцију, уместо као акумулацију. Учење, тако, значи развој, креирање нових асимилационих схема путем постепеног акомодирања постојећих, а посредством субјективног искуства са физичком и социјалном реалношћу.

3. Код ученика развијати и одржавати одговарајућу мотивацију за учење.

4. Подучавати ученике стратегијама и хеуристикама за процесирање информација и решавање проблема. Организација наставе би требало да стимулише развој сазнајних способности ученика и способности примене стечених знања у новим ситуацијама. Такође, потребно је да се омогући да сви ученици, са својим личним особеностима, уче активно.

5. Подстицати ученике да се ослањају на сопствене идеје и закључке на продуктиван начин (наведено према: Gojkov i Stojanović, 2011).

Можемо да закључимо да учење путем открића у настави математике ученика поставља у центар наставног процеса, као активног субјекта који самостално открива, истражује и решава проблеме. Улога учитеља у процесу наставе путем открића такође је активна. За разлику од уобичајеног приступа, учитељ је овде, пре свега, мотиватор и помоћник у процесу учења. Овакав приступ захтева од учитеља стручност и добро познавање могућности и способности ученика. Учитељ фацилитира и подупире истраживање ученика тако што прати његов рад на проблему, указује му на грешке и даје сугестије за њихово превазилажење. Инструкције које ученици добијају веома су важне за одржавање и подстицање мотивације за учење, истраживање и откривање. Наиме, самостално откривање код ученика развија мотивацију захваљујући аутономији која им се даје у процесу учења, али помоћ, одмерена у складу са способностима, коју ученици добијају када им је потребна, спречава фрустрацију и пад мотивације. Од једнаког значаја јесте и стратешко селектовање и презентовање садржаја и примера, у складу са развојним могућностима ученика, што подразумева добру методичку припрему учитеља.

Разматрајући улогу учитеља у диференцираној настави математике, закључујемо да је она тешка, „јер се учитељ налази пред захтевом заједничке разредне наставе, али и пред захтевом да уважава способности и могућности појединих ученика, односно група ученика. Улога учитеља се мења пошто се ученици, углавном, упућују на самосталан рад па наставник, поред улоге руководиоца и предавача, добија и улогу сарадника, саветника, ментора и помагача у настави“ (Дејић и Милинковић, 2012: 101).

Такође, диференцијација поразумева и различит приступ различитим категоријама ученика који је веома важан, како приликом предавања, тако и током самосталног рада ученика. Дејић и Егерић препоручују да учитељи током обраде садржаја користе следеће поступке у раду са слабијим ученицима:

– држе их у видном пољу током објашњавања садржаја,

– чешће им постављају питања,

– више користе очигледна наставна средства,

– подстичу их да учествују у закључивању, захтевају од њих да изводе закључке и генерализације (Дејић и Егерић, 2003).

Из самог појмовног одређења диференциране наставе и учења путем открића уочавамо да је диференцијација блиска настави заснованој на учењу путем открића, у смислу да је циљ диференцијације да се сваки појединачни ученик ангажује у наставном процесу. Подсетимо се, такође, да је у одређење учења путем открића укључено схватање о важности индивидуалног приступа. Дакле, као заједничке одреднице диференциране наставе и учења путем открића можемо да наведемо следеће – активност ученика у наставном процесу, значајну улогу учитеља у наставном процесу, са посебним акцентом на значај континуиране процене и праћења способности, интересовања и рада ученика, те индивидуализовани приступ у којем се уважавају разлике између ученика. Ипак, у постојећој литератури не могу се пронаћи радови који се баве функционалним повезивањем учења путем открића и диференцијације наставе.

3.9. Улога уџбеника математике у функцији учења путем открића и диференцијације садржаја

Уџбеник „као дидактички обликована књига предвиђена за школско учење“ (Шпановић, 2008: 63) представља основни и најраширенији извор информација намењен ученицима. Усклађен са наставним програмом и са развојним могућностима ученика, уџбеник представља основну спону између ученика и образовних садржаја, али и учитеља и ученика, и непосредно се одражава на организацију и моделовање наставног процеса.

У дидактичко-методичкој литератури уџбеник се, углавном, дефинише као „обавезна школска књига (настала законски утврђеном процедуром), чији је примарни задатак конкретизација наставног програма, односно предвиђених садржаја које ученици треба да усвоје. Конципиран према важећем наставном плану и програму, дидактичко-методички и ликовно-графички приређен за самостално учење, уџбеник упућује и на друге изворе знања“ (*Педагошки лексикон*, 1996: 522).

У тексту *Закона о уџбеницима Републике Србије* истиче се да је „уџбеник основно дидактички обликовано наставно средство, у било ком облику или медију, које се користи у образовно-васпитном раду у школи за стицање знања, вештина, формирање ставова, подстицање критичког размишљања, унапређења функционалног знања и развој интелектуалних и емоционалних карактеристика ученика и полазника, чији су садржаји утврђени планом и програмом наставе и учења и који је одобрен у складу са овим законом“ (2018: члан 2).

Ивић и сарадници говоре о суженом и проширеном одређењу уџбеника. Према суженом одређењу, уџбеник се у нашој школи појављује као преносилац садржаја школског програма, тј. као „операционализован школски програм“ (Ивић, Пешикан и Антић, 2008: 23). Преко уџбеника су учитељи добијали јаснији увид у захтеве програма, а ученици су путем уџбеника усвајали чињенице и информације које су прописане програмом. Дакле, његова „основна функција је била трансмисија (преношење) информација, чињеница, знања које је предвиђено школским програмом“ (Ивић и сар., 2008: 23). Према проширеном одређењу, у савременој литератури под уџбеником се подразумева свака књига и сваки медиј који се користи у наставном раду.

Међутим, претходно поменути аутори се залажу за концепцију школе у којој је учење и онај ко учи у центру пажње, што захтева другачије одређење уџбеника. Од уџбеника се очекује да има развојно-формативну функцију и да својом дидактичком апаратуром потпомаже конструкцију знања. Због тога је, приликом одређења уџбеника, потребно „извршити померање са истицања садржаја који се учи на процес усвајања, тј. учења тог садржаја. Друго важно померање је од директног преношења (трансмисије) знања на учење као конструкцију знања“ (Ивић и сар., 2008: 24–25).

Дакле, према одређењу претходно поменутих аутора, „уџбеник није више само средство за конкретизацију школског програма, нити је средство за репродуктивно учење, већ је уџбеник врло специфичан медиј који се не може одредити изван своје основне функције – да омогући учење“ (Ивић и сар., 2008: 26). Према томе, „уџбеником се може сматрати свако наставно средство (или комбинација наставних средстава) које садржи систематизована знања из неке области која су дидактички тако обликована за одређени ниво образовања и одређени узраст ученика да имају развојно-формативну улогу и учествују у изградњи ученичких знања“ (Ивић и сар., 2008: 27).

Пошто учење не подразумева акумулацију знања, већ његову конструкцију, то се оно не може остварити без активности онога ко учи. Зато уџбеник мора да ствара ситуације које ће активирати ученика и пружати му могућност за конструкцију знања кроз самосталне активности. То значи да се уместо нуђења готових чињеница, у тексту савременог уџбеника нуде „дидактичка решења која ученика воде ка самосталном откривању непознатог, односно усмеравају ученике да постављају питања и одговарају на њих, размишљају и решавају проблеме, тј. стављају ученике у активан однос према садржају“ (Ивић и сар., 2008: 28). Из тога произилази да „уџбеник као основни извор учења у школи мора бити конструисан као радна, акциона књига, књига која ће ученика чинити субјектом сопственог развоја, субјектом промена над самим собом“ (Влаховић, 2009: 1095).

Оно по чему је уџбеник математике специфичан у односу на остале уџбенике јесте то да највећи део његовог садржаја чине задаци. „Задатак се, због свестране улоге коју има, може сматрати основним структуралним елементом уџбеника математике у почетној настави математике. Њима се знања усвајају, утврђују, систематизују, понављају и проверавају“ (Бозало и Самарџић, 2016: 367). Једном речју, њима се реализују предвиђени циљеви наставног процеса.

Дакле, главно средство за стварање ситуација учења у уџбенику математике јесу задаци. Уводни задаци на почетку наставне јединице могу представљати „основу за довођење ученика у ситуацију у којој ће се јавити потреба за новим знањима до којих се може доћи увиђањем односа између онога што је дато и онога што се тражи. Тада уводни примери имају функцију основног текста“ (Ковачевић 2011: 79). Текст у виду вербалног изношења готових математичких знања у уџбеницима математике требало би да је сведен на неопходни минимум. Више би требало да је усредсређен на „саопштавање термина, правилан начин изражавања и коначну редакцију правила, дефиниција и чињеница. Његова функција је у учењу ученика математичком језику и симболици, ријечима којима се изражавају операције и појмови, прецизном и концизном изражавању математичких правила и законитости“ (Бозало и Самарџић, 2016: 366).

С обзиром на то да се у раду бавимо учењем путем открића, усмерићемо пажњу на елементе уџбеника који пружају основу за овај вид учења. Наиме, учење путем открића може да се оствари путем садржаја који упућују ученика на самосталну активност и воде га до откривања нових појмова, правила, алгоритама итд. У питању су задаци, налози, ситуације којима се градиво проблематизује и на које ученик нема спреман одговор, већ захтевају од њега суочавање са проблемом, постављање хипотеза, истраживање, откривање узрочно-последичних односа, повезивање садржаја, проучавање различитих извора знања, али и примену знања у пракси. Дакле, садржаји који пружају основу за учење путем откривања нису дати у готовом облику и не сугеришу решење проблема, већ захтевају од ученика мисаоне напоре и подстичу га на анализу, синтезу, апстракцију, генерализацију, памћење, компарацију, закључивање итд. Такође, учење путем открића може да се оствари и кроз појединачне примере који подстичу ученике да закључују о општим појмовима и својствима.

Да би уџбеник математике одговорио потребама савременог друштва, поред подстицања на самостално откривање и конструкцију знања, неопходно је да поседује садржаје који су прилагођени ученицима различитог нивоа способности, предзнања, мотивације, интересовања, једном речју, да задовољи потребе индивидуализоване наставе. Потребан је, дакле, уџбеник који уважава разлике између ученика. Подршка разноликости између ученика и поштовање индивидуалности сваког ученика кроз уџбеник математике може се остварити на различите начине, при чему Влаховић наводи следеће:

1) „садржаји уџбеника треба да буду организовани на различитим нивоима сложености, што пружа могућност ученицима да праве избор према својим могућностима;
2) уџбеници се реализују у две или више књига, или у виду више сепарата са садржајима који треба да задовоље различите потребе, афинитете, могућности, интересовања ученика;

3) избор и организација садржаја у уџбенику врши се на начин да се у оквиру њих сваком ученику нуди понешто (кроз основни текст, кроз налоге или на друге начине);

4) креирање налога за ученике различитих интересовања, могућности и сл;

5) уџбеници се конструишу као мултимедија пакети који у себи садрже штампани текст, текст у стрипу, видео-снимак, аудио-снимак, дијаслике, фолије, микрофилм, компјутрски диск и слично. Ученик користи онај извор или комбинацију извора која највише одговара његовом стилу учења и сл." (Влаховић, 2009: 1099).

Уџбеник са диференцираним садржајима, задацима, налозима итд. треба да омогући сваком ученику да отпочне процес учења са нивоа који одговара његовом предзнању, да учи сопственим темпом, али и да врши самоконтролу свог рада (Шпановић, 2008: 86). Како би уџбеник омогућио самостално учење ученика, наставни садржаји у њему треба да садрже што више конкретних примера одмерених према њиховим интелектуалним могућностима, са упутствима за самостални рад.

Узимајући у обзир претходно речено, закључујемо да се учење путем открића на диференцираним садржајима може остварити путем уџбеника математике само уколико су садржаји у функцији подстицања сваког ученика на самостално откривање и конструкцију знања, при чему су захтеви у оквиру садржаја различитих сложено-тежинских карактеристика и одмерени према различитим интелектуално-математичким способностима ученика, али и нешто мало изнад њихових стварних могућности, што им омогућава да буду развојно подстицајни. Тиме се омогућава сваком ученику да буде укључен у процес стицања знања до нивоа својих интелектуалних и когнитивних способности.

Све ово упућује на потребу брижљивог конципирања и дидактичког обликовања садржаја и задатака у уџбеницима математике који ће мисаоно активирати ученике, усмерити њихову пажњу и који ће иницирати закључке и водити конструкцији знања до неког задовољавајућег нивоа који омогућава уважавање индивидуалитета сваког ученика.

3.10. Педагошко-психолошке и дидактичке вредности учења путем открића и диференцијације садржаја у настави математике

Учење путем открића има вишеструке вредности у настави свих предмета, те и у настави математике.

Са педагошког аспекта, бенефити учења путем открића огледају се у следећем:

– „ученик је субјект наставног процеса;

– повећана је интелектуална активност ученика;

– ученици су самосталнији у раду;

– заступљен је продуктивни, стваралачки и истраживачки рад" (Simić, 2015: 109).

Психолошка вредност учења путем открића пре свега подразумева повећану мотивацију за учење, али и развој дивергентног, конвергентног и продуктивног мишљења.

Док се дидактичка вредност учења путем открића огледа у:

– „активном учењу ученика,

– осигуравању успеха у усвајању наставних садржаја (проактивно деловање, ученици се уче техници учења, заступљена је истраживачка активност и ученици брзо уочавају практичну корист од учења)“ (Simić, 2015: 109).

Радивојевић (2016) наводи следеће бенефите учења путем открића:

– „омогућава висок степен индивидуализације,

– подстиче интелектуалне потенцијале,

– појачава унутрашњу мотивацију,

– подучава ученике методама научног истраживања,

– подстиче мисаону активност ученика,

– омогућава квалитетније и трајније запамћивање садржаја који се учи“ (Радивојевић, 2016: 17).

Дакле, учење путем открића, поред тога што „развија опште способности ученика за образовање и учење, доприноси формирању свесне, сигурне, самосталне и интелектуално богате личности, оспособљене за самоучење“ (Радивојевић, 2016: 17).

Заговорници учења путем открића наглашавају да у процесу открића ученик разуме шта учи, ефикаснији је трансфер наученог на друге ситуације и проблеме, боља је ретенција наученог, ученик је мотивисан и заинтересован за садржај који учи, развија стратегије за решавање проблема и развија позитивне ставове према наставном предмету (Weimer, 1974).

Конкретно, Брунер у свом раду *Чин открића* (*The Act of Discovery,* 1961) као основне бенефите учења путем открића наводи:

1) **Повећање интелектуалних могућности, развој мишљења, ефикасније учење**. Учењем путем открића се уче информације које се касније ефикасно употребљавају за решавање проблема. Стављањем акцента на откриће у процесу учења утиче се на ученика да организује информације са којима се сусреће, не само на начин да открије правилност и повезаност, већ и да би избегао прикупљање информација без схватања какву употребу могу имати у будућим ситуацијама.

2) **Развој интринзичке мотивације.** Учењем путем открића ученик манипулише контекстом на активнији начин и постиже задовољство у самом решавању проблема. Брунер заступа становиште да од степена у којем ученик приступа учењу као процесу открића нечега, уместо учења о нечему, зависи степен мотивације независне од спољашње награде. Аутор заступа хипотезу да откриће само по себи делује мотивационо.

3) **Учење хеуристика за решавање проблема**. Брунерова претпоставка је да решавањем проблема путем открића ученик учи хеуристике за решавање проблема, које се потом вежбањем генерализују и постају стил решавања проблема који је примењив на готово све проблемске ситуације.

4) **Дуготрајније памћење.** Брунер сматра да садржаји који су у дугорочној меморији организовани у складу са интересовањима и когнитивном основом појединца бивају најдоступнији приликом присећања, тако да се и самосталним откривањем знања побољшава његово запамћивање (Bruner, 1961: 22–28).

Аутори у области (Mosca & Howard, 1997, prema: Castronova, 2002) као предности учења путем открића и његове дистинктивне одлике такође наводе:

– учење је активан процес;

– учење је оријентисано на процес, пре него на резултат;

– неуспех је важан;

– повратна информација (фидбек) је неопходна;

– постиже се дубљи степен разумевања.

Уместо просте рецепције садржаја која доминира у традиционалној настави, учење путем открића подразумева да су ученици ангажовани у практичним активностима, решавајући реалне проблеме. Од успостављања разредно-предметно-часовног система до последње четвртине двадесетог века улога ученика у васпитно-образовном процесу била је пасивна и подређена, а настава монотона и стереотипна. Пренос информација у традиционалној настави одвијао се једносмерно, без довољно простора за размену мишљења између учитеља и ученика, нити за прилагођавање наставе индивидуалним способностима и интересовањима ученика. Савремена школа је поставила ученика у центар наставног процеса, у којем активно учествују сви актери. Предуслов афирмације позиције ученика као активног субјекта наставног процеса јесте његова активна индивидуална партиципација у наставним и ваннаставним активностима (Мијановић, 2008). Омогућавајући ученицима интеракцију са наставним материјалом, манипулацију варијаблама, истраживање појава и прилика за примену откривених принципа, ученицима се пружа могућност да откривају обрасце односа између појава и њихове узрочно-последичне везе, што научено чини лако примењивим (Alfieri et al., 2011). Савремено организована настава математике омогућава ученицима да знања стичу кроз истраживање, откривање и решавање проблема, тако да сваки ученик у највећој могућој мери учествује у властитом развоју. Одређене делове градива ученици могу да савладавају самостално, уз потребан надзор учитеља. При томе је од највећег значаја да ученици самостално откривају каузалне везе и односе међу појавама, на основу властитог искуства. „Темпо рада је у потпуности прилагођен индивидуалним потребама, способностима и интересовањима ученика“ (Мијановић, 2008: 15). Неизвесност и динамичност услова живота у савременом друштву поставили су нове захтеве пред васпитање и образовање, које треба да буде усмерено на развој предузимљивости и иницијативе, личне одговорности и мотивације за учење. Да би се суочили са таквим захтевима, циљ савременог образовања треба да буде оспособљавање ученика да заузму проактивну позицију у односу на свет око себе (Шефер, Радишић и Јошић, 2012), што је управо један од исхода учења путем открића.

Приликом учења математичких садржаја путем открића фокус се са разултата учења помера на сам процес. Заправо, фокус у учењу путем открића је на томе како се учи. На овај начин ученици развијају вештине интерпретације и анализе информација, уместо просте репродукције информација (Castronova, 2002). Учење путем открића води бољем разумевању и дужој ретенцији знања захваљујући дубљем процесирању информација (Svinicki, 1998).

Неуспех се у овом облику учења види као позитиван и неопходан елемент. У овом облику наставе се не инсистира на проналажењу једног тачног одговора, док се доживљавање неуспеха схвата као нужна компонента успешног процеса учења. Обезбеђивање повратне информације се сматра есенцијалном компонентом у процесу учења путем открића. Могућност дискутовања о некој теми побољшава, продубљује и чини трајнијим знање ученика. Због тога се, за разлику од традиционалне наставе, размена информација између ученика у оквиру учења путем открића подстиче и охрабрује (Castronova 2002). Учење путем откривања омогућава ученицима да добију повратне информације када су им потребне. Активна партиципација ученика у процесу учења онемогућава занемаривање празнина у знању, те ученици активно траже повратну информацију. Повратна информација произилази из самог процеса откривања – ученик самостално уочава да ли остварује успех у решавању проблемске ситуације. Учитељ је такође важан извор повратних информација (Svinicki, 1998).

Учење путем открића се одвија у наставном контексту који је сличан аутентичном контексту у којем се научени појмови примењују. Учење информација ван конкретног контекста у којем се могу примењивати резултира инертним знањем и немогућношћу препознавања ситуација у којима се стечено знање може користити. У учењу путем открића контекст примене се учи истовремено када и појмови, што касније омогућава трансфер наученог на нове ситуације (Svinicki, 1998).

Учење путем открића омогућава остваривање „посебних циљева образовања, као што су подстицање и развој аутономије ученика у интелектуалном раду, формирање способности самосталног решавања проблема, практично стицање знања о томе како наука долази до научних сазнања, развијање способности за једноставна истраживања, развијање способности примене знања у новим ситуацијама, развој мотивације за учење и интелектуални рад“ (Ивић и сар., 2001: 30).

За разлику од бихевиористичког приступа мотивацији за учење, у којем се фокус ставља на спољашњу мотивацију, у когнитивистичким теоријама, на којима се заснива учење путем открића, тежиште се премешта на унутрашњу, интринзичку мотивацију. Когнитивистички оријентисани аутори људе схватају као активна бића, која вођена властитом радозналошћу трагају за информацијама усклађеним са њиховим вредностима, интересовањима, потребама. Према њиховом схватању, интринзичка мотивација представља природну базу учења и развоја (Brophy, 2004). Важност унутрашње мотивације се огледа у чињеници да ученици који имају развијену унутрашњу мотивацију показују боље резултате у школском учењу од ученика који немају развијену унутрашњу мотивацију. Разлика у постигнућу се уочава како у погледу квалитета, тако и у погледу трајности стечених знања (Lalić Vučetić, 2015). Активна партиципација у процесу учења математике делује веома мотивишуће. Ученици се приликом учења путем открића често налазе у ситуацији да решавају неки проблемски задатак, што побуђује њихову радозналост за истраживањем непознатог. Истовремено, задовољство које резултира из успешно решеног проблема још један је важан извор мотивације у учењу путем открића (Svinicki, 1998).

Последњих година, ефикасност учења путем открића је критикована, навођењем да овај облик наставног рада не води бољим резултатима у односу на класичну предавачку наставу (Koliadis, 2002, према: Kalathaki, 2015). Као недостатак овог облика учења наводи се следеће: настава организована путем открића захтева доста времена за припрему и реализацију, постиже се низак степен усвајања градива, ученици задржавају своје већ постојеће перцепције и интерпретације, јавља се страх од погрешних закључака (Kalathaki, 2015: 41). Учитељи се често осећају сигурније када се ослањају на уџбенике, лабораторијске демонстрације и предавања него када треба да подстичу стицање искуства заснованог на самосталном истраживању (Davis, 2003, Loucks-Horsley et al, 2003, према: Kalathaki, 2015). Један од разлога зашто учитељи избегавају примену учења путем открића јесте то што је потребно обезбедити доста времена за самостално истраживање ученика. Процес учења путем открића се одвија током времена, те учитељи услед недостатка времена бирају конвенционалније приступе у раду (Bauer i Kenton, 2005, према: Sullivan & Moriraty, 2009).

На основу претходно наведеног закључујемо да учење путем открића ученицима омогућава аутономију у раду, што је од великог значаја за развој позитивних ставова према школи. Овај облик учења подстиче ученике да буду проактивни, да стечена знања примењују у реалном контексту, те да се развијају метакогнитивне способности. Наведене предности чине овај облик учења веома погодним за примену у процесу усвајања математичких садржаја. Способност резоновања и решавања проблема, које учење путем открића подстичу, од великог су значаја за успех у математици. Настава путем открића омогућава јасније и дубље разумевање математичких појмова, развија креативност, води усвајању стратегија решавања проблема, подстиче мотивацију за истраживање, што као резултат има ефикасан трансфер и примену математичких знања у свакодневном животу. Такође, учење путем открића омогућава и подстиче индивидуализован приступ ученицима, што је још један важан разлог да овај облик организовања наставе добије довољно места у математичком образовању ученика, поготово у нижим разредима основне школе.

Предности диференциране наставе математике су разматране у бројним домаћим и страним радовима.

Мијаларе (Mialaret, 1991) анализирајући предности индивидуализације и диференцијације наставе наводи следеће:

– Индивидуализација и диференцијација олакшавају праћење рада ученика, а на темељу ових опсервација омогућавају ученицима да уче у складу са сопственим ритмом. Овај аутор сугерише да је ученицима који брже савладавају наставно градиво потребно понудити додатне активности учења, задати теже задатке или их подстаћи да помогну вршњацима који спорије уче.

– Индивидуализација и диференцијација пружају прилику учитељу да благовремено уочи грешке које ученици праве, те да ученицима пружи потребну помоћ и подршку у њиховом превазилажењу.

– Индивидуализација и диференцијација имају позитиван утицај на мотивацију ученика, с обзиром на то да им остављају могућност да изаберу садржаје и задатке који су усклађени са њиховим актуелним способностима и интересовањима.

– Индивидуализација и диференцијација омогућавају да, док успешнији ученици раде релативно самостално, учитељ више помоћи и подршке пружи ученицима који имају потешкоће са савладавањем градива. Учитељ има могућност да варира степен помоћи коју пружа ученицима, у складу са њиховим актуелним индивидуалним потребама.

Диференцирана настава по Ј. Ђорђевићу (1981) више одговара индивидуалним могућностима ученика, пошто се постављају објективнији циљеви, ученици напредују својим темпом, добијају повратну информацију и неопходну помоћ, активни су учесници наставе и учења, испољавају самоиницијативу и стваралаштво, постају свесни својих могућности и граница, кроз овај вид наставе ствара се позитивна клима у разреду и учитељ се ослобађа рутине у поучавању.

Диференцијација наставе има посебне образовно-васпитне вредности у почетној настави математике:

• ученик је вољан да претражује информације;

• услед високе мотивисаности ученика за рад не долази до застоја у току часа;

• ученик је све време максимално активан и мисаоно ангажован услед чега се постиже рационализација часа;

• ученик се у учењу ослања на сарадњу са учитељем или другом из клупе, те се на тај начин испољава васпитни ефекат оваквог облика рада;

• уважава се темпо учења и омогућава се избор задатака у складу са менталним способностима ученика;

• примена наставних листића и рачунара омогућава оптимално оптерећивање ученика и доприноси стварању интересантне и позитивне радне атмосфере;

• ученик је самосталан у процесу наставе и има одговоран однос према раду;

• правовремена повратна информација доприноси знатном повећању мотивације, нарочито код слабијих ученика;

• улога учитеља је да организује рад, даје инструкције у току рада, као и да даје ученицима моралну подршку да истрају у раду (Rackov, 2011).

Разматрајући о дидактичким вредностима диференциране наставе математике, Милинковић (2014) истиче да ова врста наставе повећава активност ученика у настави, доприноси развоју способности за самосталан рад, пружа прилику ученицима да напредују према својим могућностима, подстиче мотивацију за учење и повећање интересовања за математичке садржаје, подстиче развој креативности и стваралачког мишљења појединца, омогућује правовремено информисање ученика о напредовању и нивоу стечених знања.

Дакле, диференцирана настава математике омогућава да сви ученици стекну фундаментална математичка знања, на темељу уважавања индивидуалних разлика између њих. Такође, овај приступ подразумева активност сваког ученика у наставном процесу и подстиче да сви ученици самостално конструишу знање, што резултира продубљеним разумевањем математичких појмова, те ефикасном трансферу стечених знања.

Диференцирана настава математике има своју пуну примену у откривајућој настави, будући да су оба приступа заснована на истим темељним принципима. У настави математике у којој се учење заснива на открићу, и то путем садржаја који су структурирани према различитим нивоима сложености, процес стицања знања је веома продуктиван, јер омогућава ангажовање посебних менталних активности при откривању појмова, правила, алгоритама итд., развијање посебног начина размишљања, расуђивања и закључивања, као и развијање бројних математичких способности и вештина код свих категорија ученика, уважавајући њихове индивидуалне особености. Решавајући задатке путем открића који су диференцирани на различитим нивоима захтевности, свим ученицима се пружа могућност да доживе своје „еуреке“, што развија њихово интересовање за математику и подстиче их да амбициозније уче.

Примећујемо да се у наставној пракси учење путем открића ретко користи, што се може разумети у контексту високих захтева које овакав начин организовања наставе поставља пред учитеља. Ипак, функционално повезивање овог облика учења и диференцијације води продубљеном разумевању садржаја који се учи, стицању трајног и примењивог знања, метакогниције и мотивације за учење, тако да је неопходно учитеље подстицати да у свом раду више примењују и овај приступ.

4. ПРЕГЛЕД ДОСАДАШЊИХ ИСТРАЖИВАЊА

У сагледавању постављеног проблема истраживања проучени су научни резултати истраживача који се односе на област истраживања, и то у домену неколико за рад значајних аспеката. Најпре су анализирани резултати истраживања домаћих и страних истраживача о значају и ефектима примене учења путем открића у настави уопште, као и у настави математике.

Прву експерименталну студију која је истраживала наставу путем открића у математици спровео је Винч (Winch, 1913, prema: Weimer, 1974), у којој је поредио успешност индуктивног поступка – наставе путем открића са дедуктивним поступком – експозиционом наставом, у учењу геометријских дефиниција. У дедуктивном поступку ученицима су дефиниције дате у готовом облику, обично исписиване на табли, са примерима који их илуструју. У индуктивном поступку учитељ је користио сократовска питања за вођење процеса открића, без давања било каквих инструкција ученицима. У истраживању је утврђено да је трансфер наученог после две недеље од учења био бољи у групи која је учила индуктивним поступком. Ипак, Винчова студија са савремене тачке гледишта има бројне методолошке недостатке, а у овом раду је наведена као историјска илустрација првих истраживања ефикасности наставе путем открића.

Савремена истраживања указују на постојање значајних разлика у постигнућу у области математике између ученика који су учили путем открића и ученика који су директно подучавани математичким појмовима.

Истраживање у коме су испитаници били ученици петог разреда основне школе у Индонезији имало је за циљ да се испита утицај методе вођеног открића на побољшање математичких постигнућа ученика. Резултати показују да се уз помоћ вођеног учења способности посматрања, дискусије и закључивања код ученика побољшавају, што значи да се путем вођеног учења откривањем побољшавају исходи учења математике (Yurniwati & Hanum, 2017). Слично, ефекат открића на учење геометријских садржаја испитиван је и на ученике средње школе у Сукохарју, у Индонезији. Резултати овог истраживања показују да је учење путем вођеног открића значајно допринело побољшању постигнућа ученика у учењу математике за разлику од директног поучавања. Истраживање је, такође, показало да не постоји разлика у постигнућима с обзиром на пол ученика. Аутори овог истраживања су закључили да се учење путем вођеног открића може примењивати у циљу побољшања постигнућа ученика у учењу геометрије, односно математике (Khasanah, Usodo & Subanti, 2018).

У истраживању које је спровео Балим (Balim, 2009) испитивано је како подучавање науке путем учења путем открића утиче на академска постигнућа, перцепцију вештина учења истраживањем и трајност знања ученика седмог разреда основне школе. У истраживању је испитивана и статистичка значајност између експерименталне и контролне групе са становишта когнитивних и афективних нивоа учења. Резултати су показали статистичку значајност разлике у корист ученика експерименталне групе у односу на постигнућа, ретенцију знања и перцепцију вештина учења истраживањем и на когнитивном и на афективном нивоу. Може се рећи да ученици експерименталне групе имају бољу перцепцију вештина учења истраживањем. Користећи учење путем открића као једну од метода учења у којој су ученици активни субјекти, вођени од стране учитеља, значајно се повећавају успех ученика и вештине учења за разлику од традиционалног наставног приступа.

Поред ових појединачних истраживања, Минер и његови сарадници су урадили једну од најопсежнијих анализа свих истраживања на тему истраживачки обликоване наставе реализованих од 1984. до 2002. године. Анализом је обухваћено 138 истраживања и резултати су показали да је позитиван утицај неког облика истраживачки организоване наставе потврђен у чак 61% спроведених истраживања (Minner, Levy & Century, 2010).

Основу у раду су представљали и резултати који указују на утицај учења путем открића на повећање мисаоног ангажовања ученика у процесу учења и утицај на развој њихових когнитивних способности. Велики број ученика математику учи простим меморисањем појмова, услед немогућности да појмове разуме. Учење путем открића, у коме појмови које је потребно научити нису дати у финалној форми, већ их ученици самостално откривају и примењују у новим ситуацијама, у настави математике води побољшању способности решавања проблема (Herdiana et al., 2017). Осим тога, истраживање Мартаида и сарадника (Martaida, Bukit & Ginting, 2017) потврдило је позитиван ефекат откривајућег учења на развој критичког мишљења и когнитивних способности ученика средње школе.

У истраживању које је спровела Хофманова, утврђено је да су ученици који су математици подучавани у откривајућој настави били ангажовани у резоновању вишег реда, али су одређени део времена ипак проводили трагајући за једним конкретним решењем проблема. Такође, иако су охрабривани да проблеме решавају сарађујући са вршњацима, многи ученици су настављали да раде самостално. Иако су били ангажовани у откривајућим активностима, код ученика је често изостајао доживљај да су самостално открили нешто ново, што ауторка објашњава утицајем школске културе. Наиме, у већини школа у којима је истраживање спровођено, није постојала јасна оријентација ка активности и самосталности ученика у наставном процесу, што је утицало на то да ученици формирају слику о себи као о пасивним примаоцима знања (Hoffman, 2013).

Кистиан и сарадници (Kistian et al., 2017) су истраживањем желели да испитају утицај учења путем открића у настави математике на разумевање математичких појмова и на мотивацију за учење. Ученици петог разреда су подељени у две групе – једна је учила математику путем открића, а друга путем класичног експозиторног учења. У процесу експозиторног учења наставни садржај је директно преношен са учитеља на ученика, док су у процесу учења путем открића ученици подстицани да изражавају сопствено мишљење и да развијају властите идеје, уз подршку учитеља као ментора. Активности учења у настави путем открића нису у потпуности зависиле од учитеља, као што је био случај у настави путем експозиторног учења; улога учитеља је била да креира наставну ситуацију која је за ученике интересантна и занимљива. Резултати овог истраживања показују да су испитаници који су учили откривањем имали боље резултате на тесту који је процењивао њихово знање из математике; тачније, учење путем открића је довело до јаснијег и дубљег разумевања појмова, те развоју критичког и креативног мишљења, али и до веће мотивације за учење.

У истраживању Јулијанија и сарадника (Yuliani, Noer, Rosidin, 2018) развијен је радни лист заснован на вођеном открићу, и потом је испитиван утицај коришћења радног листа на повећање математичке креативности и самоефикасности код ученика. Радни лист започиње презентацијом проблема, следе питања која се односе на презентовани проблем. У следећој фази се ученици усмеравају да прикупе податке, те да поставе хипотезе и да дођу до решења у форми калкулације. У последњој фази рада од њих се захтева да изведу закључке, а потом их примене. Истраживање је показало да је коришћење радних листова заснованих на вођеном открићу у настави математике имало позитиван ефекат на повећање математичког креативног мишљења и самоефикасности код ученика.

У истраживању које је спровео Оквуте (Okwute, 2015) испитивани су ефекти вођеног открића на постигнуће у математици код ученика са високом и ниском аверзијом према математици. У истраживању је утврђено да ученици који имају високу аверзију према математици остварују боља постигнућа када се подучавају путем експозиторног учења. Ови ученици, услед високе анксиозности у вези са наставом математике, могу боље да разумеју математичке појмове у добро структуираној и контролисаној настави. Ученици који имају ниску аверзију према математици имали су боља постигнућа када су математици подучавани путем открића.

У истраживању које су извели Путриани и Рахаиу (Putriani & Rahayu, 2018) утврђено је да учење путем открића има позитиван утицај на исходе наставе математике код ученика VIII разреда. Ово истраживање се првенствено бави проблемом многих ученика у основној школи да разумеју и правилно употребљавају формуле за обим и површину круга. Када им се постави питање колики је обим или површина круга чији је пречник познат, ученици често не могу одмах да одговоре или дају погрешне одговоре. У традиционалном приступу подучавању ученици само меморишу наведене формуле, те је њихово знање краткотрајно. Да би проверили да ли самостално конструисање знања утиче позитивно на разумевање формула за обим и површину круга, ови истраживачи у експерименталној студији су једну групу ученика подучавали традиционалним методама, док је друга група ученика учила формуле кружнице и круга путем открића, уз коришћење сунцокрета као контекстуалног примера круга који је ученицима требало да привуче пажњу и подстакне мотивацију за учење. Истраживање је показало да су ученици који су обим и површину круга учили путем открића остварили бољи успех у поређењу са ученицима који су учили традиционалним методама.

Истраживање Барудија и сарадника (Baroody, Eiland & Purpura, 2013) имало је за циљ да одговори на неколико питања. Једно од питања јесте да ли је подучавање математике путем открића ефикасније него традиционалне методе наставе, те да утврди да ли већи ефекат има учење путем вођеног открића или неструктуирано откривање. Њихова студија је спроведена на узорку ученика првог разреда основне школе, а ученици су путем три методе (вођено откриће, неструктуирано откриће и контролна група која је учила на класичан начин) учили „додај 1" правило (n + 1 и 1 + n). Студија је показала да су ученици који су учили путем открића боље савладали ово правило, односно да су разумели правило уместо да су га напамет меморисали, али није утврђена разлика између двеју група које су училе путем вођеног и путем слободног открића. Код група које су училе путем открића дошло је и до трансфера на друге, сложеније ситуације сабирања (нпр. до резоновања да ако је 4 + 4 = 8, а 4 + 5 = 4 + 4 +1, онда мора бити да је 4 + 5 = 9), што се није догодило код контролне групе.

У истраживању Сихомбинга и сарадника (Sihombing, Singaga & Mukhtar, 2017) на узорку ученика VII разреда основне школе испитивана је повезаност између учења путем открића и знања ученика о особинама троугла. У истраживању је утврђено постојање умерене, позитивне статистички значајне корелације између учења путем открића и разумевања поменутог наставног саржаја. Откривајућа настава у овом истраживању је била конципирана у неколико фаза. У првој фази учитељ је ученицима постављао питања за дискусију. Ученици су дискутовали између себе неко време, пре него што им је учитељ поделио материјал за рад. У другој фази ученици су спроводили лабораторијске експерименте, у складу са одређеним инструкцијама које су добијали од учитеља. У трећој фази ученици су поредили закључке из дискусије и резултате спроведеног истраживања, у циљу закључивања о одговарајућим концептима. У дискусији резултата, аутори истраживања наводе да учење математичких појмова путем открића има позитивне ефекте на разумевање садржаја од стране ученика захваљујући њиховој активној укључености у процес сазнавања, која подразумева проналажење и разматрање примера појмова, уочавање и тестирање образаца и веза на примерима и генерализација закључака које су открили.

Истраживање које је спровео Мариф (Maarif, 2016), на ученицима средње школе, показало је да учење путем открића позитивно утиче на способности уочавања математичких аналогија и извођења генерализација, у поређењу са класичном наставом. Ученици који су учествовали у наставном процесу заснованом на открићу били су заинтересовани за учење, и сматрали су да им је било лакше да уче јер су кроз практичну активност са оригами фигурама имали прилику да непосредно виде објекте о којима су учили. Улога учитеља у овом истраживању била је да воде процес открића.

На темељу свог истраживања, Мариф (Maarif, 2016: 123) износи следеће препоруке за примену приступа заснованог на открићу у настави математике:

1. Пре примене наставе путем открића пожељно је ученике поделити у групе у које ће бити укључени ученици различитог нивоа способности. Ово је значајно за вођење активности откривања, јер ће ученици са вишим способностима моћи да помогну ученицима са нижим.

2. Коришћење различитих наставних помагала чини учење смисленијим, тако да је геометријске облике пожељно представити помоћу реквизита.

3. Пре примене наставе путем открића потребно је да учитељ процени способности ученика како би наставну ситуацију прилагодио њиховим актуелним могућностима.

4. Способност уочавања аналогија код ученика потребно је подупирати путем визуелног представљања геометријских облика.

5. Одабир материјала за учење који ће бити коришћен у настави потребно је утемељити на педагошко-дидактичкој анализи на начин да материјали буду повезани са тешкоћама у решавању аналогија у задацима из геометрије.

6. Развој способности уочавања аналогија у геометрији наставници могу подржати коришћењем алгебарских образаца који су ученицима познатији.

Истраживања показују да је постигнуће ученика из математике, између осталих фактора, одређено ставовима према математици, како ученика, тако и учитеља и родитеља. Негативан став ученика према математици утиче на честе и поновљене неуспехе и проблеме у решавању математичких задатака, што доводи до додатног учвршћивања негативног става према математици. Ученици на почетку основне школе имају позитивне ставове према математици, који с временом постају негативнији, што се може објаснити деловањем већег броја фактора – притисак да се остварују добра постигнућа, задаци који се ученицима постављају су презахтевни, садржај лекција је ученицима неинтересантан (Nicolaidou & Philippou, 2003). Такође, начин подучавања математике има утицаја на став ученика према математици. Класичан предавачки приступ у настави математике није довољно ефикасан јер се ученици доводе у пасиван положај у процесу учења. Учење математике путем открића креира подстицајно окружење за ученике и осигурава да се индивидуалне разлике између ученика узму у обзир у наставном процесу и позитивно утичу на став према математици (Costello, 1991).

У истраживању које је спровео Блер (Blair, 2014) утврђено је да наставници не користе у довољној мери учење путем истраживања и откривања из неколико разлога. С обзиром на то да овакав вид организовања наставе захтева доста времена, како у процесу припреме, тако и за реализацију, наставници под теретом припреме ученика за стандардизоване тестове остављају овај приступ по страни. Такође, утврђено је да неки наставници сматрају да ученици не поседују довољно способности за самостално откривање и истраживање, и заступају став да је предавање и давање конкретних инструкција најефикаснији начин подучавања.

Када је реч о истраживањима која разматрају ефекте примене учења путем открића и утицаје овог облика учења на развој одређених способности ученика, на квалитет и трајност њихових знања, мотивацију за учење итд., у Србији их је знатно мање, поготову у области разредне наставе.

У домаћој литератури се проблемом учења путем открића бавио Р. Радовановић (1978) који је експериментално испитивао своју концепцију о јединству специјално разрађеног облика индивидуалног рада и методе учења откривањем, из српскохрватског језика, математике и познавања природе и друштва у млађим разредима основне школе. Резултати овог експеримента су показали квантитативно повећање и квалитативно побољшање успеха експерименталних група.

Крkљуш (1977) је експериментално испитивао утицај примене модела откривајућег вођења на напредак у настави алгебре виших разреда основне школе. Резултати су показали несумњиву предност учења откривањем у односу на директно саопштавање математичких знања у готовом облику. Аутор закључује да је учење путем открића могуће на различитим нивоима и у различитим фазама образовања. Овим истраживањем су проверавана два система откривајућег вођења. У првом (А систему) је спроведено вежбање асоцијативним механизмима, а у другом (Б систему) су организована вежбања кроз решавање проблема. Резултати показују да нема значајнијих разлика у ефектима између ових двају система и да појединим ученицима одговара један, а другима други систем откривајућег вођења.

За потребе израде магистарског рада Драгана Малешевић (2003) је испитивала утицај учења откривањем на квалитет знања и способност продуктивног мишљења ученика у почетној настави математике. На узорку ученика четвртог разреда утврђена је статистички значајна разлика у квалитету знања и способности продуктивног мишљења код ученика под утицајем експерименталног фактора. Дакле, знања стечена учењем откривањем су квалитетнија, а трансфер, као и трајност овако стеченог знања, већи су. Експериментални програм учења откривањем утицао је на развој продуктивног мишљења ученика, што им је омогућило правилно расуђивање, развој анализе, синтезе и генерализације, да изграде своје обрасце, везе и базе података које могу да користе и у другим ситуацијама, областима и другим проблемима.

Иста ауторка, Драгана Малешевић (2011), за потребе израде докторке дисертације спровела је истраживање са циљем да експериментално испита ваљаност конструисаних хеуристичко-аритметичких модела за учење путем открића у реализацији садржаја почетне наставе математике. Резултати истраживања су потврдили полазну претпоставку ауторке да су конструисани модели за учење путем открића у почетној настави математике погодни за обраду одабраних математичких садржаја, ефикасни су и њиховом применом су остварени статистички значајни резултати у односу на резултате учења путем традиционалне наставе. Налази потврђују бољи успех ученика експерименталне групе у поређењу са ученицима контролне групе, и то у свим разредима.

Можемо закључити да међу истраживачима постоји консензус у погледу ефикасности потенцијалних домета учења путем открића. Емпиријска изучавања овог облика учења, као и теоријска разматрања и опсервације учитеља-практичара, показују да је у питању веома ефективан наставни метод чија се највећа снага састоји у томе што мисаоно ангажује ученика и развија његове највише сазнајне способности, оспособљавајући га за самостално решавање проблема и примену знања ван школског контекста. Ипак, како би учењем путем открића били остварени његови пуни потенцијали, веома је важно даље истраживати његове карактеристике, антецеденте и ефекте до којих доводи.

Постоји велики број истраживања о различитим аспектима диференциране наставе. Тако су Вуловић и Егерић (2010) спровели истраживање са циљем да испитају ставове учитеља о примени диференциране наставе у наставној пракси. Истраживањем је потврђено да учитељи углавном прилагођавају наставу већини ученика, док диференцијацију примењују када уоче потребу за овом формом рада. Приликом организације диференцијације највише су фокусирани на припрему задатака различитих нивоа тежине и сложености.

С. Маричић и Н. Милинковић (2015) су испитивајући ставове учитеља о улози и значају диференциране наставе у раду са ученицима потенцијално даровитим за математику дошли до сазнања да учитељи повремено користе диференцирану наставу у раду, а као отежавајућу околност за реализацију наставе математике применом диференциране наставе наводе преобиман наставни програм и превелик број ученика у одељењу. Учитељи су се изјаснили да би израда приручника и упутстава за коришћење диференциране наставе и смањење броја ученика у одељењима допринели учесталијем коришћењу овог облика наставе.

У истраживању које је спроведено у Румунији (Căprioară & Frunză, 2013) испитивано је у којој мери ученици осмог разреда перципирају наставу математике као диференцирану. Највећи проценат ученика је одговорио да наставне активности, укључујући задатке на часу и домаће задатке, у оквиру наставе математике, нису прилагођене њиховим индивидуалним потребама и способностима.

Керол Ен Томлинсон (Tomlinson, 2014) разматра потребу за диференцирањем наставе у контексту савременог друштва, које одликује велики диверзитет људи у погледу културе, интересовања, искуства и других особина, и истиче да је диференцирана настава предуслов за ученичку мотивацију за учење и адекватно постигнуће. Такође, ова ауторка повезује диференцирану наставу са развојем способности решавања проблема, креативног и критичког мишљења, које такође представљају продукт и захтев модерног друштва. Према Томлинсоновој, диференцијација наставе се заснива на неколико општих принципа, међу којима се истиче захтев за коришћењем различитих стратегија и техника подучавања ученика са различитим способностима и интересовањима, који треба да буде утемељен на континуираној процени индивидуалних карактеристика сваког ученика.

За наш рад од значаја је истраживање Ј. Миловановића (2008) у коме је испитивано како математички задаци са обележјима стандарда као модели индивидуализоване и диференциране наставе утичу на успех ученика у настави математике. На узорку ученика четвртог разреда основне школе утврђено је да дефинисање математичких задатака са обележјима стандарда значајно утиче на повећање нивоа знања и развој потенцијалних способности сваког ученика.

Проучавајући доступну литературу можемо закључити да се досадашња разматрања и истраживања односе само на различите аспекте учења путем открића и диференциране наставе, а да је мали број истраживања која се баве функционалним повезивањем двају дидактичко-методичких поступака и њиховим утицајем на постигнућа ученика.

У истраживању које је спровео Вуловић (2011), експериментално је проверавана примена методе активног учења на диференцираним садржајима из геометрије у трећем разреду основне школе. Циљ овог истраживања је био да се утврди ефикасност ове методе у усвајању наставних садржаја, те утицај на ниво квалитета, обим и трајност усвојеног знања. Садржајна диференцијација захтева на три нивоа сложености за потребе овог истраживања урађена је према образовним стандардима за крај првог циклуса обавезног образовања. Налази истраживања су показали боља постигнућа ученика из експерименталне групе у односу на ученике из контролне групе, која је учила на традиционалан начин. Наиме, обим усвојеног знања је био 56,13% већи у експерименталној групи. Истраживање је потврдило да су и ниво квалитета знања, као и трајност знања, били знатно већи код ученика експерименталне групе.

Ефекти диференцијације садржаја на три нивоа сложености у проблемском учењу геометрије испитивани су на узорку од 165 ученика средње школе. Резултати истраживања показују да је конструисани екпериментални програм допринео постизању бољих општих резултата, као и бољих резултата просечних и исподпросечних ученика. Међутим, методички приступ заснован на принципима проблемског учења на диференцираним садржајима није допринео значајнијем напредовању групе изнадпросечних ученика, што су аутори објаснили чињеницом да су ученици ове групе способнији од ученика осталих група тако да начин на који стичу знања није пресудан за њихов успех (Bikić, Maričić & Pikula, 2016).

Слично, истраживање М. Мрђе (2013) које је спроведено у вези са израдом докторске дисертације показало је статистички значајно повећање образовних ефеката флексибилне диференцијације интерактивне обраде садржаја почетне наставе математике применом проблемског приступа.

Проучавајући доступну литературу утврдили смо да се мали број досадашњих разматрања и истраживања односи само на различите аспекте учења путем открића и диференциране наставе, а да готово нема истраживања која се баве функционалним повезивањем двају дидактичко-методичких поступака и испитивањем њиховог утицаја на постигнућа ученика. На основу тога закључујемо да у оквиру нашег школског система постоји недостатак теоријских и емпиријских истраживања учења путем открића уопште и учења путем открића на диференцираним садржајима у настави математике у млађим разредима основне школе. То чини оправданим и значајним да у нашем истраживању испитамо ефекте овако конципираног методског поступка, чиме би се значајно обогатила педагошка теорија и пракса наставе математике у млађим разредима основне школе.

II МЕТОДОЛОШКИ ОКВИР ИСТРАЖИВАЊА

1. ПРОБЛЕМ И ПРЕДМЕТ ИСТРАЖИВАЊА

Бројне промене и развој у готово свим доменима човековог живота утицали су и на појаву иновација у области образовања. „Полазећи од улоге коју образовање има у опште-друштвеном развоју, оправдана је потреба сталног повећања квалитета и квантитета знања, као и примењивости стечених знања“ (Јанковић, 2016: 270). Нагласак се ставља на такве промене којима се настоји постићи формирање аутентичне, стваралачке и самосталне личности. Ове интенције посебно долазе до изражаја у области математичког образовања у којој без ових способности не можемо говорити и о квалитетном учењу.

У фокусу није више индивидуа која учи, већ појединац који размишља и континуирано се развија и усавршава током целог живота. Квалитет образовања је условљен квалитетом наставе у школи. Школа је данас, и поред свих реформи, још увек оптерећена слабостима. Њена најкрупнија слабост је њена униформност. „У њој доминирају когнитивни циљеви учења. Учитељ планира учење које се одвија у облику поучавања и сноси одговорност за успех својих ученика. Ученици пасивно примају информације, одговарају на учитељева питања, решавају постављене задатке и извршавају наредбе“ (Špoljar, 1989, prema: Kadum, 2005: 32). У оваквим околностима ученици се не оспособљавају да самостално размишљају и схватају везе између појава и појмова, нити се оспособљавају да решавају проблеме и примењују стечена знања. У таквој настави ученик постаје објекат васпитно-образовног процеса. „Наставом у којој нема самосталности и инвентивности ученика, у којој се ученицима не пружају могућности да слободно износе и бране властите ставове, у којој се не суочавају различита мишљења, не развија критичност и креативност, већ се стиче и хвали дисциплинованост, тачност и спремност да се прихвати мишљење ауторитета, у којој нема експеримената и стваралаштва, формира се *послушник*, који ће избегавати ангажовање и који ће бежати од властитих ставова и одговорности“ (Kadum, 2005: 32).

Решење наведених проблема и ограничености огледа се у имплементацији иновативних облика учења који „предност дају овладавању општим принципима истраживања током учења, методама које омогућавају релативно самостално стицање знања и решавање проблема, али у којима се води рачуна о индивидуалним разликама међу ученицима и омогућава сваком ученику да напредује у складу са својим способностима“ (Јанковић, 2016: 271).

Чињеница је да ученици до знања у настави математике могу доћи на различите начине. С друге стране, квалитетна знања ученици могу стећи искључиво ако до њих долазе сопственим сазнајним напорима. Имајући то у виду, о учењу не можемо говорити као о простом преношењу знања ученицима, већ о стварању услова у којима ученици својом активношћу стичу знања, формирају појмове, откривају везе и релације међу њима, откривају правила, поступке, начине и примењују знања у решавању проблема. Улога учитеља у овој настави треба да буде на нивоу вођења и усмеравања у процесу учења. У складу са тим јављају се бројни модели у настави, чији је примарни задатак активирање ученика, стављање ученика у улогу истраживача и креатора наставног процеса. Пример таквог модела јесте организација наставе путем учења путем открића. С друге стране, не треба занемарити то да је сваки ученик специфична јединка, која се од других ученика разликује у погледу нивоа оствареног когнитивног, емоционалног и социјалног развоја, мотивације, нивоа аспирације, интересовања, стилова учења, као и према социјалном и економском контексту из којег потиче, претходним искуствима и многим другим обележјима. Једнако квалитетно образовање за све ученике, стога, не може подразумевати истоветан наставни рад са свима, с обзиром на то да је увек у питању веома хетерогена група индивидуа (Lubart, 2004). У вези са тим, учење путем открића је најпродуктивније у индивидуализованој и диференцираној настави, при чему се диференцијација остварује путем омогућавања ученицима да приступе садржају на различитим нивоима (INTO, 2017). Сматрамо да се диференцирањем наставних садржаја у оквиру учења путем открића могу створити услови који би обезбедили адекватнији третман ученицима у складу са њиховим способностима.

Имајући у виду могућност остваривања диференцијације кроз учење путем открића, проблем истраживања представља *унапаређивање наставе алгебре у млађим разредима основне школе применом модела наставе (наставног поступка) заснованог на учењу путем открића на диференцираним садржајима*.

Предмет истраживања јесте испитивање ефеката примене наставе засноване на учењу путем открића на диференцираним садржајима алгебре у почетној настави математике.

Основни индикатор успешности примене овако организоване наставе биће образовна постигнућа ученика, при чему ћемо узети у обзир ниво постигнућа ученика (основни, средњи и напредни ниво) и трајност знања која су стечена на овај начин.

Према нашим сазнањима, међусобно повезивање учења путем открића и диференцијације садржаја није примењивано у млађим разредима основне школе, у смислу утврђивања ефеката примене у изучавању математичких садржаја. То ово истраживање чини оправданим и значајним за педагошку теорију и праксу, а посебно за теорију и праксу наставе математике у млађим разредима основне школе.

Научни значај истраживања се испољава у томе што су на основу опсежног проучавања релевантне литературе систематизована постојећа знања и научни резултати истраживача који се односе на област истраживања. Значај се огледа и у конципирању иновативног дидактичко-методичког поступка заснованог на функционалној повазаности учења путем открића и диференцијације садржаја у почетној настави математике, чиме ова докторска дисертација представља прву научноистраживачку студију у Србији у којој се алгебарски садржаји у почетној настави математике проучавају на начин повезивања учења путем открића и садржајне диференцијације. Очекује се да ће резултати истраживања показати позитиван ефекат овако концipиране наставе на образовна постигнућа ученика у почетној настави математике, што ће представљати значајан допринос обогаћивању теорије и праксе методике почетне наставе математике.

Педагошки значај се базира на тежњи и потреби за увођењем иновативних наставних приступа који омогућавају ученицима да активно стичу знања и напредују према својим могућностима; очекује се да ће истраживање резултирати решењима која ће допринети побољшању квалитета наставе у почетној настави математике.

Практични значај се испољава кроз чињеницу да се сазнања добијена истраживањем могу користити у организацији и дидактичко-методичком обликовању наставе у којој ће бити заступљено учење путем открића на диференцираним садржајима, као и у могућности да учитељи искористе предложене моделе за реализацију алгебарских садржаја у четвртом разреду, али и да ови модели буду примери за самостално креирање и реализацију других садржаја у осталим разредима и у осталим наставним предметима. Осим тога, истраживање може користити ауторима уџбеника приликом структурисања уџбеничких јединица.

Друштвени значај истраживања се испољава у могућности коришћења добијених резултата ради даљег осавремењавања и унапређивања васпитно-образовног процеса и васпитања личности које ће самостално трагати и долазити до нових сазнања, које ће критички размишљати и бити припремљене за самоучење и самообразовање.

2. ЦИЉ И ЗАДАЦИ ИСТРАЖИВАЊА

Основни циљ истраживања је да се израде дидактичко-методички модели извођења учења путем открића на диференцираним садржајима алгебре, и да се експериментално утврде њихови ефекти на ученичка постигнућа, као и испитивање мишљења учитеља о могућностима и значају који овакав начин рада пружа и анализирање мишљења и искуства ученика о настави математике организованој на поменути начин.

С обзиром на то да се овим емпиријским истраживањем настоји променити наставна пракса у почетној настави математике како би се учинила квалитетнијом и ефикаснијом, то ово истраживање сврстава у категорију примењених (развојних) истраживања. Имајући у виду постављени циљ, истраживање је експерименталног карактера, при чему се експериментална варијабла уноси и мери у редовну наставу математике (природни услови), што ово истраживање одређује као теренско.

Из овако постављеног циља формулисани су следећи задаци истраживања:

1. Испитати утицај учења путем открића на диференцираним садржајима алгебре на образовна постигнућа ученика у почетној настави математике;

2. Истражити утицај учења путем открића на диференцираним садржајима алгебре на трајност знања ученика у почетној настави математике;

3. Испитати улогу уџбеника математике у стварању услова за учење алгебарских садржаја путем открића;

4. Испитати мишљења ученика експерименталне групе о настави алгебре организованој применом учења путем открића на диференцираним садржајима;

5. Испитати мишљење учитеља о могућностима, значају примене учења путем открића на диференцираним садржајима алгебре, као и његовом утицају на побољшање образовних постигнућа ученика у почетној настави математике.

3. ХИПОТЕЗЕ ИСТРАЖИВАЊА

Општа хипотеза истраживања је да учење путем открића на диференцираним садржајима алгебаре значајно доприноси постизању бољих исхода (учинака) у савладавању алгебарских садржаја у поређењу са традиционалном наставом.

Из опште хипотезе произилазе следеће посебне хипотезе:

1. Примена учења путем открића на диференцираним садржајима алгебре доприноси повећању образовних постигнућа ученика у почетној настави математике;

2. Учење путем открића на диференцираним садржајима алгебре доприноси повећању трајности знања ученика у почетној настави математике;

3. Анализирани уџбеници математике не дају довољну основу за учење алгебарских садржаја путем открића;

4. Ученици експерименталне групе имају позитивно мишљење о учењу садржаја алгебре по моделу учења путем открића на диференцираним садржајима;

5. Учитељи изражавају мишљење да учење путем открића на диференцираним садржајима доприноси побољшању квалитета рада и позитивно утиче на ученичка постигнућа у почетној настави математике.

4. ПРОМЕНЉИВЕ (ВАРИЈАБЛЕ) ИСТРАЖИВАЊА

У истраживању независну варијаблу представља методичка организација наставног процеса применом учења путем открића на диференцираним садржајима на часовима математике у експерименталној групи, чије смо ефекте пратили.

Независне варијабле које се односе на ученике представљају:

– пол ученика (дечаци и девојчице),

– општи успех ученика (одличан, врлодобар, добар, довољан, недовољан) и

– оцена из математике (одличан – 5; врлодобар – 4; добар – 3; довољан – 2; недовољан – 1).

Зависну варијаблу представљају исходи учења који настају након примене експерименталног модела у настави: постигнућа ученика (успех на тестовима знања, укупно и по нивоима знања), као и мишљења учитеља и ученика о настави математике која се реализује применом учења путем открића на диференцираним садржајима.

5. ПОПУЛАЦИЈА И УЗОРАК ИСТРАЖИВАЊА

Из постављеног циља и задатака истраживања произишла је потреба за сложеним узорком који обухвата: узорак ученика, узорак учитеља и узорак уџбеника.

Популацију истраживања су чинили ученици четвртог разреда основних школа у пчињском округу, у школској 2019/2020. За истраживање је одабран репрезентативни узорак од N = 261 испитаник, од којег је N = 132 (50,6%) чинило експерименталну, а N = 129 (49,4%) контролну групу (Табела 2).

Узорак ученика је одабран из основних школа „Радоје Домановић“ и „Вук Стефановић Караџић“ у Врању. Ученици двају одељења у Основној школи „Радоје Домановић“ чинили су контролну (К) групу, док су друга два одељења у овој школи чинила експерименталну (Е) групу. У Основној школи „Вук Стефановић Караџић“ три одељења су чинила контролну групу (К), а преостала три експерименталну групу (Е).

Како су за истраживање одабране већ формиране групе ученика, тј. одељења, узорак ученика је по својим карактеристикама групни (кластерски). Узорак ученика, школе и одељења били су пригодни и условљени могућностима истраживача.

Компариране групе ученика су уједначене према броју испитаника, општем успеху, оцени из математике и према полној дистрибуцији.

Табела 2. *Структура узорка према групној припадности испитаника*

	Фреквенција	**Проценат (%)**
Експериментална	132	50,6
Контролна	129	49,4
Сви (Σ)	261	100

Структура узорка према полу приказана је у Табели 3.

Табела 3. *Структура узорка према полу*

			Пол		Укупно (Σ)
			Мушки	Женски	
Група	Експериментална	f	69	63	132
		%	52,30%	47,70%	100,00%
	Контролна	f	67	62	129
		%	51,90%	48,10%	100,00%
Укупно (Σ)		f	136	125	261
		%	52,10%	47,90%	100,00%

Укупни узорак испитаника чини 52,10% дечака и 47,90% девојчица. Експерименталну групу чини 52,30% дечака и 47,70% девојчица. Контролну групу чини 51,90% дечака и 48,10% девојчица. Оваква процентуална заступљеност указује да су компариране групе међу собом уједначене према полној дистрибуцији.

Податке о општем успеху ученика на крају првог полугођа четвртог разреда, које смо на почетку истраживања преузели из електронских дневника, представили смо у Табели 4.

Табела 4. *Структура узорка према општем успеху*

			Општи успех				Укупно (Σ)
			Довољан	Добар	Врло-добар	Одличан	
Група	Експериментална	f	4	18	42	68	132
		%	3,0%	13,6%	31,8%	51,5%	100,0%
	Контролна	f	4	18	44	63	129
		%	3,1%	14,0%	34,1%	48,8%	100,0%
Укупно (Σ)		f	8	36	86	131	261
		%	3,1%	13,8%	33,0%	50,2%	100,0%

Забележена је следећа дистрибуција општег успеха ученика у експерименталној групи: 3% има довољан успех, 13,6% добар, 31,8% врлодобар и 51,5% одличан. Контролну групу чини: 3,1% довољних, 14% добрих, 34,1% врлодобрих и 48,8% ученика са одличним општим успехом. Посматрајући укупан узорак, 3,1% ученика има довољан успех, 13,8% добар, 33% врлодобар и 50,2% одличан. На основу приказане дистрибуције према општем успеху, уочава се незнатна разлика између ученика Е и К групе у погледу општег успеха на крају првог полугођа четвртог разреда (Табела 4).

Ако посматрамо структуру узорка према оцени из математике на крају првог полугођа, можемо закључити да је у укупном узорку 7,3% ученика са оценом довољан (2), 23% има оцену добар (3), 29,1% је са оценом врлодобар (4) и 40,6% ученика са одличном (5) оценом (Табела 5).

Табела 5. *Структура узорка према оцени из математике*

			Оцена из математике				Укупно (Σ)
			Довољан (2)	Добар (3)	Врло-добар (4)	Одличан (5)	
Група	Експериментална	f	8	31	38	55	132
		%	6,1%	23,5%	28,8%	41,7%	100,0%
	Контролна	f	11	29	38	51	129
		%	8,5%	22,5%	29,5%	39,5%	100,0%
Укупно (Σ)		f	19	60	76	106	261
		%	7,3%	23,0%	29,1%	40,6%	100,0%

Унакрсним односом групе и оцене из математике добили смо податак да експерименталну групу чини: 6,1% ученика са довољном оценом из математике, 23,5% ученика са добром оценом, 28,8% има врлодобру оцену из математике, док одличну оцену има 41,7% ученика. У контролну групу је ушло 8,5% испитаника са довољном оценом из математике, 22,5% ученика са добром оценом, 29,5% ученика са врлодобрим и 39,5% ученика са одличним постигнућем из математике. Ова дистрибуција оцена у Е и К групи указује на приличну уједначеност испитиваних група према постигнућу из математике.

Узорак ученика за анкетирање чинили су само ученици експерименталних група јер се испитивало мишљење ученика о настави математике која је реализована у оквиру експерименталног програма.

Узорак учитеља за фокус групни интервју чинило је пет учитеља, реализатора експерименталног програма.

Узорак уџбеника је селектован из популације уџбеника математике за ниже разреде основне школе одобрених за издавање од *Министарства просвете, науке и технолошког развоја* Републике Србије за школску 2019/2020. годину. Узорак су чинили уџбеници за наставу математике од првог до четвртог разред основне школе издавачких кућа *Едука, Вулкан знање, Нови Логос, Klett, Бигз и Креативни центар*. С обзиром на то да се од школске 2018/2019. године почело са применом новог *Плана и програма наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања*, а од школске 2019/2020. године почео се примењивати нови *План и програм наставе и учења за други разред основног образовања и васпитања*, анализирани уџбеници за прва два разреда израђени су и усклађени са новим наставним програмима, док су уџбеници за трећи и четврти разред припремљени у складу са захтевима нереформисаних наставних програма.

Узорак уџбеника по разредима представићемо табеларно (Табела 6, Табела 7, Табела 8 и Табела 9).

Табела 6. *Узорак уџбеника – први разред*

	Уџбеници математике за први разред основне школе
1.	Јухас, И. (2018). *Математика 1А, Уџбеник за први разред основне школе*. Београд: Едука. Јухас, И. (2018). *Математика 1Б, Уџбеник за први разред основне школе*. Београд: Едука.
2.	Иванчевић Илић, И., Тахировић, С. (2018). Математика 1, *Уџбеник математике за први разред основне школе 1. део.* Београд: Нови Логос. Иванчевић Илић, И., Тахировић, С. (2018). Математика 1, *Уџбеник математике за први разред основне школе 2. део.* Београд: Нови Логос. Иванчевић Илић, И., Тахировић, С. (2018). Математика 1, *Уџбеник математике за први разред основне школе 3. део.* Београд: Нови Логос. Иванчевић Илић, И., Тахировић, С. (2018). Математика 1, *Уџбеник математике за први разред основне школе 4. део.* Београд: Нови Логос.
3.	Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2018). *Маша и Раша – Математика 1, Уџбеник за први разред основне школе 1. део.* Београд: Klett. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2018). *Маша и Раша – Математика 1, Уџбеник за први разред основне школе 2. део.* Београд: Klett. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2018). *Маша и Раша – Математика 1, Уџбеник за први разред основне школе 3. део.* Београд: Klett. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2018). *Маша и Раша – Математика 1, Уџбеник за први разред основне школе 4. део.* Београд: Klett.
4.	Маричић, С. (2018). *Математика 1, Уџбеник за први разред основне школе*. Београд: БИГЗ школство.
5.	Милинковић, Ј. (2018). *Математика 1, Уџбеник за први разред основне школе*. Београд: Креативни центар.
6.	Малиновић Јовановић, Н., Малиновић, Ј. (2019). *Математика 1,* Уџбеник *за први разред основне школе 1. део*. Београд: Вулкан издаваштво, Вулкан знање. Малиновић Јовановић, Н., Малиновић, Ј. (2019). *Математика 1, Уџбеник за први разред основне школе 2. део*. Београд: Вулкан издаваштво, Вулкан знање.

Табела 7. *Узорак уџбеника – други разред*

	Уџбеници математике за други разред основне школе
1.	Јухас, И. (2019). *Математика 2А, Уџбеник за други разред основне школе*. Београд: Едука. Јухас, И. (2019). *Математика 2Б, Уџбеник за други разред основне школе*. Београд: Едука.
2.	Маричић, С., Ђуровић, Д. (2019). *Математика 2, Уџбеник за други разред основне школе.* Београд: БИГЗ школство.
3.	Малиновић Јовановић, Н., Малиновић, Ј. (2019). *Математика 2, Уџбеник за други разред основне школе 1. део*. Београд: Вулкан издаваштво, Вулкан знање. Малиновић Јовановић, Н., Малиновић, Ј. (2019). *Математика 2, Уџбеник за други разред основне школе 2. део*. Београд: Вулкан издаваштво, Вулкан знање.
4.	Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2019). *Маша и Раша – Математика 2, Уџбеник за други разред основне школе 1. део.* Београд: Klett. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2019). *Маша и Раша – Математика 2, Уџбеник за други разред основне школе 2. део.* Београд: Klett. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2019). *Маша и Раша – Математика 2, Уџбеник за други разред основне школе 3. део.* Београд: Klett. Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2019). *Маша и Раша – Математика 2, Уџбеник за други разред основне школе 4. део.* Београд: Klett.
5.	Иванчевић Илић, И., Тахировић, С. (2019). *Математика 2, Уџбеник математике за други разред основне школе 1. део.* Београд: Нови Логос. Иванчевић Илић, И., Тахировић, С. (2019). *Математика 2, Уџбеник математике за други разред основне школе 2. део.* Београд: Нови Логос. Иванчевић Илић, И., Тахировић, С. (2019). *Математика 2, Уџбеник математике за други разред основне школе 3. део.* Београд: Нови Логос. Иванчевић Илић, И., Тахировић, С. (2019). *Математика 2, Уџбеник математике за други разред основне школе 4. део.* Београд: Нови Логос.
6.	Рикало, В. (2019). *Математика 2, Уџбеник за други разред основне школе.* Београд: Креативни центар.

Табела 8. *Узорак уџбеника – трећи разред*

	Уџбеници математике за трећи разред основне школе
1.	Јоксимовић, С., Влаховић, Б. (2016). *Математика 3, Уџбеник за трећи разред основне школе 3а*. Београд: Едука. Јоксимовић, С., Влаховић, Б. (2016). *Математика 3, Уџбеник за трећи разред основне школе 3б*. Београд: Едука.
2.	Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2016). *Маша и Раша – Математика 3, Уџбеник за трећи разред основне школе.* Београд: Klett.
3.	Тахировић, С., Иванчевић, И. (2016). *Математика 3, Уџбеник математике за трећи разред основне школе.* Београд: Нови Логос.
4.	Јовановић Лазић, М., Дрндаревић, Д. (2016). *Математика 3, Уџбеник за трећи разред основне школе 1. део.* Београд: Бигз школство. Јовановић Лазић, М., Дрндаревић, Д. (2016). *Математика 3, Уџбеник за трећи разред основне школе 2. део.* Београд: Бигз школство.
5.	Стефановић, А., Рикало, В. (2015). *Математика 3, Уџбеник за трећи разред основне школе*. Београд: Креативни центар.

Табела 9. *Узорак уџбеника – четврти разред*

	Уџбеници математике за четврти разред основне школе
1.	Дејић, М., Милинковић, Ј., Ђокић, О. (2015). *Математика 4, Уџбеник за четврти разред основне школе.* Београд: Креативни центар.
2.	Поповић, Б., Вуловић, Н., Јовановић, М., Николић, А. (2016). *Маша и Раша – Математика 4, Уџбеник за четврти разред основне школе.* Београд: Klett.
3.	Зарупски, С. (2016). *Математика 4, Уџбеник за четврти разред основне школе.* Београд: Едука.
4.	Тахировић, С. (2016). *Математика 4, Уџбеник математике за четврти разред основне школе.* Београд: Нови Логос.
5.	Максимовић, М. (2016). *Математика 4, Уџбеник за четврти разред основне школе 1. део.* Београд: Бигз школство. Максимовић, М. (2016). *Математика 4, Уџбеник за четврти разред основне школе 2. део.* Београд: Бигз школство.

6. МЕТОДЕ, ТЕХНИКЕ И ИНСТРУМЕНТИ ИСТРАЖИВАЊА

У истраживању су коришћене: метода теоријске анализе, дескриптивна метода и емпиријско-експериментална метода.

Методу теоријске анализе смо примењивали у циљу проучавања постојећих теоријских сазнања о проблему истраживања, тј. при анализирању и тумачењу научне и стручне литературе.

Дескриптивну методу смо примењивали за прикупљање података, њихову обраду и интерпретацију, као и код извођења веродостојних закључака. Дескриптивну методу смо користили и у процесу анализе уџбеника и педагошке документације.

Експерименталну методу смо користили као експеримент са паралелним групама. Уводећи експерименталну варијаблу, учење путем открића на диференцираним садржајима у експерименталну групу, настојали смо да утврдимо њене ефекте на образовна постигнића ученика у настави алгебре. У том циљу смо формирали две групе: експерименталну групу, у којој су алгебарски садржаји обрађени путем сачињених експерименталних модела часова, и контролну групу, у којој су поменути наставни садржаји реализовани на уобичајен начин. Због немогућности уједначавања испитиваних група, премештањем ученика из једног одељења у друго, зависна варијабла је статистички контролисана применом статистичког поступка анализа коваријансе. Експериментални програм је спроведен на часовима редовне наставе математике у четвртом разреду основне школе, трајао је 30 часова обраде, утврђивања и систематизације алгебарских садржаја који су прописани наставним програмом математике за четврти разред основне школе. Екпериментални програм је подразумевао примену методичког поступка заснованог на учењу путем открића на диференцираним садржајима. Учитељи, реализатори експерименталног програма, претходно су обучени од стране аутора истраживања о начину реализације истог. Реализација се одвијала према унапред припремљеним моделима припрема у којима је детаљно описан методички поступак и дата прецизна упутства за рад (Прилог 5).

Током истраживања смо примењивали следеће научно-истраживачке технике:

- рад на педагошкој документацији,
- анализу садржаја,
- тестирање,
- анкетирање,
- интервијуисање.

За увид у педагошку документацију служила нам је разредна књига (електронски дневник). Из разредних књига су за сваког ученика у евиденциони лист унети подаци од значаја за истраживање, а односе се на пол, оцену из математике и општи успех ученика.

Технику анализе садржаја смо користили приликом испитивања валидности задатака датих у тестовима. Такође, ову технику смо користили и приликом анализе уџбеника математике како би се сагледало да ли и у којој мери усмеравају ученике на учење путем открића при усвајању знања и формирању појмова везаних за алгебарске садржаје, тј. да би се идентификовали уводни примери (носиоци садржаја који се учи) који стварају основу за учење алгебарских садржаја путем открића. Дакле, акценат је био на анализи методичког приступа у увођењу алгебарских садржаја.

Основну јединицу анализе је представљао уводни садржај/задатак у уџбенику кроз који се ученик упознаје са новим садржајем и формира појмове. У зависности од тога које карактеристичне активности, тј. облике учења, поменути садржаји иницирају код ученика, као категорије анализе садржаја издвојили смо:

– *Учење путем открића* – садржај на који ученик нема спреман одговор, већ захтева од њега мисаоне напоре и увиђање односа, тј. садржај који упућује ученика на самостално откривање нових појмова, правила, алгоритама итд;

– *Рецептивно учење* – експликативни логички организовани садржаји дати у готовом облику које ученик усваја механички или са разумевањем;

– *Остали облици учења.*

Техника тестирања се користила за утврђивање ефеката независне варијабле на постигнућа ученика. Тестирање је вршено три пута. Први пут, пре почетка експерименталног програма – иницијално тестирање. Ово тестирање је имало за циљ прикупљање података о предзнањима ученика и утврђивање нивоа знања ученика на основу броја постигнутих поена на задацима у којима се тражи одговарајући ниво знања. Други пут, након завршетка експерименталног програма – финално тестирање. Трећи пут, ретестирање, реализавано је ради утврђивања ефекта експерименталног програма на трајност знања ученика, и то три месеца након његовог завршетка.

У истраживању је коришћена и техника анкетирања, и то приликом испитивања мишљења ученика о реализацији наставе математике путем учења путем открића на диференцираним садржајима, као и техника интервјуисања у циљу испитивања мишљења учитеља о могућностима и значају који учење путем открића на диференцираним садржајима пружа.

Од инструмената истраживања коришћени су:

- евиденциони лист,
- протокол анализе садржаја,
- тестови знања,
- анкетни упитник за ученике,
- водич за фокус групни интервју са учитељима-реализаторима експерименталног програма.

Евиденциони лист нам је користио при увиду у разредне књиге (електронски дневник), при чему су у њему за сваког ученика унети подаци који се односе на: назив школе, разред, одељење, пол, оцену из математике и општи успех.

Протокол анализе садржаја смо користили при анализи уџбеника математике и исти је израђен за потребе истраживања.

Инструменти који су се користили приликом тестирања су:

- иницијални тест знања – за испитивање иницијалних постигнућа ученика из области алгебре (Прилог 1),
- финални тест знања – за ипитивање ефеката експерименталног модела на образовна постигнућа ученика након спровођења експерименталног програма (Прилог 2),

– поновљени тест или ретест (који је идентичан као и финални тест) – за утврђивање ефеката експерименталног модела на трајност знања ученика (Прилог 2).

Тестове смо сами израдили за потребе истраживања. Задаци на тестовима су структурисани на три нивоа сложености тако да сваки ниво сложености одговара одређеном нивоу образовних постигнућа ученика у почетној настави математике. *Први ниво* је садржао задатке који се односе на битне, суштинске садржаје који представљају обавезан и неопходан фонд знања; *други ниво* је садржао задатке који се односе на оптималне, фундаменталне садржаје предвиђене наставним програмом и *трећи ниво* је обухватио задатке који подразумевају максимална постигнућа ученика у оквиру наставног програма (Дејић и Миленковић, 2016: 18).

Тестови су састављени од трију субтестова (за сваки ниво постигнућа), са по шест задатака, и садрже укупно 18 задатака; задаци су бодовани по тежини (са 4, 5 или 6 поена, у зависности од нивоа сложености задатка), а максималан број бодова који се могао остварити тачним решавањем задатака био је 90. У циљу лакше обраде података, упоређивања и интерпретације добијених резултата пре и након спроведеног експерименталног програма, критеријум бодовања је био исти на свим тестирањима. На основу остварених резултата на иницијалном тесту знања, ученици су рангирани на три нивоа: основни, средњи, напредни.

Иницијални тест је рађен у експерименталној и контролној групи пре почетка експерименталног програма ради утврђивања предзнања ученика о алгебарским садржајима. Тест је садржао 18 задатака. Задаци су групусани према нивоима постигнућа ученика (основни, средњи, напредни ниво), при чему је на сваком нивоу постигнућа било по шест задатака. Вредновање задатака је вршено у зависности од нивоа сложености.

Структура и начин бодовања задатака по нивоима образовних постигнућа је следећи:

– *Основни ниво постигнућа*: (1, 2, 3, 4, 5. и 6. задатак), укупно 24 поена (4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4);

– *Средњи ниво постигнућа* (7, 8, 9, 10, 11. и 12. задатак), укупно 30 поена (5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5);

– *Напредни ниво постигнућа:* (13, 14, 15, 16, 17. и 18. задатак), укупно 36 поена (6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6).

Финални тест знања је рађен након спроведеног експерименталног програма у обема групама испитаника како би се утврдили ефекти учења путем открића на диференцираним садржајима у настави алгебре. Финални тест је направљен као еквивалентна форма иницијалног теста. Садржао је 18 задатака који су груписани према нивоима постигнућа и бодовани са 4, 5 или 6 поена, у зависности од нивоа сложености задатка.

Структура и начин бодовања задатака по нивоима образовних постигнућа је следећи:

– *Основни ниво постигнућа*: (1, 2, 3, 4, 5. и 6. задатак), укупно 24 поена (4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4);
– *Средњи ниво постигнућа* (7, 8, 9, 10, 11. и 12. задатак), укупно 30 поена (5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5);

– *Напредни ниво постигнућа:* (13, 14, 15, 16, 17. и 18. задатак), укупно 36 поена (6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6).

Поновљени тест или *ретест* за утврђивање ефеката експерименталног програма на трајност знања рађен је три месеца након финалног тестирања. Ретест је идентичан као и финални тест, самим тим је структура теста и начин вредновања задатака исти као и код финалног теста:

– *Основни ниво постигнућа*: (1, 2, 3, 4, 5. и 6. задатак), укупно 24 поена (4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4);
– *Средњи ниво постигнућа* (7, 8, 9, 10, 11. и 12. задатак), укупно 30 поена (5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5);
– *Напредни ниво постигнућа:* (13, 14, 15, 16, 17. и 18. задатак), укупно 36 поена (6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6).

На основу остварених резултата на иницијалном тесту, а касније и финалном тесту, ученици су рангирани на следеће нивое: основни, средњи, напредни. У основни ниво су сврстани ученици који су на иницијалном тесту освојили испод 40% укупног броја бодова, тачније од 0 до 35 бодова. У средњи ниво су сврстани ученици чији је успех на тесту био изнад 40% и испод 70 % бодова, тачније од 36 до 64 бода. На напредном нивоу су били ученици који су на иницијалном тесту освојили изнад 70% укупног броја бодова, тј. од 65 до 90 бодова.

Коначној верзији коришћених тестова знања претходило је мини пилот истраживање у циљу утврђивања одговарајућих метријских карактеристика – валидност, објективност, дискриминативност и релијабилност. Метријске карактеристике тестова су испитане на узорку од 102 ученика четвртог разреда Основне школе „Јован Јовановић Змај“ у Врању.

Анкетни упитник за ученике је аутор сачинио за потребе истраживања. Упитник је имао за циљ прикупљање података о мишљењима и искуствима ученика експерименталне групе о настави алгебре организованој применом учења путем открића на диференцираним садржајима. Анкетни упитник је чинило 13 питања (11 затвореног и 2 отвореног типа). На питања су ученици одговарали након реализације експерименталног програма. Структуру анкетног упитника су чинила питања којим су се испитивали: 1) ставови ученика према учењу садржаја на овакав начин у односу на традиционалне часове (4 питања); 2) самоперцепција положаја и напретка у учењу садржаја алгебре путем открића (4 питања); 3) заинтересованост и мотивисаност ученика за учење путем открића на диференцираним садржајима (3 питања); 4) мишљење ученика о предностима и недостацима учења путем открића на диференцираним саржајима алгебре (2 питања).

Водич за фокус групни интервју са учитељима, такође сачињен за потребе овог истраживања, садржао је питања којим су се испитивали:

- утисци и искуства учитеља о могућностима примене и захтевности реализације наставних јединица заснованих на учењу путем открића на диференцираним садржајима,
- мишљење учитеља о позитивним ефектима реализације наставних јединица заснованих на учењу путем открића на диференцираним садржајима,
- мишљење учитеља о предностима и ограничењима примене овакве организације часова.

7. ПРОВЕРА МЕТРИЈСКИХ КАРАКТЕРИСТИКА ИНСТРУМЕНАТА ИСТРАЖИВАЊА

Како бисмо прикупљене податке са иницијалног и финалног теста могли са поузданошћу да користимо у утврђивању и тумачењу ефеката експерименталног програма, било је потребно утврдити метријске карактеристике поменутих тестова. Метријске карактеристике: ваљаност, релијабилност, објективност, осетљивост иницијалног и финалног теста проверене су кроз пилот-истраживање на узорку од 102 ученика.

Валидност (ваљаност) теста

Када говоре о овој карактеристици инструмената, аутори користе више различитих термина, као што су: валидност, ваљаност, тачност, вредност. Одређивањем ваљаности се одређује у суштини „колико инструмент мери оно што се њиме жели мерити, односно још шире, у којој мери служи ономе што од њега очекујемо“ (Mužić, 1986: 324).

Приликом конструкције тестова коришћених у истраживању примењена је вишеструка валидација. Најпре се водило рачуна о логичкој и садржајној валидацији тестова. Тачније, настојали смо да тестови буду у складу са захтевима наставног програма и наставним садржајима на које се односе. Прва верзија иницијалног и финалног теста настале су избором 22 задатка из сета од 60 претходно осмишљених задатака. Из поменутог сета су изабрани задаци за које је процењено да покривају алгебарске садржаје предвиђене наставним програмом и који су у складу са одговарајућим нивоом образовног постигнућа ученика.

Крајња верзија тестова је садржала 18 задатака, пошто су неки задаци из првобитне верзије избачени у процесу одређивања метријских карактеристика.

Валидност тестова је утврђена и израчунавањем степена слагања између резултата на тестовима и оцена из математике које су тестирани ученици имали на крају трећег разреда. У ту сврху је коришћен Пирсонов коефицијент корелације.

Израчунате вредности коефицијента корелације и на иницијалном ($r_{xy} = 0{,}95$) и на финалном тесту ($r_{xy} = 0{,}9$) потврђују високу корелацију између оцена ученика са теста и њихових оцена из математике.

Како израчунати коефицијенти корелације имају високу вредност (већу од 0,80), можемо закључити да су анализирани тестови знања ваљани (валидни).

Објективност теста

Објективност теста је постигнута ако добијени резултати одражавају искључиво знање ученика. То значи да резултати мерења треба да зависе од мерног инструмента, а не од онога ко мери тим инструментом (Круљ, Стојановић и Круљ Драшковић, 2007).

Да би се избегло деловање субјективног фактора, већ приликом конструкције теста настојали смо да бирамо задатке који асоцирају само на један одговор, а не на више. У исту сврху је припремљен и кључ решења, при чему су дати одговори који се могу сматрати прихватљивим, што је максимално смањило могућност грешке у оцењивању.

Објективност тестова коришћених у сврху нашег истраживања утврдили смо израчунавањем степена слагања резултата оцењивања двају независних оцењивача при оцењивању истог теста. Један оцењивач је био аутор тестова, а други оцењивач је био један од учитеља-реализатора експерименталног програма.

Степен повезаности између броја поена којим су оцењивачи бодовали тест одређен је путем Пирсоновог коефицијента линеарне корелације који је за иницијални тест износио $r_{xy} = 0{,}96$, а за финални $r_{xy} = 0{,}97$.

Како се поставља захтев да објективност мерног инструмента буде потпуна, тј. да „коефицијент корелације између оцена које су дали разни оцењивачи има вредност +1" (Банђур и Поткоњак, 1999: 227), закључујемо да примењени тестови у истраживању имају високу објективност.

Поузданост (релијабилност) теста

Тест знања *је поуздан (релијабилан)* ако се у двама узастопним мерењима на истим испитаницима добију истоветни или бар доста слични резултати (Банђур и Поткоњак, 1999).

Поузданост, односно релијабилност и валидност су вишеструко и прилично високо повезани. Од тога колико тест прецизно мери оно што желимо мерити умногоме зависи и то колико ћемо имати поверења у резултате тестирања (Mužić, 1986).

У случају тестова који су коришћени у нашем истраживању поузданост је утврђена израчунавањем Кронбах алфа коефицијента који се употребљава за мерење интерне конзистенције. Израчуната вредност Кронбаховог алфа коефицијента за иницијални тест износи α = 0,79, док је за финални α = 0,80. На основу ових вредности коефицијента поузданости закључујемо да су оба теста довољно поуздана, с обзиром на препоруке да се вредност овог коефицијента не нижа од 0,70 сматра задовољавајућом (DeVellis, 2003).

Дискриминативност (осетљивост) теста

„Осетљивост се постиже када тестом можемо утврдити фине разлике код испитаника у ономе што меримо" (Stojaković, 2002: 53). Дискриминативност теста је утолико већа уколико се помоћу њега могу регистровати мање разлике, тј. ако се у тесту могу добро разликовати добри од слабих испитаника (Банђур и Поткоњак, 1999).

Који ће задаци остати у тесту, а који ће бити елиминисани зависи од дискриминативне вредности задатка. Дискриминативну вредност задатака на тестовима коришћеним у истраживању одредили смо путем ајтем анализе. Приликом ајтем анализе најпре смо израчунали тежину задатка, односно *p-value* (енгл. *proportions of positive answers*) и пропорцију ученика који нису решили задатак ($q = 1 - p$). Множењем p и q добили смо коефицијент дискриминативности задатка (pq), који се креће од 0,00 до 0,25. Задаци чији је коефицијент дискриминативне вредности мањи од 0,12, нису примерени испитаницима, тј. нису довољно дискриминативни па се зато елиминишу из теста. „Приликом ајтем анализе, треба водити рачуна и о метријској карактеристици примереност по тежини, која је уско повезана са дискриминативношћу теста" (Банђур и Поткоњак, 1999: 225).

Табела 10. *Ајтем-анализа за иницијални тест знања*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
То	80	95	71	79	75	90	71	69	47	60	46	34	54	53	13	31	41	33	36	12	41	32
Но	22	7	31	23	27	12	31	33	55	42	56	68	48	49	89	71	61	69	66	90	61	70
p	0,78	0,93	0,69	0,77	0,74	0,88	0,69	0,67	0,46	0,58	0,45	0,33	0,53	0,51	0,13	0,30	0,40	0,32	0,35	0,11	0,40	0,31
q	0,22	0,07	0,31	0,23	0,26	0,12	0,31	0,33	0,54	0,42	0,55	0,67	0,47	0,49	0,87	0,70	0,6	0,68	0,65	0,89	0,60	0,69
pq	**0,17**	**0,06**	**0,21**	**0,18**	**0,19**	**0,10**	**0,21**	**0,22**	**0,25**	**0,24**	**0,24**	**0,22**	**0,25**	**0,24**	**0,11**	**0,21**	**0,24**	**0,21**	**0,22**	**0,10**	**0,24**	**0,21**

Табела 11. *Ајтем-анализа за финални тест знања*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
То	72	67	75	89	71	77	80	93	56	34	47	60	12	49	54	33	36	37	41	32	39	14	12
Но	30	35	27	13	31	25	22	9	46	68	55	42	90	53	48	69	66	65	61	70	63	88	90
p	0,7	0,65	0,74	0,87	0,69	0,75	0,78	0,91	0,55	0,33	0,46	0,58	0,11	0,48	0,53	0,32	0,35	0,36	0,40	0,31	0,35	0,13	0,12
q	0,3	0,35	0,26	0,13	0,31	0,25	0,22	0,09	0,45	0,67	0,54	0,42	0,89	0,52	0,47	0,68	0,65	0,64	0,6	0,69	0,65	0,87	0,88
pq	**0,21**	**0,22**	**0,19**	**0,11**	**0,21**	**0,18**	**0,17**	**0,08**	**0,24**	**0,22**	**0,25**	**0,24**	**0,10**	**0,24**	**0,25**	**0,21**	**0,22**	**0,23**	**0,24**	**0,21**	**0,22**	**0,11**	**0,10**

p - пропорција ученика који су тачно решили задатак

q - пропорција ученика који су погрешно решили задатак

pq - коефицијент дискриминативне вредности задатка

Резултати ајтем анализе за иницијални тест налазе се у Табели 10. Из табеле уочавамо да већина задатака на иницијалном тесту има добру дискриминативну вредност. Други, шести, петнаести и двадесети задатак смо елиминисали из првобитне верзије теста јер је коефицијент *pq* био мањи од 0,12. Задаци су средње тежине (*p-value*) која се креће у опсегу од 0,30 до 0,80, имали су добру дискриминативност, што је још један показатељ осетљивости теста.

Резултати Ајтем анализе за финални тест знања (Табела 11) показују да је коефицијент дискриминативне вредности код већине задатака на тесту задовољавајући, тачније код већине задатака коефицијент дискриминативне вредности је већи од 0,12, односно мањи или једнак са 0,25. Из првобитне веризије финалног теста елиминисани су четврти, осми, тринаести, двадесет други и двадесет трећи задатак због ниске дискриминативне вредности. Резултати нам показују да су преостали задаци на тесту били примерене тежине, те да нису постојали екстреми у смислу прелаких нити претешких задатака.

С обзиром на задовољавајуће резултате које смо добили провером метријских карактеристика тестова коришћених у истраживању, закључујемо да се конструисани тестови могу користити као валидни параметри у нашем истраживању.

У литератури наилазимо на став да параметријске технике „дају тачне резултате само када су популације из којих су узорци узети нормално расподељене. У многим истраживањима (нарочито у друштвеним наукама), вредности зависне промењиве нису нормално расподељене. Срећом, већина техника је прилично робусна, тј. нарушавање ове претпоставке проузрокује малу нетачност резултата. Када су узорци довољно велики, кршење ове претпоставке не би требало да проузрокује веће проблеме" (Pallant, 2011: 208).

Ми смо се одлучили да тестирамо нормалност расподеле за експерименталну и контролну групу и то за сва три мерења (Табела 12).

Табела 12. *Тестирање нормалности иницијалног, финалног и поновљеног теста за Е и К групу*

Група	Тест	Skewness	Sde	Kurtosis	Sde
Експериментална	Иницијални	0,60	0,211	- 0,872	0,419
	Финални	-0,079	0,211	-1,046	0,419
	Поновљени	- 0,105	0,211	-1,031	0,419
Контролна	Иницијални	0,155	0,213	-1,027	0,423
	Финални	0,102	0,213	- 0,854	0,423
	Поновљени	0,093	0,213	-0,751	0,423

Као прихватљив доказ нормалне униваријантне дистрибуције сматра се „вредност за скјунис (skewness) и куртозис (kurtosis) између -2 и +2" (George & Mallery, 2010, према: Ковач, 2020: 101). С обзиром на то да се нађене вредности за скјунис (асиметричност) и куртозис (спљоштеност) налазе у поменутом опсегу, закључујемо да се ради о нормалној дистрибуцији.

Такође, нормалност расподеле резултата са тестова знања коришћених у истраживању испитали смо и Колмогоров-Смирновљевим тестом (Табела 13).

Табела 13. *Нормалност дистрибуције – Колмогоров-Смирновљев тест*

		Kolmogorov-Smirnov		
Група		Statistic	df	p
Експериментална	иницијално мерење	0,077	132	0,066
	финално мерење	0,054	132	0,20*
	ретест	0,061	132	0,20*
Контролна	иницијално мерење	0,088	129	0,068
	финално мерење	0,061	129	0,20*
	ретест	0,097	129	0,197*

Из Табеле 13 уочавамо да је сигнификантност Колмогоров – Смирновљевог теста код свих тестирања у обе групе већа од 0,05, што потврђује нормалност расподеле. С обзиром на нормалну расподелу података у обради резултата примењиваћемо параметријске статистичке поступке.

Финалној верзији анкетног упитника за ученике претходило је пилот испитивање истог на узорку од 35 ученика. Вредност израчунатог Кронбаховог алфа коефицијента од 0,769 указује на добру и високу поузданост анкетног упитника за ученике.

8. ОРГАНИЗАЦИЈА И ТОК ИСТРАЖИВАЊА

Емпиријско истраживање је спроведено током школске 2019/2020. године и реализовано је кроз следеће етапе:

1. Прибављање и проучавање релевантне литературе ради постављања теоријских оквира истраживања и стварања методолошке основе за проучавање изабраног проблема;
2. Израда модела припрема за учење путем открића на диференцираним садржајима за часове обраде, утврђивања и систематизације према наставном плану и програму и годишњем плану Министарства просвете, науке и технолошког развоја за четврти разред основне школе. Експериментални програм је реализован на часовима редовне наставе математике у четвртом разреду основне школе и трајао је 30 часова наставе математике и обухватио је алгебарске садржаје (Једначине, Неједначине, Зависност резултата од промене компонената, Изрази са променљивом) предвиђене наставним програмом математике за четврти разред основне школе;
3. Прикупљање сагласности школа за спровођење истраживања;
4. Анализа педагошке документације ради прикупљања података о ученицима који ће бити обухваћени истраживањем;
5. Израда инструмента иницијалног мерења и спровођење пилот-истраживања ради утврђивања метријских карактеристика теста;
6. Израда коначне форме иницијалног теста и његова реализација;
7. Консултације и прелиминарни разговори са учитељима о реализацији експерименталног програма;

8. Реализација експерименталног програма. Учитељи у експерименталним одељењима су радили према израђеним моделима припрема за учење путем открића на диференцираним садржајима. Учитељи контролних група су радили на уобичајен начин. Аутор истраживања је поред сталних консултација са учитељима експерименталне групе посећивао часове на којима се реализовао експериментални програм и по потреби се укључивао у реализацију истих у циљу праћења квалитета примене модела;

9. Након завршетка експерименталног програма уследила је израда финалног теста и спровођење финалног тестирања ученика експерименталне и контролне групе, и то у истим условима у којима је реализовано иницијално тестирање;

10. Израда анкетних упитника за учитеље и ученике експерименталних група;

11. Анкетирање учитеља и ученика у циљу испитивања њиховог мишљења о настави математике реализованој применом учења путем открића на диференцираним садржајима;

12. На крају школске године је спроведено ретестирање ученика у циљу испитивања трајности знања ученика под утицајем експерименталног програма;

13. Прегледавање тестова и сређивање прикупљених података за обраду, статистичка израчунавања и анализа истих, интерпретација добијених резултата и извођење закључака спроведеног истраживања.

9. СТАТИСТИЧКА ОБРАДА ПОДАТАКА

Податке добијене у истраживању статистички смо обрадили употребом софтверског пакета IBM SPSS Statistics 21. У обради података су примењени следећи стандардни статистички поступци:

– Колмогоров–Смирнољевим тестом је утврђивана нормалност расподеле података са иницијалног, финалног и поновљеног тестирања;

– Једнофакторском анализом варијансе (ANOVA) је утврђивана статистичка значајност разлика у образовним постигнућима између ученика обеју истраживачких група на сва три тестирања;

– Анализа коваријансе (ANCOVA) је коришћена како бисмо статистички контролисали уједначеност тестираних група уклањањем варијансе у зависној промењљивој, а у циљу утврђивања статистичке значајности разлика између експерименталне и контролне групе на свим мерењима;

– Једнофакторску анализу варијансе поновљених мерења користили смо за тестирање разлика у оствареним поенима у три временска интервала;

– Комбинована анализа варијансе је примењена ради утврђивања утицаја експерименталног програма и независних варијабли везаних за ученике (пол, оцена из математике и општи успех) на њихово напредовање у образовним постигнућима;

– Левеновим тестом смо испитали претпоставку о хомогености (једнакости) варијансе;

– Парцијалним ета квадратом смо утврђивали јачину утицаја независних варијабли;

– Накнадним вишеструким поређењем (Bonferroni Post Hoc Test) испитивали смо између којих подгрупа ученика постоје разлике према постигнућу на тестовима знања;

– Помоћу Кронбах-алфа коефицијента утврдили смо поузданост инструмената;

– Статистичку значајност разлике у дистрибуцији нивоа постигнућа Е и К групе на иницијалном и финалном мерењу проверили смо помоћу Х и квадрат теста;

– Податке прикупљене анализом садржаја представили смо и интерпретирали квантитативно користећи фреквенције и проценте;

– За анализу одговора анкетираних ученика коришћене су класичне методе анализе – фреквенце (f) и проценти (%);

– Пирсонов коефицијент линеарне корелације користили смо при испитивању објективности и валидности мерних инструмената.

III АНАЛИЗА И ИНТЕРПРЕТАЦИЈА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА

„Образовање које се заснива само на захтевима и саветима,
а не на примерима, лоше је образовање.“

Jan Amos Komenski

1. УТИЦАЈ УЧЕЊА ПУТЕМ ОТКРИЋА НА ДИФЕРЕНЦИРАНИМ САДРЖАЈИМА АЛГЕБРЕ НА ПОСТИГНУЋА УЧЕНИКА

Први истраживачки задатак се односио на испитивање утицаја откривајућег учења на диференцираним садржајима алгебре на постигнућа ученика. Ефекте експерименталног модела смо посматрали кроз образовна постигнућа на тестовима у целини и кроз постигнућа на појединачним суптестовима, путем којих су задаци структурисани на три нивоа сложености тако да сваки ниво сложености одговара одређеном нивоу образовних постигнућа ученика: основни, средњи и напредни. Претпоставили смо да учење путем открића на диференцираним садржајима алгебре доприноси повећању образовних постигнућа ученика у почетној настави математике.

Увођењу експерименталног фактора, односно независне варијабле, претходило је иницијално тестирање са циљем да се испита и утврди ниво претходних знања ученика о алгебарским садржајима, стечених током прва три разреда, односно да се утврди да ли између ученика контролне и експерименталне групе постоји разлика у погледу (пред)знања са којима ће отпочети експериментални програм. У Табели 14 је дат приказ композитног скора са иницијалног и финалног теста за експерименталну и контролну групу, те за све испитанике заједно.

Табела 14. *Успешност ученика Е и К групе на иницијалном и финалном тесту – дескриптивни показатељи*

		N	M	SD	Std. Error	95% Интервал поверења Доња граница	Горња граница
Иницијално мерење	Е-група	132	40,12	18,81	1,64	36,88	43,36
	К-група	129	40,33	19,59	1,72	36,91	43,74
	Укупно	261	40,22	19,16	1,19	37,89	42,56
Финално мерење	Е-група	132	51,42	22,87	1,99	47,49	55,36
	К-група	129	41,87	19,16	1,69	38,53	45,21
	Укупно	261	46,70	21,62	1,34	44,07	49,34

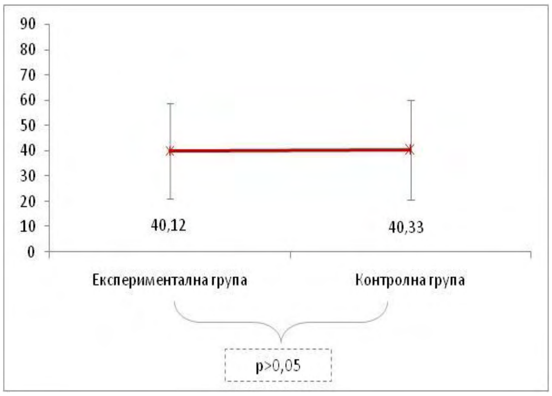
Просечно постигнуће ученика експерименталне групе на иницијалном тесту у целини износи M = 40,12; SD = 18,81, док је контролна група на овом тесту остварила просек од M = 40,33; SD = 19,59. На основу изнетих резултата уочавамо да су ученици експерименталне и контролне групе остварили приближно једнаке резултате у погледу просечног броја поена на иницијалном тесту у целини, тј. да је остварена разлика између резултата двеју група незнатна. Како бисмо што прецизније доказали уједначеност ученика Е и К групе у погледу предзнања о алгебарским садржајима, приступили смо статистичком поступку анализе варијансе (ANOVA).

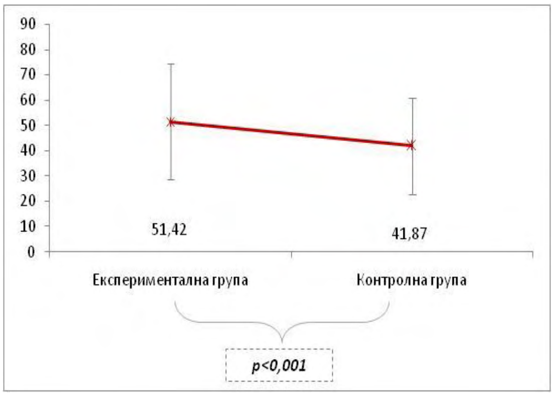
Израчуната варијанса почетног мерења ($F(1,259) = 0,007$; $p = 0,932$) указује на то да не постоји статистички значајна разлика у просечном постигнућу на иницијалном тесту између ученика експерименталне и контролне групе (Табела 16). Овакав налаз говори о почетној уједначености укупног узорка ученика према постигнућу на иницијалном тесту знања. Другим речима, ови резултати показују да су ученици експерименталне и контролне групе са сличним предзнањем започели експеримент. Левенов тест ($F = 0,504$; $p = 0,478$) потврђује претпоставку о хомогености варијанси па се добијени резултат може окарактерисати као релевантан.

Финалним мерењем смо желели да утврдимо утицај и ефекте учења путем открића на диференцираним садржајима на постигнућа ученика из математике након реализације експерименталног програма. Завршно тестирање ученика и једне и друге групе извршено је након тридесет часова обраде и утврђивања алгебарских садржаја, при чему су ученици експерименталне групе радили по експерименталном моделу, док су ученици контролне групе радили по свакидашњем, устаљеном моделу учења.

Увидом у Табелу 14 уочавамо да су ученици експерименталне групе постигли знатно боље просечно постигнуће на завршном мерењу у односу на почетно мерење (M = 51,42; SD = 22,87), док је то побољшање код ученика контролне групе било знатно мање (M = 41,87; SD = 19,16). Евидентно је и да су, након спроведеног експерименталног програма, ученици експерименталне групе остварили знатно боље резултате у поређењу са ученицима из контролне групе.

У циљу боље прегледности, на Графикону 1 су представљене разлике у постигнућу ученика Е и К групе мерене просечним бројем поена група на иницијалном и финалном тесту.





Графикон 1. *Успех ученика експерименталне и контролне групе на иницијалном и финалном тесту*

На основу приказаних резултата уочавамо просечну разлику од 9,55 поена у корист ученика из експерименталне групе, што потврђује позитиван утицај експерименталног модела на њихова постигнућа. Поступком анализе варијансе испитали смо статистички значај остварених разлика између ученика из експерименталне и контролне групе на завршном тестирању. Претпоставка о једнакости варијансе није задовољена, на шта указује вредност Левеновог теста једнакости варијанси (F = 5,231; p = 0,023), па ћемо у анализама које следе узимати строжи ниво 0,01 као праг значајности.

Добијена вредност варијансе (F (1,259) = 13,356; p = 0,000) указује на постојање статистички значајне разлике између ученика експерименталне и контролне групе у просечном броју остварених поена на завршном тесту у целини, што иде у прилог потврђивању полазне претпоставке о значајном напредовању ученика експерименталне групе, под дејством експерименталног фактора (Табела 16).

Табела 15. *Test of Homogeneity of Variances*

	Levene Statistic	df1	df2	p
Иницијално мерење	0,504	1	259	0,478
Финално мерење	5,231	1	259	0,023

Табела 16. *Разлика у укупном постигнућу између експерименталне и контролне групе на иницијалном и финалном тесту (ANOVA test)*

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	p
Иницијално мерење	Између група	2,725	1	2,725	0,007	0,932
	Унутар групе	95.470,386	259	368,612		
	Укупно	95.473,111	260			
Финално мерење	Између група	5.957,688	1	5.957,688	13,356	0,000
	Унутар групе	115.535,002	259	446,081		
	Укупно	121.492,690	260			

Како није било могућности за уједначавање експерименталне и контролне групе, премештањем субјеката из једног одељења у друго, зависну варијаблу смо статистички контролисали применом статистичког поступка анализа коваријансе, при чему су резултати иницијалног тестирања узети као коваријат у обема групама. Коваријат је измерен пре деловања експерименталног програма, а вредност Кронбах алфа коефицијента 0,79 (Табела 17) указује да је довољно поуздан.

Табела 17. *Кронбахов коефицијент алфа за иницијални тест*

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	Cronbach's Alpha Based on Standardized Items	N of Items
0,79	0,77	18

Једна од претпоставки која је предуслов за једнофакторску анализу коваријансе јесте провера хомогености нагиба регресионе линије. Провером хомогености нагиба регресионе линије (Табела 18) добили смо да је вредност интеракције зависне променљиве и коваријата ($F = 1{,}792$; $p = 0{,}178$), што значи да није нарушена претпоставка о хомогености регресионог нагиба.

Табела 18. *Хомогеност регресионих нагиба*

Dependent Variable: Укупно_финални тест

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	128578,053[a]	3	42859,351	1.272,886	0,000
Intercept	5957,688	1	5957,688	176,938	0,000
Grupa	81,82	1	81,82	2,429	0,09
Укупно_иницијално мерење	9824,720	1	9824,720	291,104	0,000
Grupa * Укупно_иницијално мерење	60,34	1	60,34	1,792	0,178
Error	8721,015	257	33,671		
Total	690733,000	261			
Corrected Total	121492,690	260			

a. R Squared = 0,936 (Adjusted R Squared = 0,935)

Једнакост варијанси резултата двеју група испитана је Левеновим тестом. Вредност Левеновог теста показује да није дошло до нарушавања претпоставке о једнакости варијансе (F = 3,087; p = 0,080), што значи да су услови за примену анализе коваријансе испуњени.

Табела 19. *Levene'sTest of Equality of Error Variances*

Dependent Variable: Финално мерење

F	df1	df2	Sig.
3,087	1	259	0,080

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.

Табела 20. *Разлика између експерименталне и контролне групе на финалном тесту у целини (ANCOVA test)*

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: Финално мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	p	Partial Eta Squared
Corrected Model	114803,043[a]	2	57.401,522	2.213,808	0,000	0,945
Intercept	657,990	1	657,990	25,377	0,000	0,090
Inici_ukupno	108.845,356	1	108.845,356	4.197,845	0,000	0,942
Grupa	6.232,709	1	6.232,709	240,377	0,000	0,482
Error	6.689,646	258	25,929			
Total	690.733,000	261				
Corrected Total	121.492,690	260				

a. R Squared = 0,945 (Adjusted R Squared = 0,944)

Вредност коваријансе (F (1,258) = 240,377; p = 0,000) указује на велику и значајну разлику између Е и К групе, што потврђује да утврђена разлика између група на финалном тестирању није последица неуједначености група у основном (иницијалном) знању из математике, већ је последица примењеног методичког поступка (Табела 20).

Вредност парцијалног ета квадрата (0,482) показује да постоји велики утицај учења путем открића на диференцираним садржајима, при чему се 48,2% варијансе у финалном мерењу може објаснити деловањем експерименталног програма. Пошто се искључи утицај независне променљиве (група), утицај коваријата (иницијалног мерења) на резултате финалног теста такође је значајан (F = 4.197,845; p = 0,000). На јаку везу између резултата испитивања ефеката имплементираног методичког поступка на успех ученика пре и после деловања експерименталног фактора указује вредност парцијалног ета квадрата (0,942). Њиме се може објаснити чак 94,2% варијансе у резултатима финалног теста.

Сви претходно представљени и анализирани резултати указују да су остварене разлике у постигнућу ученика Е и К групе на завршном тестирању, а за које је утврђено да су статистички значајне, резултат ефикасне реализације алгебарских садржаја применом учења путем открића на диференцираним садржајима у Е групи, у поређењу са традиционалним приступом њихове обраде који је примењен у К групи.

Хипотезу коју смо поставили на почетку истраживања утемељили смо на резултатима тангентних истраживања у којима је потврђено да ученици који математичке садржаје уче путем открића (Yurniwati& Hanum, 2017; Khasanah et al., 2018; Baroody, Eiland & Purpura, 2013; Balim, 2009; Putriani & Rahayu, 2018; Sihombing, Singaga & Mukhtar, 2017; Малешевић, 2011) или кроз диференцирање у настави (Миловановић, 2008; Вуловић, 2011; Bikić, Maričić & Pikula, 2016) постижу знатно боља постигнућа на тестовима знања. Налази нашег истраживања се подударају са резултатима наведених аутора, што потврђује претпоставку да настава заснована на функционалном повезивању учења путем открића и диференцијације доприноси побољшању образовних постигнућа ученика у почетној настави математике.

У теоријском делу рада је истакнуто да сложеност и апстрактност алгебарских садржаја, као и потешкоће које ученици имају при усвајању ових садржаја, условљавају одабир посебних метода и поступака при њиховом методичком обликовању (Kieran, 2004a). Резултати нашег истраживања су показали да концепт наставе заснован на уважавању индивидуалних карактеристика и разлика које постоје међу ученицима, као и на активирању ученика у процесу учења, заснованом на откривању, представља добру основу за ефикасније усвајање алгебарских садржаја.

Имајући у виду предности овог методичког приступа потребно га је афирмисати и чешће планирати и примењивати у почетној настави математике, јер су образовни ефекти оваквог начина рада бољи у поређењу са уобичајеним, устаљеним начином рада. То значи да треба смањити предавачку функцију учитеља и стварати услове за активно учествовање ученика у њима прилагођеној настави, при чему самостално истражују и активно примењују откривена решења. Свакако да ово није универзални модел учења по коме би требало да се реализују сви садржаји почетне наставе математике. Осим тога, избор поступака и облика учења у извесној мери одређен је специфичношћу појединих наставних садржаја. Ипак, сматрамо да већи део програма, уз одговарајућа прилагођавања, може бити усвојен на овај начин.

1.1. Ефекти учења путем открића на диференцираним садржајима на постигнућа ученика према образовним нивоима постигнућа

Намера истраживања је била да прати ефекте учења путем открића на диференцираним садржајима алгебре на сваком од нивоа постигнућа: основном, средњем и напредном. Стога ћемо анализу утицаја експерименталног програма пратити на сваком нивоу постигнућа и тако је представити.

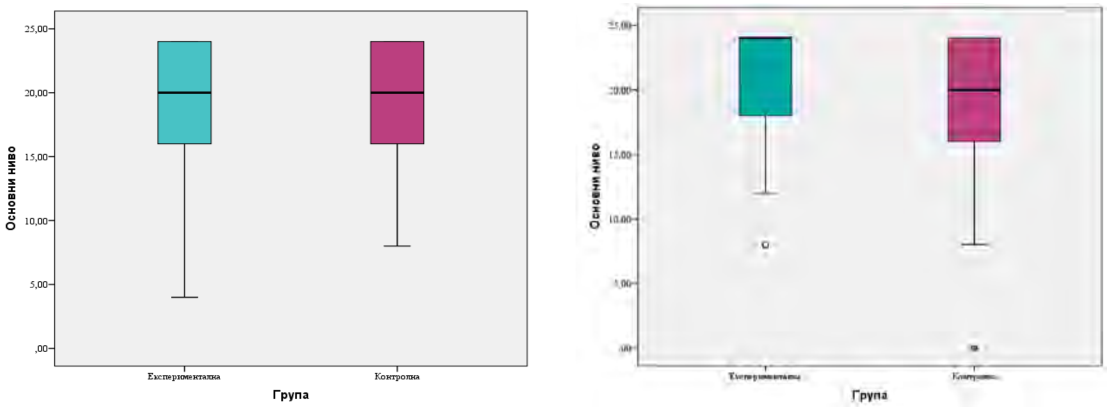
1.1.1. Ефекти учења путем открића на диференцираним садржајима на основном нивоу постигнућа

Како би се анализирали ефекти учења путем открића на диференцираним садржајима на успех ученика у учењу алгебарских садржаја са основног нивоа, најпре ћемо представити резултате које су ученици на тестирању постигли. У Табели 21 су представљени дескриптивни показатељи успешности ученика експерименталне и контролне групе у решавању задатака са основног нивоа постигнућа на почетном и завршном мерењу. Просечно постигнуће ученика који су учили по експерименталном програму на основном нивоу иницијалног теста износи M = 18,76; SD = 4,85, док је контролна група остварила нешто бољи резултат од M = 18,85; SD = 4,72.

Табела 21. *Успешност ученика Е и К групе на основном нивоу постигнућа на иницијалном и финалном мерењу – дескриптивни показатељи*

		N	M	SD	Std. Error	95% Интервал поверења	
						Доња граница	Горња граница
Иницијални тест	Експериментална	132	18,76	4,85	0,42	17,92	19,59
	Контролна	129	18,85	4,72	0,42	18,03	19,68
	Укупно	261	18,80	4,78	0,30	18,22	19,39
Финални тест	Експериментална	132	21,12	4,29	0,37	20,38	21,86
	Контролна	129	19,19	4,37	0,38	18,43	19,96
	Укупно	261	20,17	4,43	0,27	19,63	20,71

Ако упоредимо резултате које су испитиване групе оствариле на основном нивоу почетног и завршног тестирања (Графикон 2), уочавамо да су ученици који су учили по експерименталном програму под његовим утицајем остварили знатно веће просечно постигнуће на основном нивоу финалног теста у односу на исти ниво иницијалног теста (M = 21,12; SD = 4,29), док је то побољшање код ученика контролне групе било знатно мање (M = 19,19; SD = 4,37).



Графикон 2. *Успех ученика експерименталне и контролне групе на основном нивоу постигнућа иницијалног и финалног теста*

Утицај експерименталног програма на постигнућа ученика са основног нивоа испитан је применом двофакторске анализе варијансе. Левенов тест једнакости варијанси (F = 0,287; p = 0, 593) указује да озбиљније нарушавање претпоставке није било.

Табела 22. *Levene's Test of Equality of Error Variances*

Dependent Variable: Финално мерење (основни ниво)

	F	df1	df2	Sig.
Основни ниво	0,287	1	259	0,593

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.

Табела 23. *Разлика између експерименталне и контролне групе на основном нивоу постигнућа финалног теста (ANCOVA test)*

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: Финално мерење (основни ниво)

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	P	Partial Eta Squared
Corrected Model	3206,321 [a]	2	1603,161	218,814	0,000	0,629
Intercept	742,209	1	742,209	101,303	0,000	0,282
Inicijalni_osn	2963,955	1	2963,955	404,547	0,000	0,611
Grupa	259,551	1	259,551	35,426	0,000	0,121
Error	1890,261	258	7,327			
Total	111264,000	261				
Corrected Total	5096,582	260				

a. R Squared = 0,629 (Adjusted R Squared = 0, 626)

Када се уклони утицај коваријата (резултат иницијалног мерења на основном нивоу), добијамо резултат који указује да између успеха ученика Е и К групе на основном нивоу финалног теста постоје разлике које су статистички значајне (F = 35,426; p = 0,000). Вредност парцијалног ета квадрата (0,121) потврђује умерен утицај експерименталног методичког приступа (Cohen, 1988; према: Pallant, 2011). То значи да се 12,1% варијансе на основном нивоу финалног мерења може објаснити независном променљивом, тј. експерименталним моделом учења.

Утицај коваријата (иницијално постигнуће ученика са основног нивоа) на резултате са истог нивоа финалног тестирања, када се елиминише утицај независне променљиве (група – начин рада), статистички је значајан (F = 404,547; p = 0,000). Утицај варијансе у резултатима финалног теста јесте велики, на шта указује парцијални ета квадрат (0,611) (Табела 23).

Резултати указују на значајне ефекте учења путем открића на диференцираним садржајима алгебре на основном нивоу постигнућа, тј. показују да је експериментални модел учења значајно допринео побољшању постигнућа на основном нивоу. Овакви резултати су у складу са налазима других аутора (Bikić, Maričić & Pikula, 2016) који су у својим истраживањима доказали позитиван утицај методичког приступа заснованог на принципима проблемског учења (као једног од облика активног учења) на диференцираним садржајима у настави математике на основном нивоу постигнућа.

Будући да се ради о најнижем нивоу постигнућа, ови резултати су охрабрујући. То значи да су и ученици који имају најслабији успех у настави математике остварили напредак, захваљујући томе што су активно учествовали у откривању алгебарских појмова, правила итд. на садржајима прилагођеним њиховим способностима. Овај модел учења подстиче све ученике на активност, а истовремено обезбеђује услове у којима се настава што више приближава могућностима ученика, тако да свако од ученика може да одговори на део захтева (Ilić, 2002), па је самим тим напредак неминован.

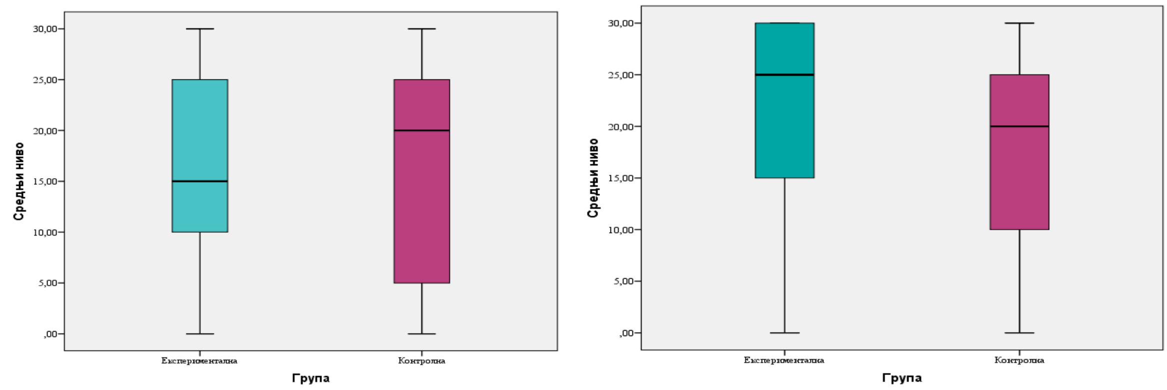
1.1.2. Ефекти учења путем открића на диференцираним садржајима на средњем нивоу постигнућа

Дескриптивни показатељи успешности ученика Е и К групе у решавању задатака са средњег нивоа постигнућа на почетном и завршном тестирању приказани су у Табели 24. Просечно постигнуће ученика експерименталне групе на средњем нивоу иницијалног теста износи M = 16,36; SD = 9,27, док је контролна група остварила приближно исти просек од M = 16,40; SD = 10,08.

Табела 24. *Успешност ученика Е и К групе на средњем нивоу постигнућа на иницијалном и финалном мерењу – дескриптивни показатељи*

		N	M	SD	Std. Error	95% Интервал поверења Доња граница	 Горња граница
Иницијални тест	Експериментална	132	16,36	9,27	0,81	14,77	17,96
	Контролна	129	16,40	10,08	0,89	14,64	18,15
	Укупно	261	16,38	9,66	0,60	15,20	17,56
Финални тест	Експериментална	132	20,53	9,62	0,84	18,87	22,19
	Контролна	129	17,74	9,82	0,86	16,03	19,45
	Укупно	261	19,15	9,80	0,61	17,96	20,35

На средњем нивоу финалног мерења ученици контролне групе су остварили нешто већи број поена у поређењу са резултатима иницијалног мерења (M = 17,74; SD = 9,82), док су ученици који су учили по експерименталном програму, под његовим утицајем, остварили значајно већи просечни резултат (M = 20,53; SD = 9,62). Наведено се може уочити и на Графикону 3.



Графикон 3. *Успех ученика експерименталне и контролне групе на средњем нивоу постигнућа иницијалног и финалног теста*

Утицај експерименталног програма на постигнућа ученика са средњег нивоа постигнућа испитан је применом двофакторске анализе варијансе. Претпоставка о хомогености варијансе је испитана прелиминарним испитивањем. Претпоставка о једнакости варијансе је задовољена, на шта указује Левенов тест једнакости варијанси (F = 3,705; p = 0,06).

Табела 25. *Levene's Test of Equality of Error Variances*

Dependent Variable: Финално мерење (средњи ниво)

	F	df1	df2	Sig.
Средњи ниво	3,705	1	259	0,06

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.

Табела 26. *Разлика између експерименталне и контролне групе на средњем нивоу постигнућа финалног теста (ANCOVA test)*

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: Финално мерење (средњи ниво)

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	P	Partial Eta Squared
Corrected Model	21622,815 [a]	2	10811,407	837,375	0,000	0,867
Intercept	997,128	1	997,128	77,230	0,000	0,230
Inicijal_sred	21116,382	1	21116,382	1.635,526	0,000	0,864
Grupa	517,246	1	517,246	40,062	0,000	0,134
Error	3331,055	258	12,911			
Total	120701,000	261				
Corrected Total	24953,870	260				

a. R Squared = 0,867 (Adjusted R Squared = 0, 865)

По уклањању утицаја коваријата (резултата иницијалног мерења на средњем нивоу), утврђено је да постоје статистички значајне разлике у постигнућу између испитиваних група ученика на средњем нивоу финалног теста (F = 40,062; p = 0,000). Вредност парцијалног ета квадрата је 0,134 – што представља умерен утицај (Cohen, 1988; према: Pallant, 2011). То подразумева да се 13,4% варијансе на средњем нивоу финалног мерења може објаснити независном променљивом, тј. експерименталним моделом учења.

Пошто се искључи утицај независне променљиве (група – начин рада), утицај коваријата (иницијално постигнуће ученика средњег нивоа) на резултате финалног теста такође је значајан (F = 1.635,526; p = 0,000). Парцијални ета квадрат (0,864) указује на велики утицај варијансе у резултатима финалног теста (Табела 26).

Резултати указују да је учење путем открића на диференцираним садржајима алгебре значајно допринело побољшању постигнућа на средњем нивоу. С друге стране, ученици који су поменуте садржаје учили по класичном, устаљеном моделу наставе математике, такође су напредовали на средњем нивоу постигнућа финалног мерења, али знатно мање у односу на ученике експерименталне групе. Овакви резултати су усклађени са налазима других аутора (Bikić, Maričić & Pikula, 2016) који су у својим истраживањима доказали позитиван утицај методичког приступа заснованог на принципима проблемског учења (као једног од облика активног учења) на диференцираним садржајима у настави математике на средњем нивоу постигнућа. Евидентно је да ученицима који постижу средњи ниво постигнућа погодује овај методски поступак. То се може објаснити тиме што у овом моделу учења сви ученици морају да се укључе у рад и у току наставног процеса самостално мисаоно овладавају образовним садржајима. Осим тога, ученици су у директном контакту са садржајима, при чему им је, у циљу напредовања, омогућено да раде и задатке који одговарају вишем нивоу постигнућа. Ради се о задацима који према Виготском припадају „зони наредног развоја“ и који су нешто више испред актуелног нивоа постигнућа ученика.

1.1.3. Ефекти учења путем открића на диференцираним садржајима на напредном нивоу постигнућа

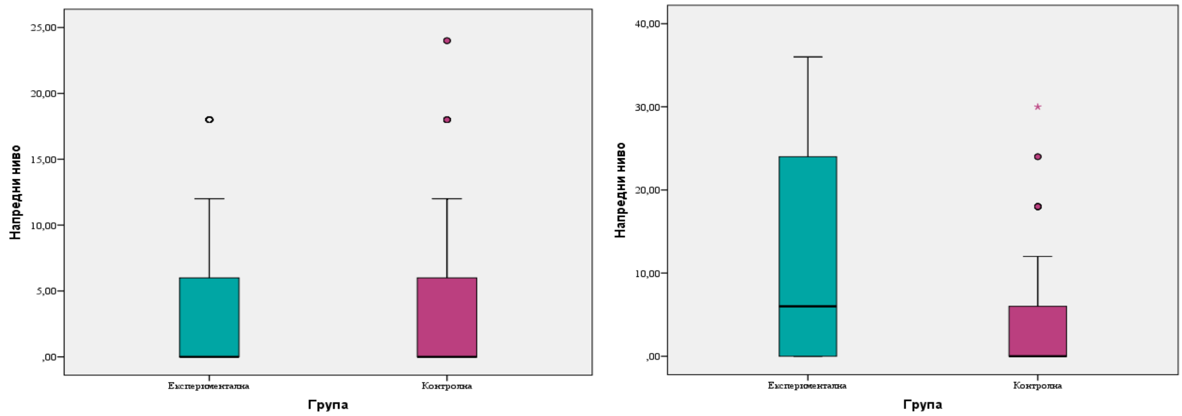
У циљу анализе ефеката учења путем открића на диференцираним садржајима на постигнућа ученика на напредном нивоу, у Табели 27 смо представили дескриптивне показатеље успешности ученика Е и К групе у решавању задатака са овог нивоа постигнућа на почетном и завршном мерењу. Просечно постигнуће групе ученика у којој је деловао експериментални фактор на напредном нивоу иницијалног теста износи M = 5,00; SD = 6,76, док је контролна група остварила незнатно већи просек просек од M = 5,07; SD = 6,77.

Табела 27. *Успешност ученика Е и К групе на напредном нивоу постигнућа на иницијалном и финалном мерењу – дескриптивни показатељи*

		N	M	SD	Std. Error	95% Интервал поверења	
						Доња граница	Горња граница
Иницијални тест	Експериментална	132	5,00	6,76	0,59	3,84	6,16
	Контролна	129	5,07	6,77	0,60	3,89	6,25
	Укупно	261	5,03	6,75	0,42	4,21	5,86
Финални тест	Експериментална	132	9,77	12,33	1,07	7,65	11,89
	Контролна	129	4,93	7,59	0,67	3,61	6,25
	Укупно	261	7,38	10,53	0,65	6,10	8,66

На напредном нивоу финалног мерења ученици контролне групе су остварили мањи број поена у односу на иницијално мерење (M = 4,93; SD = 7,59), док су ученици експерименталне групе, под утицајем експерименталног програма, постигли значајно бољи просечни резултат (M = 9,77; SD = 12,33).

Ако упоредимо резултате испитиваних група постигнуте на напредном нивоу, на иницијалном мерењу постоје незнатне разлике у погледу просечног броја остварених поена, док су те исте разлике на финалном тестирању израженије, при чему су ученици који су учили по експерименталном моделу, под његовим утицајем, остварили знатно веће просечно постигнуће.



Графикон 4. *Успех ученика експерименталне и контролне групе на напредном нивоу постигнућа иницијалног и финалног теста*

Како бисмо испитали утицај експерименталног програма на постигнућа ученика на напредном нивоу постигнућа, применили смо двофакторску анализу варијансе. Левенов тест једнакости варијанси (F = 17,819; p = 0,00) указује да није задовољена претпоставка о једнакости варијансе, па ћемо у анализама које следе узимати строжи ниво 0,01 као праг значајности.

Табела 28. *Levene's Test of Equality of Error Variances*

Dependent Variable: Финално мерење (напредни ниво)

	F	df1	df2	Sig.
Напредни ниво	17,819	1	259	0,00

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups

Табела 29. *Разлика између експерименталне и контролне групе на напредном нивоу постигнућа финалног теста (ANCOVA test)*

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: Финално мерење (напредни ниво)

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	P	Partial Eta Squared
Corrected Model	22628,694 [a]	2	11314,347	472,442	0,000	0,786
Intercept	67,290	1	67,290	2,810	0,095	0,011
Inicijal_napr	21098,800	1	21098,800	881,001	0,000	0,773
Grupa	1589,234	1	1589,234	66,360	0,000	0,205
Error	6178,754	258	23,949			
Total	43020,000	261				
Corrected Total	28807,448	260				

a. R Squared = 0,786 (Adjusted R Squared = 0,784)

Пошто се уклони утицај коваријата (резултат иницијалног теста на напредном нивоу), добијамо резултат који указује да на напредном нивоу финалног мерења постоје статистички значајне разлике у постигнућу између испитиваних група (F = 1589,234; p = 0,000). Вредност парцијалног ета квадрата (0,205) потврђује велики утицај експерименталног методичког приступа (Cohen, 1988; према: Pallant, 2011). То значи да се 20,5% варијансе на напредном нивоу финалног мерења може објаснити независном променљивом, тј. експерименталним моделом учења.

Пошто се искључи утицај независне променљиве (група – начин рада), утицај коваријата (иницијално постигнуће ученика са напредног нивоа) на резултате финалног теста такође је значајан (F = 21098,800; p = 0,000). Парцијални ета квадрат (0,773) указује на велики утицај варијансе у резултатима финалног теста (Табела 29).

Резултати указују на значајне ефекте учења путем открића на диференцираним садржајима алгебре на напредном нивоу постигнућа. С друге стране, код ученика контролне групе је дошло до пада постигнућа на напредном нивоу у односу на иницијално тестирање.

Аутори истраживања (Bikić, Maričić & Pikula, 2016), који су се бавили утицајем методичког приступа заснованог на принципима проблемског учења (као једног од модела активног учења) на диференцираним садржајима у настави математике, показали су да овај методички приступ нема значајан утицај на напредном нивоу постигнућа. То су објаснили тиме што су на напредном нивоу најталентованији ученици који већ сами постижу свој максимум и код њих нема пуно простора за напредак, па самим тим начин на који стичу знања није пресудан за њихов успех. Резултати до којих смо ми дошли нису у складу са оваквим налазима. Овај резултат се може образложити чињеницом да су знања стечена на овај начин заснована на самосталној активности ученика на садржајима и задацима који су прилагођени њиховим могућностима. Осим тога, у процесу учења путем открића ново знање се интегрише у постојеће знање ученика, па самим тим ученици стичу целовита и систематична знања. С друге стране, у контролној групи ученици су радили на класичан начин који подразумева једнак прилаз свим ученицима у одељењу и прилагођеност наставе „просечном“ ученику, при чему су занемарене индивидуалне могућности ученика. Као последица таквог приступа, ученицима који су на напредном нивоу онемогућено је активно учествовање у њима неприлагођеној настави.

****

Према постигнутим резултатима на почетном и завршном мерењу ученици су класификовани у један од три нивоа: основни, средњи и напредни. У основни ниво су сврстани ученици који су на иницијалном тесту освојили испод 40% укупног броја поена, тачније од 0 до 35 поена. У средњи ниво су сврстани ученици чији је успех на тесту био изнад 40% и испод 70 % поена, тачније од 36 до 64 поена. На напредном нивоу су били ученици који су на иницијалном тесту освојили изнад 70% укупног броја поена, тј. од 65 до 90 поена.

Најпре смо утврдили дистрибуцију нивоа постигнућа у Е и К групи ученика пре почетка експеримента, а онда смо утврђивали на ком се нивоу налазе постигнућа ученика обеју група након завршног мерења и како је експериментални програм утицао на промену заступљености појединачних нивоа.

Дистрибуција нивоа постигнућа Е и К групе ученика на иницијалном и финалном мерењу приказана је у Табели 30.

Табела 30. *Дистрибуција нивоа постигнућа у Е и К групи на иницијалном и финалном тесту (Hi kvadrat test)*

			Иницијални тест			Сви (Σ)	Финални тест			Сви (Σ)
			Основни ниво	Средњи ниво	Напредни ниво		Основни ниво	Средњи ниво	Напредни ниво	
Група	Е-група	f	46	57	29	132	29	57	46	132
		%	34,8%	43,2%	22,0%	100%	22,0%	43,2%	34,8%	100%
	К-група	f	42	55	32	129	48	54	26	128
		%	32,6%	42,6%	24,8%	100%	37,5%	42,2%	20,3%	100%
Сви (Σ)		f	88	112	61	261	77	111	72	260
		%	33,7%	42,9%	23,4%	100%	29,6%	42,7%	27,7%	100%

χ^2=0,331, df=2, p=0,848 — Likelihood Ratio=0,331, df=1, p=0,848

χ^2=10,26, df=2, p=***0,006*** — Likelihood Ratio=10,38, df=2, p=***0,006***

Подаци из Табеле 30 показују да је на иницијалном тесту знања 34,8% ученика експерименталне и 32,6% ученика контролне групе досегло основни ниво постигнућа. Средњим нивоом располаже 42,6% ученика контролне и 43,2% ученика експерименталне групе. На напредном нивоу постигнућа је 24,8% ученика контролне и 22% ученика експерименталне групе. Уочавамо да је заступљеност сваког од трију нивоа постигнућа на иницијалном мерењу приближно иста у обема групама.

Подаци из табела кростабулације показују да је, након завршног мерења, основни ниво досегло 37,5% ученика који су учили по устаљеним методама учења и 22% ученика који су учили по експерименталном моделу. 43,2% ученика експерименталне и 42,2% ученика контролне групе располажу средњим нивоом постигнућа. На напредном нивоу постигнућа је 34,8% ученика експерименталне и 20,3% ученика контролне групе.

Упоредном анализом заступљености појединачних нивоа знања на иницијалном и финалном тестирању уочавамо да резултати мерења, које је уследило након спровођења експерименталног програма, показују да су промене настале и код Е и код К групе ученика. Уочавамо да је након обраде алгебарских садржаја дошло до повећања броја ученика контролне групе који припадају основном нивоу, а до пада броја ученика на напредном нивоу, што значи да је код ученика ове групе дошло до стагнирања ка нижим нивоима знања. С друге стране, у групи у којој је деловао експериментални фактор након примене учења путем открића на диференцираним садржајима дошло је до напретка ученика ка вишим нивоима знања и до пада броја ученика који располажу знањем на основном нивоу. Уочавамо да су у експерименталној групи највеће промене настале у дистрибуцији средњег нивоа знања, иако то не изгледа тако на први поглед према фреквенцијама. Наиме, под дејством експерименталног модела дошло је до смањења броја ученика који располажу знањем на основном нивоу (прелазак са основног на средњи ниво), али и до повећања броја ученика који располажу знањем на напредном нивоу (прелазак са средњег на напредни ниво).

Како бисмо испитали статистичку значајност разлике између експерименталне и контролне групе у дистрибуцији нивоа постигнућа на иницијалном и финалном тестирању, израчунали смо вредност хи квадрат теста. Нађена вредност хи квадрата ($\chi^2 = 0{,}331$; $df = 2$; $p = 0{,}848$) показује да поменута разлика није статистички значајна на иницијалном тесту, што значи да се посматране групе ученика нису разликовале у погледу заступљености појединачних нивоа постигнућа пре увођења експерименталног фактора. Међутим, вредност хи квадрат теста ($\chi^2 = 10{,}26$; $df = 2$; $p = 0{,}006$) указује на постојање статистички значајне разлике у погледу заступљености појединачних нивоа постигнућа након завршног мерења. Тиме је још једном потврђено да експериментални програм доприноси постизању бољих исхода у почетној настави математике у поређењу са традиционалном наставом.

1.2. Утицај учења путем открића на диференцираним садржајима алгебре на постигнућа код ученика различитог пола

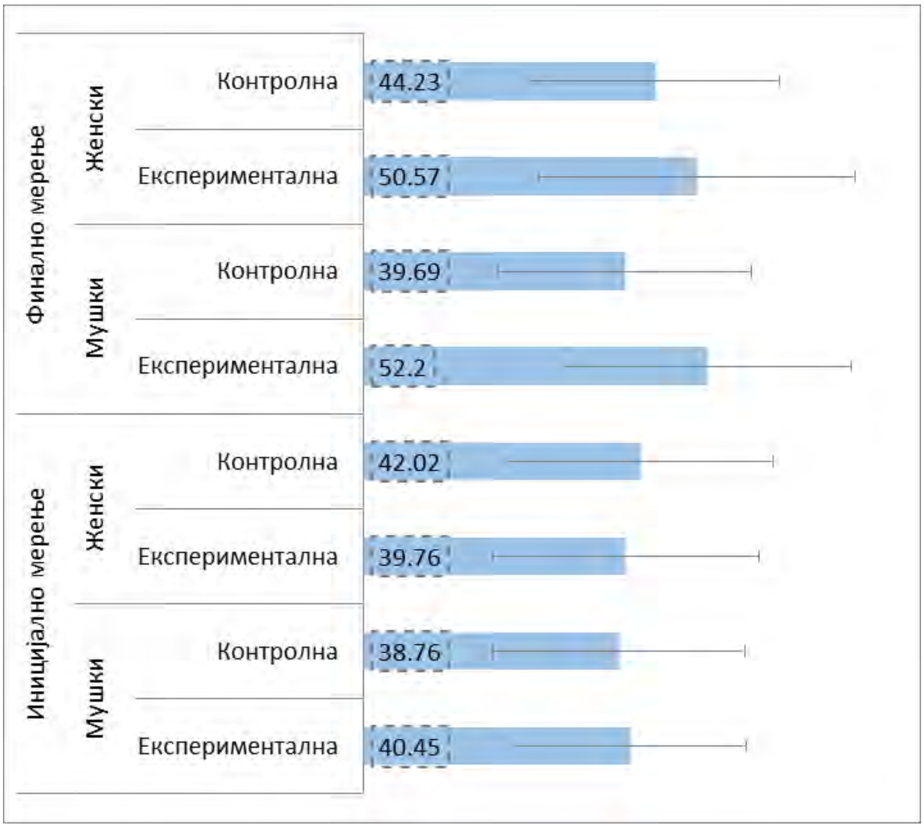
Желели смо да истражимо и постојање разлике између дечака и девојчица у постигнућима под утицајем учења путем открића на диференцираним садржајима алгебре. Просечна постигнућа ученика мушког и женског пола на иницијалном и финалном тесту представљена су графички (Графикон 5) и табеларно (Табела 31). С обзиром на то да су у истраживању ученици били сврстани у две групе, независне променљиве у овом случају чине: група (експериментална и контролна) и пол (мушки женски), док је зависна променљива напредовање у знању кроз два мерења.

Табела 31. *Успех ученика Е и К групе на иницијалном и финалном тесту у зависности од пола*

	Пол	Група	M	SD	N
Иницијално мерење	Мушки	Експериментална	40,45	17,60	69
		Контролна	38,76	19,07	67
		Укупно	39,62	18,29	136
	Женски	Експериментална	39,76	20,18	63
		Контролна	42,02	20,16	62
		Укупно	40,88	20,12	125
	Укупно	Експериментална	40,12	18,81	132
		Контролна	40,33	19,59	129
		Укупно	40,22	19,16	261
Финално мерење	Мушки	Експериментална	52,20	21,90	69
		Контролна	39,69	19,27	67
		Укупно	46,04	21,50	136
	Женски	Експериментална	50,57	24,04	63
		Контролна	44,23	18,93	62
		Укупно	47,42	21,80	125
	Укупно	Експериментална	51,42	22,87	132
		Контролна	41,87	19,16	129
		Укупно	46,70	21,62	261

Најбоље постигнуће на иницијалном тесту имају девојчице контролне групе (M = 42,02; SD = 20,16), следе дечаци експерименталне групе (M = 40,45; SD = 17,6), затим девојчице експерименталне групе (M = 39,76; SD = 20,18), па дечаци контролне групе (M = 38,76; SD = 19,07).

На финалном мерењу најбоље постигнуће имају дечаци експерименталне групе (M = 52,20; SD = 21,9), следе девојчице експерименталне групе (M = 50,57; SD = 24,04), па девојчице контролне групе (M = 44,23; SD = 18,93) и на крају дечаци контролне групе (M = 39,69; SD = 19,27). Уочавамо да је на завршном тестирању у експерименталној групи дошло до значајнијег напретка обају субузорака, који су формирани на основу пола (Графикон 5).



Графикон 5. *Просечна постигнућа дечака и девојчица експерименталне и контролне групе на иницијалном и финалном мерењу*

Подаци показују да је разлика у просечном броју поена између ученика различитог пола експерименталне групе минимална и на иницијалном тестирању износи 0,69, а на финалном мерењу је 1,63, и то у корист дечака на обама мерењима. Код контролне групе, разлика у аритметичкој средини остварених поена дечака и девојчица је нешто већа и на иницијалном мерењу износи 3,26 и 4,54 поена на финалном мерењу, и то у корист девојчица на обама тестовима.

Статистичку значајност горепоменутих разлика смо испитали израчунавањем t-односа.

Табела 32. *Levene's Test for Equality of Variances, Е-група*

			F	Sig.
Е-група	Иницијално мерење	Equal variances assumed	3,082	0,082
		Equal variances not assumed		
	Финално мерење	Equal variances assumed	1,391	0,240
		Equal variances not assumed		
К-група	Иницијално мерење	Equal variances assumed	0,599	0,440
		Equal variances not assumed		
	Финално мерење	Equal variances assumed	0,001	0,975
		Equal variances not assumed		

Претходним испитивањем су испитане претпоставке о једнакости варијансе, израчунавањем вредности Левеновог теста једнакости варијансе. Све вредности Sig. за Левенов тест веће су од граничне 0,05, те ћемо узети у обзир резултат t-теста за једнаке варијансе (*Equal variances assumed*).

Табела 33. *Разлике у просечним постигнућима дечака и девојчица Е и К групе на иницијалном и финалном тесту (t-test)*

			N	M	SD	t	df	p
Иницијално мерење	Е-група	Мушки	69	40,45	17,60	0,209	130	0,835
		Женски	63	39,76	20,18			
	К-група	Мушки	67	38,76	19,07	0,942	127	0,348
		Женски	62	42,02	20,16			
Финално мерење	Е-група	Мушки	69	52,20	21,90	0,408	130	0,684
		Женски	63	50,57	24,04			
	К-група	Мушки	67	39,69	19,27	1,348	127	0,180
		Женски	62	44,23	18,93			

Подаци у Табели 33 указују на то да између дечака и девојчица експерименталне групе не постоји статистички значајна разлика у постигнућу на иницијалном тесту ($t = 0,209$; $df = 130$; $p = 0,835$), али ни на финалном ($t = 0,408$; $df = 130$; $p = 0,684$). То значи да је учење путем открића на диференцираним садржајима било подједнако ефикасно код свих ученика, без обзира на пол. Такође, поменуте разлике нису статистички значајне ни између дечака и девојчица контролне групе: иницијални тест ($t = 0,942$; $df = 127$; $p = 0,348$) и финални тест ($t = 1,348$; $df = 127$; $p = 0,180$).

У циљу додатног испитивања полазне претпоставке, статистичким поступком комбиноване анализе варијансе утврђивали смо да ли постоје засебни утицаји пола и групе на резултате ученика на тесту знања из математике добијене у двама временским интервалима (пре експерименталног програма и одмах након програма) и да ли је интеракција између ових промењивих значајна.

Табела 34. *Утицај пола на постигнуће ученика на тестовима знања из математике*

		Value	F	Hypothesis df	Error df	p	Partial Eta²
Мерења	Pillai's Trace	0,677	267,920	2	256	0,000	0,677
	Wilks' Lambda	0,323	267,920	2	256	0,000	0,677
	Hotelling's Trace	2,093	267,920	2	256	0,000	0,677
	Roy's Largest Root	2,093	267,920	2	256	0,000	0,677
Мерења * пол	Pillai's Trace	0,012	1,562	2	256	0,212	0,012
	Wilks' Lambda	0,988	1,562	2	256	0,212	0,012
	Hotelling's Trace	0,012	1,562	2	256	0,212	0,012
	Roy's Largest Root	0,012	1,562	2	256	0,212	0,012
Мерења * група	Pillai's Trace	0,496	125,856	2	256	0,000	0,496
	Wilks' Lambda	0,504	125,856	2	256	0,000	0,496
	Hotelling's Trace	0,983	125,856	2	256	0,000	0,496
	Roy's Largest Root	0,983	125,856	2	256	0,000	0,496
Мерења * пол * група	Pillai's Trace	0,012	1,576	2	256	0,209	0,012
	Wilks' Lambda	0,988	1,576	2	256	0,209	0,012
	Hotelling's Trace	0,012	1,576	2	256	0,209	0,012
	Roy's Largest Root	0,012	1,576	2	256	0,209	0,012

Мултиваријантним тестовима је установљен засебан утицај експерименталног програма на успех у решавању теста. Подаци у Табели 34 указују да је вредност Вилксовог ламбда мултиваријационог теста Wilks' lambda = 0,323, вредност F-теста је F = 267,920, као и да је он статистички значајан (p = 0,000), док је вредност величине утицаја (мултиваријационо парцијално ета квадрат) $Eta^2 = 0,677$, што се може сматрати великим утицајем према смерницама које је дао Коен (Cohen, 1988; према: Pallant, 2011). Утицај експерименталног програма већ је доказан, а на овом месту само је још једном потврђен.

Такође, забележен је утицај групе којој ученик припада (експериментална/ контролна) на постигнуће ученика, тј. његово напредовање (Wilks' lambda = 0,504; F = 125,856; p = 0,000). Прецизније речено, резултати указују да су разлике између ученика експерименталне и контролне групе у погледу скорова на тестовима знања из математике статистички значајне. Парцијална ета показује да је утицај групе на постигнуће ученика велики ($Eta^2 = 0,496$), објашњавајући 49,6% варијансе зависне променљиве.

Вредност Вилксовог ламбда мултиваријационог теста Wilks' lambda = 0,988; F = 1,562; p = 0,212 указује да није било статистички значајне интеракције експерименталног програма и пола ученика. Дакле, пол није имао утицај на напредовање у постигнућу на тестовима знања из математике, већ искључиво учење путем открића на диференцираним садржајима. Напредовање ученика не зависи ни од интеракције пола (мушки/женски) и групе (експериментална/контролна) (Wilks' lambda = 0,988; F = 1,576; p = 0,209), тј. не постоје значајне разлике у избору стратегије учења с обзиром на пол. У прилог томе је и вредност Eta^2 који указује да је поменути утицај занемарљиво мали ($Eta^2 = 0,012$), што значи да се само 1,2% варијансе на завршном мерењу може објаснити интеракцијом методског поступка (као начина рада) и пола ученика.

Можемо да закључимо да засебан утицај експерименталног програма на постигнуће ученика постоји, али да утицај пола, како засебно, тако и у интеракцији са групом којој испитаник припада, не постоји. Тиме потврђујемо полазну хипотезу да не постоји статистички значајна разлика између ученика различитог пола у образовним постигнућима деловањем експерименталног фактора. Дакле, резултати потврђују да је учење путем открића на диференцираним садржајима резултирало значајним побољшањем успеха код ученика и једног и другог пола у експерименталној групи, али нису утврђене значајније разлике у постигнућима између ученика различитих полова. Овим се још једном потврђује да примењени методски поступак код свих ученика даје значајне резултате на плану остваривања предвиђених исхода у почетној настави математике, што потврђује сврсисходност увођења овог начина рада у праксу почетне наставе математике.

Овакав налаз је у складу са налазима неких истраживања који потврђују да нема значајних разлика у образовном постигнућу између различитих полова. „Дечаци и девојчице су подједнако и успешни (неуспешни) у школи, што искључиво зависи од других фактора“ (Simić Vukomanović, Đukić Dejanović, Đonović i Borovčanin, 2012: 50).

1.3. Општи успех ученика као фактор напредовања у образовним постигнућима под утицајем експерименталног фактора

Једна од интенција овог рада била је да се испита да ли ученици са бољим општим успехом значајније напредују у погледу постигнућа деловањем експерименталног фактора у односу на ученике са слабијим успехом. Осим према општем успеху, ученици су расподељени и на основу групе којој припадају: експериментална и контролна. Дакле, независне променљиве у овом случају су: група (експериментална и контролна) и опште постигнуће (довољан, добар, врлодобар, одличан). Зависна променљива је напредовање у знању кроз два мерења. Табеларно (Табела 35) и графички (Графикон 6) представили смо просечна постигнућа ученика обеју група различитог општег успеха на иницијалном и финалном мерењу.

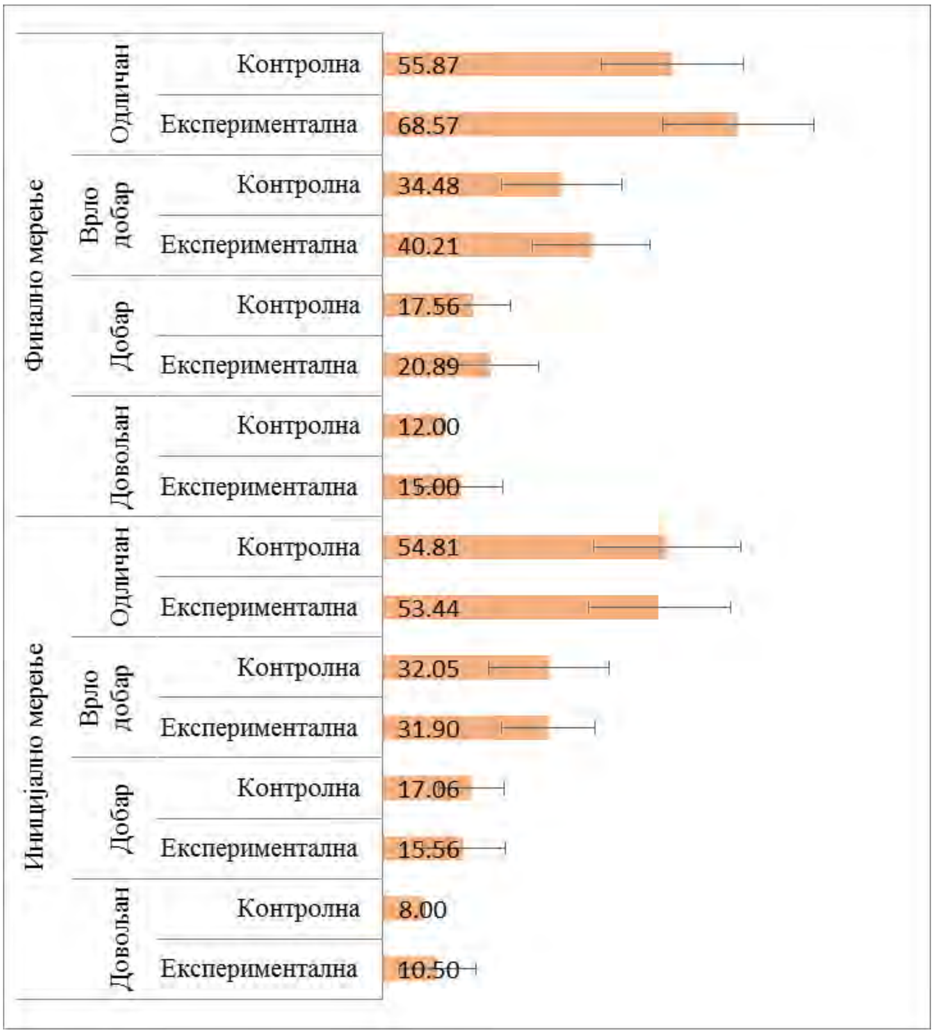
Табела 35. *Просечна постигнућа ученика различитог општег успеха на иницијалном и финалном мерењу*

			M	SD	N
Иницијално мерење	Довољан	Експериментална	10,50	7,51	4
		Контролна	8,00	0,00	4
		Сви (Σ)	9,25	5,09	8
	Добар	Експериментална	15,56	8,08	18
		Контролна	17,06	6,22	18
		Сви (Σ)	16,31	7,15	36
	Врлодобар	Експериментална	31,90	8,94	42
		Контролна	32,05	11,66	44
		Сви (Σ)	31,98	10,36	86
	Одличан	Експериментална	53,44	13,66	68
		Контролна	54,81	14,18	63
		Сви (Σ)	54,10	13,88	131
	Сви (Σ)	Експериментална	40,12	18,81	132
		Контролна	40,33	19,59	129
		Сви (Σ)	40,22	19,16	261
Финално мерење	Довољан	Експериментална	15,00	8,08	4
		Контролна	12,00	0,00	4
		Сви (Σ)	13,50	5,53	8
	Добар	Експериментална	20,89	9,20	18
		Контролна	17,56	7,05	18
		Сви (Σ)	19,22	8,25	36
	Врлодобар	Експериментална	40,21	11,33	42
		Контролна	34,48	11,53	44
		Сви (Σ)	37,28	11,73	86
	Одличан	Експериментална	68,57	14,59	68
		Контролна	55,87	13,60	63
		Сви (Σ)	62,47	15,44	131
	Сви (Σ)	Експериментална	51,42	22,87	132
		Контролна	41,87	19,16	129
		Сви (Σ)	46,70	21,62	261

Уочавамо да најбоље постигнуће на иницијалном тесту имају одлични ученици из контролне групе (M = 54,81; SD = 14,18) и одлични ученици из експерименталне групе (M = 53,44; SD = 13,66), затим следе врлодобри ученици из контролне групе (M = 32,05; SD = 11, 66) и врлодобри ученици из експерименталне групе (M = 31,90; SD = 8, 94).

Ученици са добрим општим успехом у контролној групи постижу (M = 17,06; SD = 6,22), док су ученици са истим општим успехом у експерименталној групи остварили (M = 15,56; SD = 8,08). Најлошије постигнуће су остварили ученици контролне групе довољног општег успеха (M = 8,00; SD = 0,0), док је ова подгрупа ученика у експерименталној групи остварили просек од (M = 10,5; SD = 7,51).

Примећујемо да су на иницијалном мерењу сви субузорци ученика контролне групе, који су формирани на основу општег успеха на крају првог полугођа, осим ученика довољног општег успеха, постигли нешто боље просечно постигнуће од ученика са истим општим успехом из експерименталне групе.



Графикон 6. *Просечна постигнућа ученика различитог општег успеха на иницијалном и финалном мерењу*

На финалном тестирању уочавамо напредак свих подгрупа ученика формираних на основу општег успеха из експерименталне групе. Најбоље постигнуће имају ученици експерименталне групе одличног општег успеха (M = 68,57; SD = 14,59), док су ученици са истим успехом у контролној групи остварили (M = 55,87; SD = 13,60). Напредак је приметан и код ученика са врлодобрим општим успехом у експерименталној групи (M = 40,21; SD = 11,33) у односу на ученике са истим општим успехом из контролне групе (M = 41,05; SD = 6,82). Ученици експерименталне групе са добрим општим успехом имају просечно постигнуће од (M = 20,89; SD = 9,20), док је постигнуће исте подгрупе ученика у контролној групи мање (M = 17,56; SD = 7,05). Најлошије постигнуће на финалном тесту постигли су ученици довољног успеха у контролној групи (M = 12,00; SD = 0,00). За разлику од њих, иста подгрупа из експерименталне групе остварила је боље просечно постигнуће (M = 15,00; SD = 8,08).

Дакле, ученици свих подгрупа из експерименталне групе напредовали су више у поређењу са истим подгрупама из контролне групе. Такође, са Графикона 6 можемо уочити да је до већег напретка дошло код ученика са бољим општим успехом, док су ученици лошијег општег упеха мање напредовали.

Како смо желели да утврдимо да ли ученици са бољим општим успехом значајније напредују у погледу постигнућа под утицајем експерименталног фактора, применом *ANOVA testa* испитивали смо да ли постоје статистички значајне разлике у просечним постигнућима између подгрупа Е-групе формираних у односу на општи успех кроз два мерења.

Табела 36. *Test of Homogeneity of Variances*

Levene Statistic		df1	df2	p
Иницијално мерење	14,978	3	128	0,000
Финално мерење	6,482	3	128	0,000

Како код обају мерења није задовољена претпоставка о једнакости варијансе, на шта указују вредности Левеновог теста једнакости варијансе (F = 14,978; p = 0,000 за иницијално мерење и F = 6, 482; p = 0,000 за финално мерење), у анализама које следе узећемо строжи ниво 0,01 као праг значајности.

Табела 37. *Разлике у просечним постигнућима ученика различитог оптшег успеха експерименталне групе на иницијалном и финалном тесту (ANOVA test)*

		N	M	SD	F	p
Иницијално мерење	Довољан	4	10,50	7,51	73,184	0,000
	Добар	18	15,56	8,08		
	Врлодобар	42	31,90	8,94		
	Одличан	68	53,44	13,66		
Финално мерење	Довољан	4	15,00	8,08	95,512	0,000
	Добар	18	20,89	9,20		
	Врлодобар	42	40,21	11,33		
	Одличан	68	68,57	14,59		

Варијанса на иницијалном мерењу је статистички значајна (F = 73,184; p = 0,000). Статистички значајна и још већа разлика између датих подгрупа утврђена је и на финалном тесту (F = 95,512; p = 0,000). Овакви резултати показују да се ученици експерименталне групе различитог општег успеха статистички значајно разликују према постигнућу на двама мерењима.

Табела 38. *Разлике у просечним постигнућима ученика различитог општег успеха експерименталне групе на тестовима – накнадна поређења (Bonferroni Post Hoc Test)*

			Средња разлика (I–J)	Стандардна грешка	p	95% Интервал поверења	
						Доња граница	Горња граница
Иницијално мерење	Довољан	Добар	-5,056	6,383	1,000	-22,160	12,049
		Врлодобар	-21,40476*	6,042	0,003	-37,597	-5,213
		Одличан	-42,94118*	5,941	0,000	-58,862	-27,021
	Добар	Довољан	5,056	6,383	1,000	-12,049	22,160
		Врлодобар	-16,34921*	3,253	0,000	-25,067	-7,632
		Одличан	-37,88562*	3,061	0,000	-46,088	-29,683
	Врлодобар	Довољан	21,40476*	6,042	0,003	5,213	37,597
		Добар	16,34921*	3,253	0,000	7,632	25,067
		Одличан	-21,53641*	2,266	0,000	-27,609	-15,464
	Одличан	Довољан	42,94118*	5,941	0,000	27,021	58,862
		Добар	37,88562*	3,061	0,000	29,683	46,088
		Врлодобар	21,53641*	2,266	0,000	15,464	27,609
Финално мерење	Довољан	Добар	-5,889	7,107	1,000	-24,935	13,157
		Врлодобар	-25,21429*	6,728	0,002	-43,244	-7,185
		Одличан	-53,57353*	6,615	0,000	-71,301	-35,846
	Добар	Довољан	5,889	7,107	1,000	-13,157	24,935
		Врлодобар	-19,32540*	3,622	0,000	-29,032	-9,619
		Одличан	-47,68464*	3,408	0,000	-56,818	-38,551
	Врло-добар	Довољан	25,21429*	6,728	0,002	7,185	43,244
		Добар	19,32540*	3,622	0,000	9,619	29,032
		Одличан	-28,35924*	2,523	0,000	-35,121	-21,597
	Одличан	Довољан	53,57353*	6,615	0,000	35,846	71,301
		Добар	47,68464*	3,408	0,000	38,551	56,818
		Врлодобар	28,35924*	2,523	0,000	21,597	35,121

Да бисмо утврдили између којих подгрупа постоји статистички значајна разлика, урадили смо накнадна вишеструка поређења. Подаци у Табели 38 показују да само између довољних и добрих ученика експерименталне групе не постоји статистички значајна разлика у постигнућу на двама тестовима (исто то показују границе 95% интервала поверења за аритметичку средину разлика које обухватају 0), односно они постижу подједнако добре (лоше) резултате на тестовима. Све остале подгрупе међу собом се разликују у постигнућу, и то на обама мерењима. Такође, уочавамо да је најмања разлика између ученика суседних подгрупа (одлични–врлодобри, врлодобри–добри), а највећа разлика је забележена између најудаљенијих подгрупа, тачније између подгрупе одличних и подгрупе довољних ученика. То потврђује нашу претпоставку да ученици са бољим општим успехом значајније напредују у погледу постигнућа под утицајем експерименталног фактора. Наведени резултати се подударају са налазима других аутора који су експериментално проучавали учење путем открића (Малешевић, 2011).

Како бисмо додатно потврдили претпоставку о утицају општег успеха ученика на напредовање у постигнућима, приступили смо статистичком поступку комбиноване анализе варијансе. Овим поступком је испитан утицај општег успеха и експерименталног програма на резултате ученика на тесту знања из математике добијене у двама временским интервалима (пре експерименталног програма, одмах након програма).

Табела 39. *Утицај општег успеха на постигнуће ученика на тестовима знања из математике*

		Value	F	Hypothesis df	Error df	p	Partial Eta²
Мерења	Pillai's Trace	0,420	91,204	2,000	252,000	0,000	0,420
	Wilks' Lambda	0,580	91,204	2,000	252,000	0,000	0,420
	Hotelling's Trace	0,724	91,204	2,000	252,000	0,000	0,420
	Roy's Largest Root	0,724	91,204	2,000	252,000	0,000	0,420
Мерења* успех	Pillai's Trace	0,169	7,774	6,000	506,000	0,000	0,084
	Wilks' Lambda	0,832	8,118	6,000	504,000	0,000	0,088
	Hotelling's Trace	0,202	8,461	6,000	502,000	0,000	0,092
	Roy's Largest Root	0,200	16,895	3,000	253,000	0,000	0,167
Мерења* група	Pillai's Trace	0,179	27,496	2,000	252,000	0,000	0,179
	Wilks' Lambda	0,821	27,496	2,000	252,000	0,000	0,179
	Hotelling's Trace	0,218	27,496	2,000	252,000	0,000	0,179
	Roy's Largest Root	0,218	27,496	2,000	252,000	0,000	0,179
Мерења* успех* група	Pillai's Trace	0,218	10,326	6,000	506,000	0,000	0,109
	Wilks' Lambda	0,783	10,953	6,000	504,000	0,000	0,115
	Hotelling's Trace	0,277	11,580	6,000	502,000	0,000	0,122
	Roy's Largest Root	0,273	23,041	3,000	253,000	0,000	0,215

Поред засебног утицаја програма (Wilks' lambda = 0,580; F = 91,204; p = 0,000), који је већ претходно доказан, утврђен је и утицај групе којој ученик припада (експериментална/контролна) на постигнуће ученика, тј. његово напредовање (Wilks' lambda = 0,821; F = 27,496; p = 0,000).

Вредност Вилксовог ламбда мултиваријационог теста Wilks' lambda = 0,832; F= 8,118; p = 0,000 указује на постојање статистички значајне интеракције експерименталног програма и општег успеха ученика. Парцијална ета (Eta^2 = 0,088) показује да је ефекат општег успеха на варијације у укупном знању умерен (Cohen,1988; према: Pallant, 2011) објашњавајући 8,8% варијансе зависне промењљиве. То значи да код ученика који постижу бољи општи успех долази до већег напредовања у укупном знању.

Напредовање зависи и од интеракције општег успеха (довољан/добар/врлодобар/одличан) и групе (експериментална/контролна), (Wilks' lambda = 0,783; F = 10,953; p = 000). Eta^2 показује да је утицај ове интеракције велики (Eta^2 = 0,115), тако да се 11,5% варијабилитета у укупном скору може објаснити интеракцијом начина учења и општег успеха.

Закључујемо да је утицај општег успеха на успешност ученика умерен, али постоји и утицај интеракције општег успеха са групом којој испитаник припада, и тај утицај је велики. Тиме потврђујемо полазну претпоставку да до значајнијег напредовања под утицајем експерименталног фактора долази код ученика са бољим општим успехом.

Добијени резултати указују да учење путем открића на диференцираним садржајима остварује позитиван ефекат код свих ученика, независно од општег школског успеха који постижу. Међутим, додатним анализама смо утврдили да су ученици са бољим општим успехом ипак значајније напредовали у погледу постигнућа под утицајем овог облика учења. Овакав резултат можемо објаснити тиме што су ученици бољег општег успеха, иначе, са високим интелектуалним способностима и имају развијеније способности за самостално учење и мисаоно овладавање образовним садржајима од ученика слабијег општег успеха. Ови ученици су, поред тога, доста самосталнији у раду, више вежбају, инвентивнији су и потребна им је мања подршка у учењу. Стога им учење путем открића највише и погодује. Поред тога, овакав резултат је последица и чињенице да су ученици са најбољим општим успехом радили на садржајима који су прилагођени њима и нису губили време на садржаје који су прилагођени најслабијим ученицима. Сматрамо да су ученици слабијег општег успеха навикнути на фронталну наставу и механичко усвајање наставног садржаја, па су се у овој стратегији учења, која подразумева активну партиципацију сваког ученика, теже сналазили.

Суштина овог вида учења се заснива на изреци Д. Поље која гласи: „Најбољи начин да се нешто научи јесте – да се самостално открије." Овакава облик организације рада увек ставља ученика у фокус процеса учења и ствара једнаке могућности да сви ученици, независно од успеха који остварују, учествују у том процесу. Тиме се омогућава побољшање математичког знања свих ученика, али и остваривање предвиђених исхода у почетној настави математике, што и те како доприноси унапређивању праксе математичког образовања.

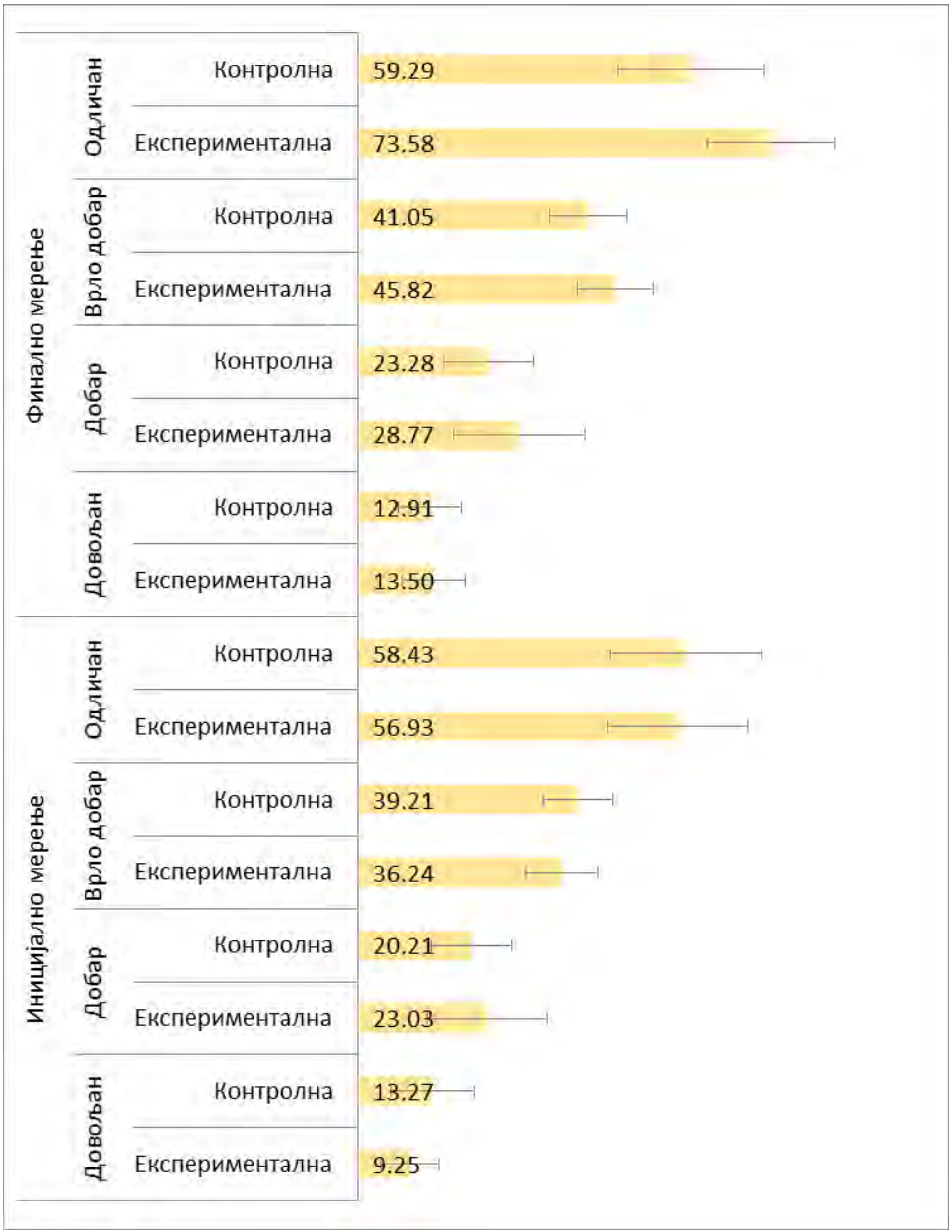
1. 4. Оцена из математике и напредовање у образовним постигнућима под утицајем експерименталног фактора

Једна од намера истраживања је била да испитамо да ли је оцена из математике фактор напредовања у постигнућима под утицајем учења путем открића на диференцираним садржајима алгебре. Тачније, хтели смо да утврдимо да ли ученици са бољом оценом из математике значајније напредују у погледу постигнућа деловањем експерименталног фактора у поређењу са ученицима са нижом оценом из математике. Осим према оцени из математике, ученици су расподељени и на основу групе којој припадају: експериментална и контролна. Дакле, независне променљиве у овом случају су: група (експериментална и контролна) и оцена из математике (довољан (2), добар (3) врлодобар (4), одличан (5)). Зависна променљива је напредовање у постигнућу кроз два мерења. Табеларно (Табела 40) и графички (Графикон 7) представили смо просечна постигнућа ученика Е и К групе различитих оцена из математике посматрана кроз два мерења.

Табела 40. *Просечна постигнућа ученика различите оцене из математике на иницијалном и финалном мерењу*

			M	SD	N
Иницијално мерење	Довољан (2)	Експериментална	9,25	5,09	8
		Контролна	13,27	7,50	11
		Сви (Σ)	11,58	6,74	19
	Добар (3)	Експериментална	23,03	10,69	31
		Контролна	20,21	7,26	29
		Сви (Σ)	21,67	9,23	60
	Врлодобар (4)	Експериментална	36,24	6,39	38
		Контролна	39,21	6,12	38
		Сви (Σ)	37,72	6,39	76
	Одличан (5)	Експериментална	56,93	12,50	55
		Контролна	58,43	13,53	51
		Сви (Σ)	57,65	12,96	106
	Сви (Σ)	Експериментална	40,12	18,81	132
		Контролна	40,33	19,59	129
		Сви (Σ)	40,22	19,16	261
Финално мерење	Довољан (2)	Експериментална	13,50	5,53	8
		Контролна	12,91	5,59	11
		Сви (Σ)	13,16	5,42	19
	Добар (3)	Експериментална	28,77	11,78	31
		Контролна	23,28	8,06	29
		Сви (Σ)	26,12	10,44	60
	Врлодобар (4)	Експериментална	45,82	6,76	38
		Контролна	41,05	6,82	38
		Сви (Σ)	43,43	7,16	76
	Одличан (5)	Експериментална	73,58	11,26	55
		Контролна	59,29	12,96	51
		Сви (Σ)	66,71	14,02	106
	Сви (Σ)	Експериментална	51,42	22,87	132
		Контролна	41,87	19,16	129
		Сви (Σ)	46,70	21,62	261

Најбоље постигнуће на иницијалном тесту имају ученици контролне групе са одличном (5) оценом из математике (M = 58,4; SD = 13,53) и ученици експерименталне групе са одличном (5) оценом из математике (M = 56,93; SD = 12,50), затим следе ученици са оценом врлодобар (4) у контролној групи (M = 39,21; SD = 6,12) и у експерименталној групи (M = 36,24; SD = 6,39). Ученици са оценом добар (3) из експерименталне групе постижу (M = 23,03; SD = 10,69), док у контролној ова подгрупа постиже (M = 20,2; SD = 7,26). Најлошије постигнуће су остварили ученици експерименталне групе са оценом довољан (2) (M = 9,25; SD = 5,09), док су ученици са истом оценом у контролној групи остварили просек од (M = 9,25; SD = 5,09). Уочавамо да су на иницијалном тесту сви субузорци ученика контролне групе, који су формирани на основу оцене из математике, осим ученика са оценом добар (3), постигли нешто боље резултате од ученика са истим оценама у експерименталној групи.



Графикон 7. *Просечна постигнућа ученика различитог успеха из математике на иницијалном и финалном мерењу*

Ако посматрамо финално мерење, у глобалу уочавамо напредак свих подгрупа које су формиране према оцени коју ученици постижу из наставног предмета математика у експерименталној групи. Најбоље постигнуће имају ученици експерименталне групе са одличном (5) оценом (M = 73,58; SD = 11,26), док су ученици са истом оценом из контролне групе остварили (M = 59,29; SD = 12,96). Напредак је приметан и код ученика са оценом врлодобар (4) у експерименталној групи (M = 45,82; SD = 6,76) у односу на ученике са истом оценом из контролне групе (M = 41,05; SD = 6,82). Просечно постигнуће ученика екпериманталне групе са оценом добар (3) (M = 28,77; SD = 11,78) веће је него код ученика у контролној групи (M = 23,28; SD = 8,06). Ученици контролне групе са оценом довољан (2) имају најлошије постигнуће на финалном тесту (M = 12,91; SD = 5,59), док је постигнуће ове подгрупе ученика у експерименталној групи боље (M = 13,50; SD = 5,53). Дакле, ученици свих подгрупа из експерименталне групе напредовали су више у поређењу са истим подгрупама из контролне групе.

Такође, са Графикона 7 можемо уочити да је до већег напретка дошло код ученика са вишим оценама из математике, док су ученици са нижим оценама мање напредовали.

Како смо желели да проверимо да ли ученици са бољом оценом из математике значајније напредују у погледу постигнућа под утицајем експерименталног фактора, испитивали смо да ли постоје статистички значајне разлике у просечним постигнућима између подгрупа Е-групе формираних у односу на оцену из математике, на двама мерењима, коришћењем *ANOVA testa.*

Табела 41. *Test of Homogeneity of Variances*

Levene Statistic		df1	df2	p
Иницијално мерење	16,174	3	128	0,000
Финално мерење	6,664	3	128	0,000

Како претпоставка о једнакости варијансе није задовољена ни на иницијалном ни на финалном тестирању (вредност Левеновог теста једнакости варијансе износи F = 16,174; p = 0,000 за иницијално мерење и F = 6, 664; p = 0,000 за финално мерење), у анализама које следе узећемо строжи ниво 0,01 као праг значајности.

Табела 42. *Разлике у просечним постигнућима ученика Е-групе различитог успеха из математике на иницијалном и финалном тесту (ANOVA test)*

		N	M	SD	F	p
Иницијално мерење	Довољан (2)	8	9,25	5,09	103,211	0,000
	Добар (3)	31	23,03	10,69		
	Врлодобар (4)	38	36,24	6,39		
	Одличан (5)	55	56,93	12,50		
Финално мерење	Довољан (2)	8	13,50	5,53	183,659	0,000
	Добар (3)	31	28,77	11,78		
	Врлодобар (4)	38	45,82	6,76		
	Одличан (5)	55	73,58	11,26		

Ученици различитог успеха из математике статистички се значајно разликују према постигнућу на иницијалном мерењу (F = 103,211; p = 0,000). Варијанса је статистички значајна и на финалном мерењу (F = 183,659; p = 0,000). Овакви резултати показују да се ученици експерименталне групе различитог успеха из математике статистички значајно разликују према постигнућу на обама тестовима, при чему је на финалном тесту уочена већа разлика.

Табела 43. *Разлике у просечним постигнућима ученика експерименталне групе различитог успеха из математике на тестовима – накнадна поређења (Bonferroni Post Hoc Test)*

			Средња разлика (I–J)	Стандардна грешка	p	95% Интервал поверења	
						Доња граница	Горња граница
Иницијално мерење	Довољан (2)	Добар (3)	-13,78226*	4,081	0,006	-24,718	-2,847
		Врлодобар (4)	-26,98684*	4,003	0,000	-37,714	-16,260
		Одличан (5)	-47,67727*	3,894	0,000	-58,112	-37,243
	Добар (3)	Довољан (2)	13,78226*	4,081	0,006	2,847	24,718
		Врлодобар (4)	-13,20458*	2,490	0,000	-19,879	-6,531
		Одличан (5)	-33,89501*	2,311	0,000	-40,088	-27,702
	Врлодобар (4)	Довољан (2)	26,98684*	4,003	0,000	16,260	37,714
		Добар (3)	13,20458*	2,490	0,000	6,531	19,879
		Одличан (5)	-20,69043*	2,171	0,000	-26,507	-14,873
	Одличан (5)	Довољан (2)	47,67727*	3,894	0,000	37,243	58,112
		Добар (3)	33,89501*	2,311	0,000	27,702	40,088
		Врлодобар (4)	20,69043*	2,171	0,000	14,873	26,507
Финално мерење	Довољан (2)	Добар (3)	-15,27419*	3,984	0,001	-25,951	-4,598
		Врлодобар (4)	-32,31579*	3,908	0,000	-42,788	-21,843
		Одличан (5)	-60,08182*	3,801	0,000	-70,269	-49,894
	Добар (3)	Довољан (2)	15,27419*	3,984	0,001	4,598	25,951
		Врлодобар (4)	-17,04160*	2,431	0,000	-23,557	-10,526
		Одличан (5)	-44,80762*	2,256	0,000	-50,854	-38,761
	Врлодобар (4)	Довољан (2)	32,31579*	3,908	0,000	21,843	42,788
		Добар (3)	17,04160*	2,431	0,000	10,526	23,557
		Одличан (5)	-27,76603*	2,119	0,000	-33,445	-22,087
	Одличан (5)	Довољан (2)	60,08182*	3,801	0,000	49,894	70,269
		Добар (3)	44,80762*	2,256	0,000	38,761	50,854
		Врлодобар (4)	27,76603*	2,119	0,000	22,087	33,445

Накнадним вишеструким поређењем испитали смо између којих подгрупа постоје разлике према постигнућу на тестовима знања. Из Табеле 43 уочавамо значајну разлику између свих подгрупа (довољан (2), добар (3), врлодобар (4) и одличан (5)) на обама тестовима знања (иницијални и финални). Разлика је најмања између суседних подгрупа, а затим је све већа. Највећа разлика је забележена између ученика са одличном (5) оценом из математике и ученика са довољном (2) оценом.

Поступком комбиноване анализе варијансе испитан је утицај оцене из математике и експерименталног програма на резултате ученика на тестовима знања из математике.

Табела 44. *Утицај оцене из математике на постигнуће ученика на тестовима знања из математике (ANCOVA test)*

		Value	F	Hypothesis df	Error df	p	Partial Eta²
Мерења	Pillai's Trace	0,610	197,448	2,000	252,000	0,000	0,610
	Wilks' Lambda	0,390	197,448	2,000	252,000	0,000	0,610
	Hotelling's Trace	1,567	197,448	2,000	252,000	0,000	0,610
	Roy's Largest Root	1,567	197,448	2,000	252,000	0,000	0,610
Мерења* оцена из математике	Pillai's Trace	0,244	11,714	6,000	506,000	0,000	0,122
	Wilks' Lambda	0,757	12,515	6,000	504,000	0,000	0,130
	Hotelling's Trace	0,318	13,318	6,000	502,000	0,000	0,137
	Roy's Largest Root	0,312	26,353	3,000	253,000	0,000	0,238
Мерења* група	Pillai's Trace	0,410	87,636	2,000	252,000	0,000	0,410
	Wilks' Lambda	0,590	87,636	2,000	252,000	0,000	0,410
	Hotelling's Trace	0,696	87,636	2,000	252,000	0,000	0,410
	Roy's Largest Root	0,696	87,636	2,000	252,000	0,000	0,410
Мерења* оцена из математике* група	Pillai's Trace	0,333	16,819	6,000	506,000	0,000	0,166
	Wilks' Lambda	0,669	18,675	6,000	504,000	0,000	0,182
	Hotelling's Trace	0,491	20,552	6,000	502,000	0,000	0,197
	Roy's Largest Root	0,486	40,947	3,000	253,000	0,000	0,327

Поред засебног утицаја програма, који је претходно на више места доказан (Wilks' lambda = 0,390; F = 197,448; p = 0,000), забележен је и утицај групне припадности (експериментална/контролна) на постигнуће ученика, тј. његово напредовање (Wilks' lambda = 0,590; F = 87,636; p = 0,000).

Резултати у Табели 44 указују на постојање статистички значајне интеракције експерименталног програма и оцене из математике (Wilks' lambda = 0,757; F = 12,515; p = 0,000). Вредности парцијалног ета квадрата (Eta² = 0,130) указују да је утицај успеха из математике на промене у укупном знању умерен, тј. да се 13% варијабилитета у укупном скору може предвидети на основу оцене из математике (Cohen,1988; према: Pallant, 2011). Дакле, ученици са бољом оценом из математике напредовали су више у укупном знању.

Напредовање зависи и од интеракције успеха из математике (довољан/добар/врлодобар/одличан) и групе (експериментална/контролна), (Wilks' lambda = 0,669; F = 18,675; p = 000). Eta² показује да је утицај ове интеракције велики (Eta² = 0,182) и објашњава 18,2% варијансе зависне промењиве.

Закључак је да утицај успеха из математике на успешност ученика постоји и да је умерен, али да постоји и велики утицај интеракције успеха из математике са групом којој испитаник припада. Тиме потврђујемо полазну претпоставку да ученици са бољим општим успехом значајније напредују у погледу постигнућа под утицајем експерименталног фактора.

Представљени резултати указују да су у експерименталној групи сви субузорци ученика, формирани на основу оцене из математике, постигли боље резултате у односу на исте субузорке из контролне групе. То нас наводи на закључак да учење путем открића на диференцираним садржајима повећава постигнуће и остварује позитиван ефекат код свих ученика, независно од постигнуте оцене из математике. Ипак, код ученика који имају бољу оцену из математике израженији је напредак под утицајем експерименталног фактора, тј. учење путем открића на диференцираним садржајима више одговара успешнијим ученицима. То се – према нашем мишљењу – може објаснити тиме што су ови ученици успешнији и боље се сналазе у самосталном, активном извођењу закључака, правила итд. за разлику од мање успешних ученика којима је у том процесу често потребна помоћ учитеља.

Ученици су на експерименталним часовима математике самостално радили на садржајима и задацима који одговарају нивоу њихових знања, способности и математичких компетенција, што је омогућило свим ученицима да постигну бољи успех и ефикасније савладавају предвиђене наставне садржаје. Како је сваки наставни листић за самостално учење и вежбање у оквиру експерименталног програма, поред садржаја предвиђених за конкретни ниво, садржао и задатке са наредног, вишег нивоа, то је свим ученицима омогућило да раде на сопственом развоју у настави математике и тиме унапређују математичка знања. Осим тога, овакав начин рада ствара подстицајну атмосферу за ученике и представља извор појединачног, индивидуалног успеха, што је врло значајан мотив за даље учење.

Верујемо да ће боље индивидуално постигнуће сваког појединачног ученика, увођењем ове стратегије учења, резултирати генералним побољшањем успеха у почетној настави математике. Тиме је још једном потврђено да је овај облик учења веома значајан за почетну наставу математике и да би требало све чешће да буде присутан у наставној пракси, односно требало би да буде чешћи избор учитељима при конципирању и организацији часова почетне наставе математике.

2. УТИЦАЈ УЧЕЊА ПУТЕМ ОТКРИЋА НА ДИФЕРЕНЦИРАНИМ САДРЖАЈИМА АЛГЕБРЕ НА ТРАЈНОСТ ЗНАЊА УЧЕНИКА

Једно од битних својстава знања које одређује његов квалитет јесте његова трајност. „Трајност ученичког знања зависи од квалитета организације и извођења наставног рада, и то како процеса усвајања новог, тако и процеса утврђивања и понављања старог знања“ (Педагошки речник, 1967: 434). Тачније, „трајност знања ученика зависи од тога како је осмишљен и организован наставни час, од активности ученика на часу, као и од њихове заинтересованости за садржаје који се уче“ (Trnavac i Đorđević, 1998: 57). У вези са тим, други задатак нашег истраживања се односио на испитивање ефеката примене учења путем открића на диференцираним садржајима алгебре на трајност знања ученика у почетној настави математике. С обзиром на то да учење путем открића подразумева максимално ангажовање и свесну активност ученика у сазнајном процесу, што резултира бољим разумевањем усвојених садржаја, претпоставили смо да су знања стечена на овај начин самим тим и трајнија.

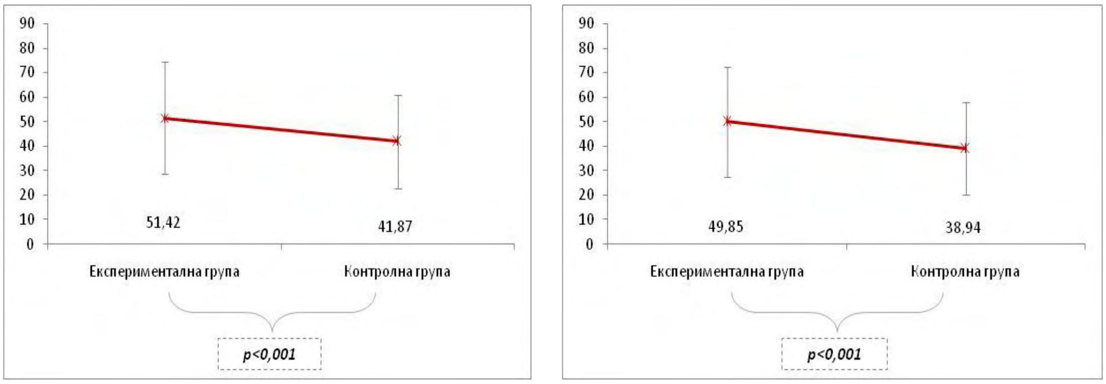
Три месеца након завршетка експерименталног програма извршено је ретестирање ученика обеју група у циљу утврђивања ефеката експерименталног модела на трајност знања ученика. Поменуте ефекте смо посматрали кроз укупан скор ученика на поновљеном тесту знања и кроз остварене резултате на појединачним суптестовима, путем којих су задаци структурисани на три нивоа сложености тако да сваки ниво сложености одговара одређеном нивоу образовних постигнућа ученика: основни, средњи и напредни.

Табела 45. *Успешност ученика Е и К групе на финалном тесту и ретесту – дескриптивни показатељи*

		N	M	SD	Std. Error	95% Интервал поверења Доња граница	95% Интервал поверења Горња граница
Финално мерење	Е-група	132	51,42	22,87	1,99	47,49	55,36
	К-група	129	41,87	19,16	1,69	38,53	45,21
	Укупно	261	46,70	21,62	1,34	44,07	49,34
Поновљено мерење	Е-група	132	49,848	22,597	1,967	45,958	53,739
	К-група	129	38,938	18,899	1,664	35,646	42,230
	Укупно	261	44,456	21,517	1,332	41,833	47,079

У Табели 45 је дат приказ композитног скора на финалном тесту и ретесту за експерименталну и контролну групу, те за све испитанике заједно. Уочавамо да су ученици у експерименталној групи на финалном мерењу остварили знатно боље просечно постигнуће ($M = 51{,}42$; $SD = 22{,}87$) у односу на ученике контролне групе ($M = 41{,}87$; $SD=19{,}16$). Поновљено тестирање ученика испитиваних група, три месеца након завршетка експерименталног програма, показује да је и код експерименталне ($M = 49{,}85$; $SD = 22{,}60$) и код контролне групе ($M = 38{,}94$; $SD = 18{,}90$) дошло до пада постигнућа у односу на финално тестирање, што је очекивано, с обзиром на то да је ретестирање рађено три месеца касније услед чега је дошло и до заборављања наученог. Међутим, када се међусобно пореде резултати ученика испитиваних група, експериментална група постиже боље резултате у односу на ученике контролне групе. Дакле, утврђена разлика у постигнутом успеху у корист ученика експерименталне групе на финалном и поновљеном тесту указује да је реализација алгебарских садржаја путем учења путем открића на три нивоа сложености допринела повећању трајности знања ученика.

Колико су знања стечена путем експерименталног модела трајнија у односу на знања стечена на уобичајен начин, јасно се може видети на Графикону 8. На њему су представљене разлике у просечном броју остварених поена ученика Е и К групе на финалном тесту и ретестирању.



Графикон 8. *Успех ученика експерименталне и контролне групе на финалном тесту и ретесту*

Статистички значај остварених разлика између ученика посматраних истраживачких група на ретесту тестирали смо анализом варијансе (Табела 47). Претпоставка о једнакости варијансе је задовољена, на шта указује Левенов тест једнакости варијанси (F = 1,715; p = 0,191).

Утврђена вредност варијансе (F (1,259) = 17,862; p = 0,000) показује да постоји статистички значајна разлика између ученика експерименталне и контролне групе у просечном постигнућу на ретесту у целини. Тачније, ученици експерименталне групе су и три месеца након реализације експерименталног програма постигли значајно боље постигнуће у поређењу са ученицима контролне групе, што иде у прилог потврђивању полазне претпоставке о трајности знања ученика експерименталне групе, под дејством експерименталног фактора.

Табела 46. *Test of Homogeneity of Variances*

	Levene Statistic	df1	df2	p
Финално мерење	5,231	1	259	0,023
Поновљено мерење	1,715	1	259	0,191

Табела 47. *Разлика у укупном постигнућу између експерименталне и контролне групе на финалном и поновљеном тесту (ANOVA test)*

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	p
Финално мерење	Између група	5.957,688	1	5.957,688		
	Унутар групе	115.535,002	259	446,081	13,356	0,000
	Укупно	121.492,690	260			
Поновљено мерење	Између група	7.766,270	1	7.766,270		
	Унутар групе	112.608,474	259	434,782	17,862	0,000
	Укупно	120.374,743	260			

У циљу потврде да је статистичка значајност између експерименталне и контролне групе на ретесту последица спроведеног експерименталног програма, а не последица неуједначености група, разлику смо проверили и анализом коваријансе (ANCOVA). Резултати иницијалног тестирања су узети као коваријат у обема групама. Коваријат је измерен пре деловања експерименталног програма, а вредност Кронбах алфа коефицијента 0,79 (Табела 48) указује да је довољно поуздан.

Табела 48. *Кронбахов коефицијент алфа за иницијални тест*

Reliability Statistics		
Cronbach's Alpha	Cronbach's Alpha Based on Standardized Items	N of Items
0,79	0,77	18

Једна од претпоставки која је предуслов за једнофакторску анализу коваријансе јесте провера хомогености нагиба регресионе линије. Утврђена вредност интеракције зависне променљиве и коваријата (F = 1,833; p = 0, 179) потврђује да није нарушена претпоставка о хомогености регресионих нагиба (Табела 49).

Табела 49. *Хомогеност регресионих нагиба*

Dependent Variable: Укупно_ретест					
Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	11223,056 [a]	3	3741,018	155,754	0,000
Intercept	2125,047	1	2125,047	88,474	0,000
Grupa	66,048	1	66,048	2,75	0,122
Укупно иницијално мерење	9999,596	1	9999,596	416,325	0,00
Grupa * Укупно иницијално мерење	44,036	1	44,036	1,833	0,179
Error	6220,662	257	24,018		
Total	164012,452	261			
Corrected Total	17445,731	260			

a. R Squared = 0,643 (Adjusted R Squared = 0,640)

Табела 50. *Levene's Test of Equality of Error Variances*

Dependent Variable: Поновљено мерење

F	df1	df2	Sig.
0,968	1	259	0,326

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.

Једнакост варијанси резултата двеју група испитана је Левеновим тестом. Вредност Левеновог тест показује да није било озбиљнијег нарушавања претпоставке о једнакости варијансе (F = 0, 968; p = 0,326). На основу претходно наведеног утврђујемо да су задовољени сви неопходни критеријуми за примену поступка анализа коваријансе.

Табела 51. *Разлика између експерименталне и контролне групе на ретесту (ANCOVA test)*

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: Поновљено мерење

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	p	Partial Eta Squared
Corrected Model	112209,405[a]	2	56.104,703	1.772,739	0,000	0,932
Intercept	259,500	1	259,500	8,199	0,005	0,031
Inici_ukupno	104.443,136	1	104.443,136	3.300,087	0,000	0,927
Grupa	8.073,332	1	8.073,332	255,093	0,000	0,497
Error	8.165,338	258	31,649			
Total	636.197,000	261				
Corrected Total	120.374,743	260				

a. R Squared = 0,932 (Adjusted R Squared = 0,931)

Израчуната вредност коваријансе (F (1,258) = 255,093; p = 0,000) потврђује да је разлика између Е и К групе на ретесту статистички значајна. То указује да је остварена разлика између група настала деловањем примењеног методичког модела, а не услед неуједначености група (Табела 51). Вредност парцијалног ета квадрата (0, 497) потврђује велики утицај учења путем открића на диференцираним садржајима, што значи да се и три месеца након реализације експерименталног програма чак 49,7% варијансе на поновљеном мерењу може објаснити деловањем независне променљиве.

Када се уклони утицај независне променљиве (група), утицај коваријата на резултате ретеста је исто значајан (F = 3.300,087; p = 0,000). Такође, вредност парцијалног ета квадрата (0,927) указује на јаку везу између резултата испитивања ефеката имплементираног методичког поступка на успех ученика и три месеца након реализације експерименталног програма. Њиме се може објаснити чак 92,7% варијансе у резултатима ретеста.

Претходно представљени и анализирани резултати указују да реализација алгебарских садржаја применом учења путем открића на диференцираним садржајима у Е-групи утиче на боље постигнуће ученика и након одређеног временског периода. У вези са тим можемо да закључимо да овај облик организације наставе алгебре остварује позитивне ефекте на трајност знања ученика, што потврђује полазну претпоставку да су математичка знања ученика стечена учењем путем открића на диференцираним садржајима одолела процесу заборављања, тј. да су трајнија.

Аутори истраживања који су се бавили применом учења путем открића (Minner, Levy & Century, 2010; Balim, 2009; Малешевић, 2003) и диференцијације у настави (Вуловић, 2011) као једну од главних предности оваквих наставних приступа истицали су трајност знања. Резултати до којих смо ми дошли у складу су са оваквим налазима. Овај резултат се може образложити чињеницом да у овом приступу појмови које је потребно научити нису дати у финалној форми, већ их ученици самостално откривају и примењују у новим ситуацијама, тј. стечена знања су засnована на конструкцији, па су самим тим она смисленија и трајнија за ученике. Имајући у виду дугорочне ефекте овог методичког модела потребно га је чешће примењивати у реализацији садржаја почетне наставе математике.

2.1. Ефекти учења путем открића на диференцираним садржајима на трајност знања ученика према образовним нивоима постигнућа

2.1.1. Ефекти учења путем открића на диференцираним садржајима на трајност знања на основном нивоу постигнућа

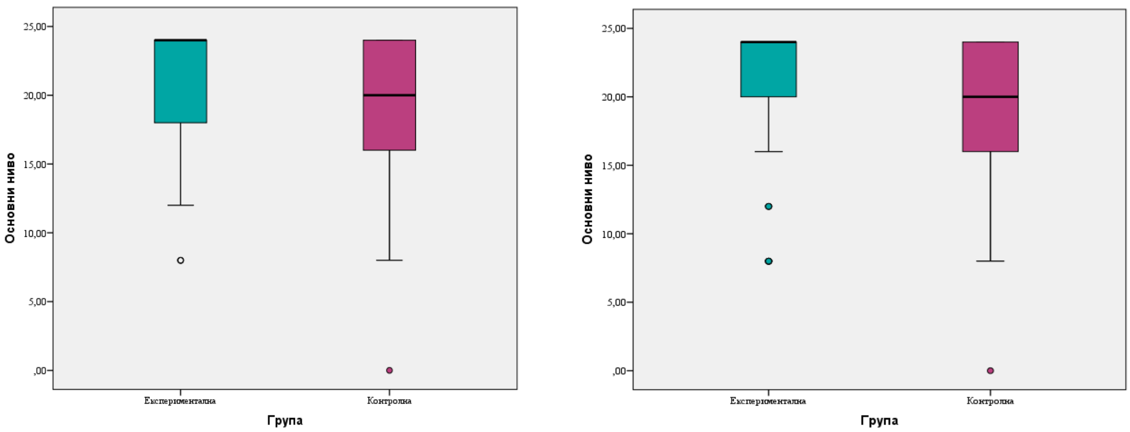
Анализу ефеката учења путем открића на диференцираним садржајима на трајност знања ученика у настави алгебре на основном нивоу постигнућа започели смо представљањем дескриптивних показатеља успешности ученика Е и К групе у решавању задатака са овог нивоа на финалном и поновљеном тестирању (Табела 52).

Просечно постигнуће ученика контролне групе на основном нивоу финалног теста износи M = 19,19; SD = 4,37, док су ученици експерименталне групе остварили већи просек од M = 21,12; SD = 4,29.

Табела 52. *Успешност ученика Е и К групе на основном нивоу постигнућа финалног теста и ретеста – дескриптивни показатељи*

		N	M	SD	Std. Error	95% Интервал поверења Доња граница	 Горња граница
Финални тест	Експериментална	132	21,12	4,29	0,37	20,38	21,86
	Контролна	129	19,19	4,37	0,38	18,43	19,96
	Укупно	261	20,17	4,43	0,27	19,63	20,71
Ретест	Експериментална	132	20,67	4,74	0,41	19,85	21,48
	Контролна	129	18,45	4,98	0,44	17,58	19,32
	Укупно	261	19,57	4,98	0,31	18,96	20,18

Ученици контролне групе су постигли на основном нивоу постигнућа поновљеног мерења приближно исти просечни резултат као и на финалном мерењу (M = 18,45; SD = 4,98). Ученици експерименталне групе су и на ретесту остварили боље постигнуће од ученика контролне групе (M = 20,67; SD = 4,74).



Графикон 9. *Успех ученика експерименталне и контролне групе на основном нивоу постигнућа финалног теста и ретеста*

Утицај учења путем открића на диференцираним садржајима на трајност знања ученика са основног нивоа тестирали смо двофакторском анализом варијансе. Вредност Левеновог теста једнакости варијанси (F = 0, 630; p = 0, 428) није статистички значајна на на основу чега закључујемо да су на основном нивоу ретеста варијансе субгрупа хомогене.

Табела 53. *Levene's Test of Equality of Error Variances*

Dependent Variable: Поновљено мерење (основни ниво)

	F	df1	df2	Sig.
Основни ниво	0,630	1	259	0,428

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.

Табела 54. *Разлика између експерименталне и контролне групе на основном нивоу постигнућа ретеста (ANCOVA test)*

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: Поновљено мерење (основни ниво)

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	P	Partial Eta Squared
Corrected Model	4218,481[a]	2	2109,240	244,088	0,000	0,654
Intercept	293,065	1	293,065	33,914	0,000	0,116
Inicijalni_osn	3897,798	1	3897,798	451,066	0,000	0,636
Grupa	343,349	1	343,349	39,733	0,000	0,133
Error	2229,458	258	8,641			
Total	106416,000	261				
Corrected Total	6447,939	260				

a. R Squared = 0,654 (Adjusted R Squared = 0, 651)

Када се уклони утицај коваријата (резултат иницијалног мерења на основном нивоу), добијамо резултат који указује да између успеха ученика Е и К групе на основном нивоу поновљеног теста постоје разлике које су статистички значајне (F = 39,733; p = 0,000). Вредност парцијалног ета квадрата (0,133) потврђује умерен утицај експерименталног методичког приступа (Cohen, 1988; према: Pallant, 2011). То значи да се 13,3% варијансе на основном нивоу поновљеног мерења може објаснити независном променљивом, тј. експерименталним моделом учења.

Ако узмемо у обзир утицај коваријата (резултати иницијалног теста са основног нивоа постигнућа) на резултате ретеста, након искључења утицаја независне променљиве, вредност коваријансе (F = 451,066; p = 0,000) указује на постојање статистички значајне разлике. О величини утицаја варијансе на резултате говори вредност парцијалног ета квадрата (0,636) који показује да је наведени утицај велики (Cohen, 1988; према: Pallant, 2011).

Резултати потврђују позитиван ефекат учења путем открића на диференцираним садржајима алгебре на трајност знања ученика који остварују најслабији успех у настави математике, тј. ученика који су на основном нивоу постигнућа. Другим речима, резултати указују да експериментални модел доприноси стицању трајнијих знања на основном нивоу у односу на уобичајен, класични модел учења. То значи да, уколико се методички приступ усвајања алгебарских садржаја заснива на рецептивном усвајању садржаја, тј. предавачкој функцији учитеља и меморисању са или без разумевања од стране ученика, тако стечена знања не одолевају процесу заборављања. С друге стране, самостално откривање појмова, правила итд, уз интензивну мисаону активизацију, доприноси да чак и ученици са најслабијим успехом стекну трајнија знања.

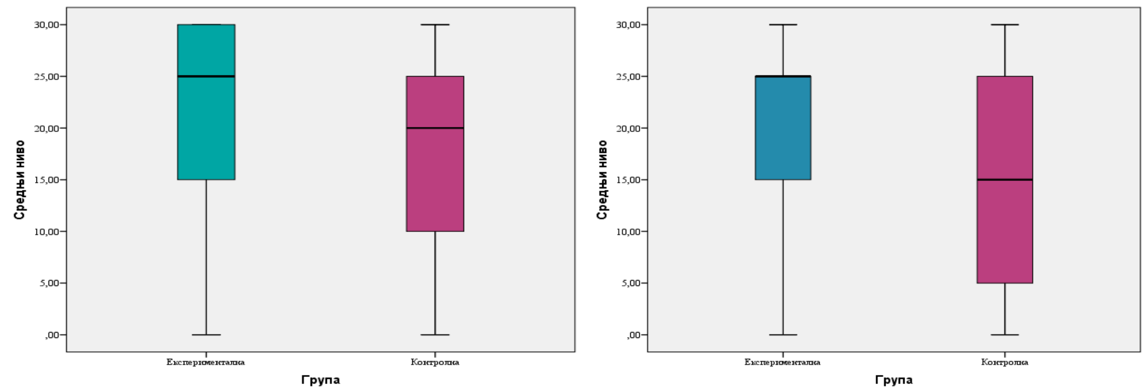
2.1.2. Ефекти учења путем открића на диференцираним садржајима на трајност знања на средњем нивоу постигнућа

Дескриптивни показатељи успешности ученика испитиваних група у решавању задатака на средњем нивоу постигнућа финалног и поновљеног тестирања приказани су у Табели 55. Анализом ефеката експерименталног програма утврдили смо да је просечно постигнуће ученика контролне групе на средњем нивоу финалног теста било M = 19,19; SD = 9,82, док су ученици експерименталне групе под дејством експерименталног фактора остварили знатно бољи просек од M = 20,53; SD = 9,62.

Табела 55. *Успешност ученика Е и К групе на средњем нивоу постигнућа финалног теста и ретеста – дескриптивни показатељи*

		N	M	SD	Std. Error	95% Интервал поверења	
						Доња граница	Горња граница
Финални тест	Експериментална	132	20,53	9,62	0,84	18,87	22,19
	Контролна	129	17,74	9,82	0,86	16,03	19,45
	Укупно	261	19,15	9,80	0,61	17,96	20,35
Ретест	Експериментална	132	19,81	9,34	0,81	18,20	21,42
	Контролна	129	16,40	10,04	0,88	14,65	18,14
	Укупно	261	18,12	9,82	0,61	16,93	19,32

Код ученика контролне групе је на поновљеном тестирању дошло до извесног пада просека у броју остварених поена на средњем нивоу постигнућа у односу на исти ниво финалног теста (M = 16,40; SD = 10,04). Такође, и код ученика експерименталне групе је на средњем нивоу ретеста дошло до пада постигнућа у односу на финално тестирање (M = 19,81; SD = 9,34). Ипак, ако упоредимо постигнуће испитиваних група на средњем нивоу ретеста, уочавамо да ученици експерименталне групе постижу знатно бољи просечни резултат у односу на ученике контролне групе.



Графикон 10. *Успех ученика експерименталне и контролне групе на средњем нивоу постигнућа финалног теста и ретеста*

Поступком двофакторске анализе варијансе различитих група испитиван је ефекат имплементираног методичког поступка на трајност знања ученика са средњег нивоа постигнућа. Вредност Левеновог теста једнакости варијансе (F = 3,116; p = 0,079) указује да није било значајнијег нарушавања претпоставке о једнакости варијансе.

Табела 56. *Levene's Test of Equality of Error Variances*

Dependent Variable: Поновљено мерење (средњи ниво)

	F	df1	df2	Sig.
Средњи ниво	3,116	1	259	0,079

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.

Табела 57. *Разлика између експерименталне и контролне групе на средњем нивоу постигнућа ретеста (ANCOVA test)*

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: Поновљено мерење (средњи ниво)

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	P	Partial Eta Squared
Corrected Model	20913,235 [a]	2	10456,617	647,447	0,000	0,834
Intercept	675,732	1	675,732	41,840	0,000	0,140
Inicijalni_sred	20152,261	1	20152,261	1.247,776	0,000	0,829
Grupa	773,909	1	773,909	47,918	0,000	0,157
Error	4166,842	258	16,151			
Total	110800,000	261				
Corrected Total	6447,939	260				

a. R Squared = 0,834 (Adjusted R Squared = 0, 833)

Пошто се уклони утицај коваријата (резултат иницијалног мерења постигнућа на средњем нивоу), уочава се статистички значајна разлика између испитиваних група на средњем нивоу постигнућа поновљеног мерења (F = 47,918; p = 0,000). Три месеца након завршетка експерименталног програма 15,7 % варијансе на поновљеном мерењу можемо објаснити деловањем експерименталног модела, на шта указује парцијални ета квадрат 0,157.

Коваријанса на средњем нивоу поновљеног мерења (након искључења утицаја независне променљиве: група – начин рада) статистички је значајна (F = 1.247,776; p = 0,000). Такође, вредност парцијалног ета квадрата (0, 829) указује на јаку везу између резултата испитивања ефеката имплементираног методичког поступка на успех ученика и три месеца након реализације експерименталног програма. Тиме се може објаснити чак 82,9% варијансе у резултатима ретеста на средњем нивоу постигнућа.

Резултати показују да је услед процеса заборављања дошло до пада постигнућа на средњем нивоу ретеста, и то код ученика обеју испитиваних група. Ипак, ученици експерименталне групе, под дејством експерименталног програма, постижу статистички значајно боље постигнуће у поређењу са ученицима контролне групе, тј. ретенција знања која су стечена применом експерименталног модела учења јесте боља, односно знања стечена на овај начин се спорије заборављају. Очигледно је да су наставне ситуације, осмишљене у оквиру експерименталног програма, у којима се од ученика захтевало улагање одређеног интелектуалног напора, допринеле стицању трајнијих знања ученика.

2.1.3. Ефекти учења путем открића на диференцираним садржајима на трајност знања на напредном нивоу постигнућа

У циљу анализе ефеката учења путем открића на диференцираним садржајима на трајност знања ученика на напредном нивоу, у Табели 58 смо представили дескриптивне показатеље успешности ученика Е и К групе у решавању задатака са овог нивоа постигнућа на финалном и поновљеном мерењу.

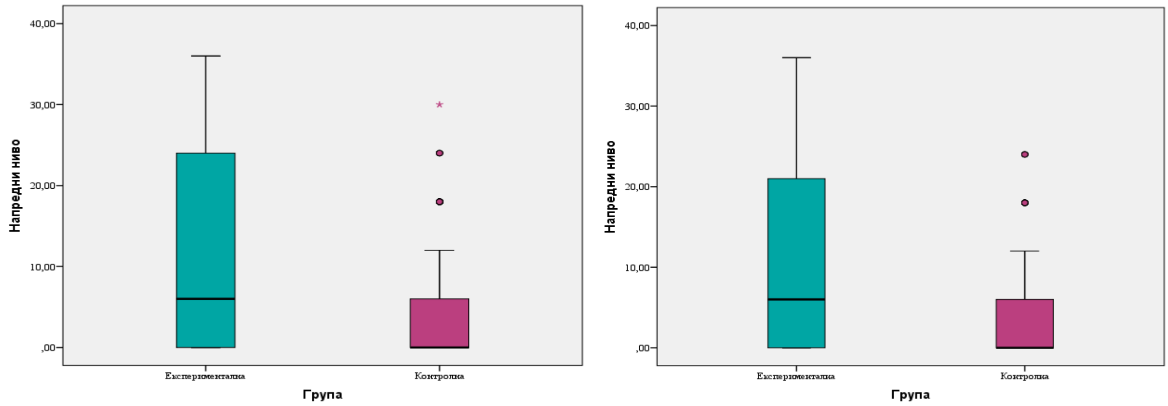
Просечно постигнуће ученика експерименталне групе на напредном нивоу финалног теста износи M = 9,77; SD = 12,33, док је контролна група остварила просек од M = 4,93; SD = 7,59.

Табела 58. *Успешност ученика Е и К групе на напредном нивоу постигнућа финалног теста и ретеста – дескриптивни показатељи*

		N	M	SD	Std. Error	95% Интервал поверења	
						Доња граница	Горња граница
Финални тест	Експериментална	132	9,77	12,33	1,07	7,65	11,89
	Контролна	129	4,93	7,59	0,67	3,61	6,25
	Укупно	261	7,38	10,53	0,65	6,10	8,66
Ретест	Експериментална	132	9,36	11,66	1,01	7,36	11,37
	Контролна	129	4,09	6,67	0,59	2,93	5,25
	Укупно	261	6,76	9,86	0,61	5,56	7,96

На напредном нивоу ретеста ученици контролне групе су остварили мањи број поена у односу на финално мерење (M = 4,09; SD = 6,67). Такође, и ученици експерименталне групе су услед процеса заборављања постигли нешто нижи просечни резултат у односу на исти ниво финалног теста (M = 9,36; SD = 11,66).

Ако упоредимо постигнуте резултате испитиваних група на напредном нивоу, примећујемо да ученици експерименталне групе и на финалном тесту и на ретесту имају значајно веће просечно постигнуће у поређењу са својим вршњацима из контролне групе.



Графикон 11. *Успех ученика експерименталне и контролне групе на напредном нивоу постигнућа финалног теста и ретеста*

Како бисмо испитали ефекат експерименталног програма на трајност знања ученика са напредног нивоа, применили смо двофакторску анализу варијансе различитих група. Вредност Левеновог теста једнакости варијанси (F = 12,567; p = 0,00) указује да су варијансе субузорака нехомогене, зато ћемо у анализама које следе узимати строжи ниво 0,01 као праг значајности.

Табела 59. *Levene's Test of Equality of Error Variances*

Dependent Variable: Поновљено мерење (напредни ниво)

	F	df1	df2	Sig.
Напредни ниво	12,567	1	259	0,000

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.

Табела 60. *Разлика између експерименталне и контролне групе на напредном нивоу постигнућа ретеста (ANCOVA test)*

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: Поновљено мерење (напредни ниво)

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	P	Partial Eta Squared
Corrected Model	19044,133[a]	2	9522,066	392,590	0,000	0,753
Intercept	72,393	1	72,393	2,985	0,085	0,011
Inicijal_napr	17231,769	1	17231,769	710,457	0,000	0,734
Grupa	1870,629	1	1870,629	77,125	0,000	0,230
Error	6257,661	258	24,254			
Total	37224,000	261				
Corrected Total	25301,793	260				

a. R Squared = 0,753 (Adjusted R Squared = 0, 751)

Пошто се уклони утицај коваријата (резултат иницијалног тестирања на напредном нивоу), добијамо резултат који указује да на напредном нивоу ретест мерења постоје статистички значајне разлике између испитиваних група (F = 77,125; p = 0,000). Парцијални ета квадрат (0, 230) указује на велики утицај експерименталног методичког приступа (Cohen, 1988; према: Pallant, 2011). То значи да се 23% варијансе на напредном нивоу поновљеног мерења може објаснити независном променљивом, тј. експерименталним моделом учења.

Пошто се искључи утицај независне променљиве (група – начин рада), утицај коваријата (иницијално постигнуће ученика са напредног нивоа) на резултате ретеста такође је значајан (F = 710,457; p = 0,000). Парцијални ета квадрат (0, 734) указује на велики утицај варијансе у резултатима ретеста (Табела 60).

Резултати указују на то да је, с временом, на напредном нивоу дошло до пада постигнућа ученика, али су, захваљујући експерименталном моделу, ученици експерименталне групе ипак постигли значајно бољи просечни резултат у односу на ученике контролне групе.

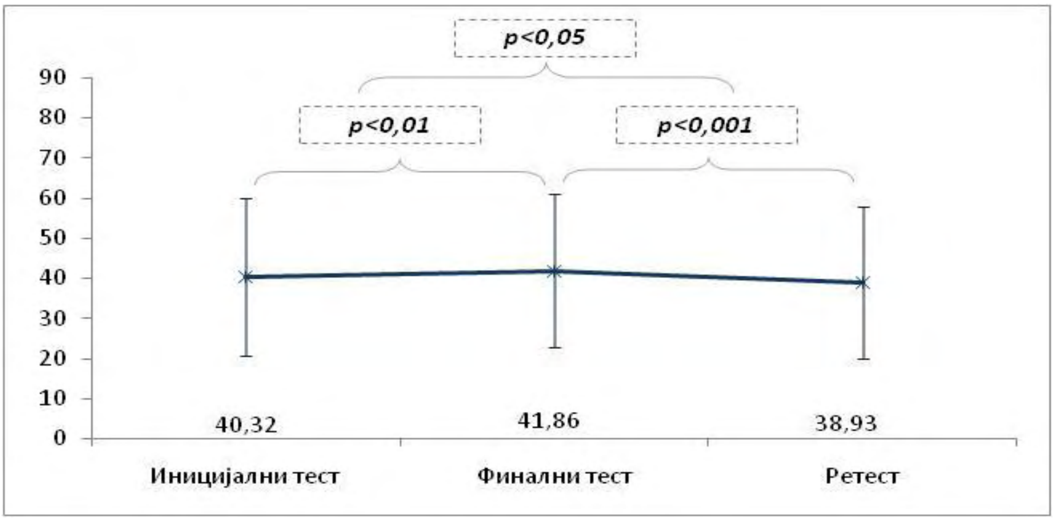
Сумирањем ефеката које учење путем открића има на трајност знања ученика, закључујемо да постоје разлике између ученика експерименталне и контролне групе на свим нивоима постигнућа поновљеног теста, три месеца након реализације експерименталног програма. Разлика се огледа у дужем задржавању стеченог знања код ученика експерименталне групе. Трајност знања ученика експерименталне групе постигнута је захваљујући самосталној активности откривања при обради алгебарских садржаја током које су властитим напором долазили до сазнања, али и захваљујући осмишљеним активностима вежбања и утврђивања наученог у оквиру којих су ученици, поред задатака који одговарају њиховом нивоу постигнућа, решавали и задатке са вишег нивоа. Такође, трајности знања ученика експерименталне групе допринели су и задаци у оквиру експерименталног програма који од ученика захтевају примену стеченог знања у реалним животним ситуацијама. Ово потврђују полазишта из литературе која указују на то да „трајност усвојених знања зависи не само од организације наставног часа, већ и од врсте знања које ученик усваја“ (Trnavac i Đorđević, 1998: 64).

****

Како бисмо сагледали напредовање ученика у погледу постигнућа у настави математике након реализације експерименталног програма, осим напредовања на појединачним мерењима, значајно је било да извршимо поређења остварених постигнућа ученика на сваком од трију извршених мерења и да утврдимо да ли је свака група појединачно остварила напредак. С обзиром на то да смо знање ученика проверавали у трима временским интервалима, за тестирање разлика у оствареним поенима коришћена је једнофакторска ANOVA поновљених мерења. Накнадна поређења су тестирана Bonferroni Post Hoc Test-ом.

Најпре смо пратили напредовање ученика контролне групе. Упоредили смо просечна постигнућа на тесту математике који је реализован пре експерименталног програма (иницијални тест), након експерименталног програма (финални тест) и три месеца по реализацији експеримента (ретест).

На Графикону 12 су представљена просечна постигнућа ученика контролне групе на трима мерењима и статистички значај остварених разлика у постигнућима.



Графикон 12. *Напредовање ученика К-групе у трима мерним тачкама*

Моклијев тест потврђује да је задовољена претпоставка о сферичности варијансе. Једнофакторском анализом варијансе за поновљена мерења добијени су подаци који показују да код ученика у контролној групи постоји статистички значајан утицај времена, Wilks' lambda = 0,460; F = 74,42; p = 0,000 (Табела 61). Подаци из табеле указују да вредност парцијалног ета квадрата износи 0,540, што објашњава 54% варијабилитета зависне варијабле, а то се сматра великим утицајем на основу параметара које је поставио Коен (Cohen,1988; према: Pallant, 2011).

Табела 61. *Напредовање ученика К-групе у трима мерним тачкама (ANOVA поновљених мерења)*

	M	SD	Wilks' lambda	F	p	Percijalna Eta²
Иницијални тест	40,32	19,59	0,460	74,42	0,000	0,540
Финални тест	41,86	19,16				
Ретест	38,93	18,89				

Mauchly's Test of Sphericity, homogenost varijanse

Within Subjects Effect	Mauchly's W	Approx. Chi-Square	df	p
factor1	3,11	65,610	2	0,060

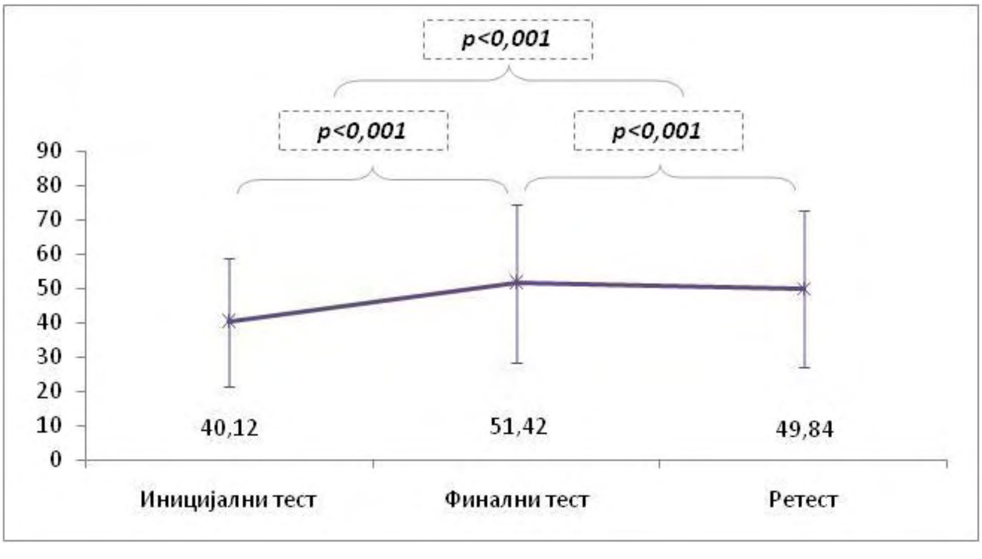
Након што је утврђено да постоји статистички значајна разлика у постигнућу ученика контролне групе мереног у трима временским интервалима, накнадним вишеструким поређењем је испитано између којих мерења је установљена та разлика.

Табела 62. *Напредовање у знању, контролна група – накнадна поређења (Bonferroni Post Hoc Test)*

(I) Мерење	(J) Мерење	Средња разлика (I–J)	Стандардна грешка	p	95% Интервал поверења	
					Доња граница	Горња граница
1. мерење	2. мерење	-1,543*	0,409	0,001	-2,536	-0,550
	3. мерење	1,388*	0,481	0,014	0,222	2,553
2. мерење	1. мерење	1,543*	0,409	0,001	0,550	2,536
	3. мерење	2,930*	0,251	0,000	2,320	3,540
3. мерење	1. мерење	-1,388*	0,481	0,014	-2,553	-0,222
	2. мерење	-2,930*	0,251	0,000	-3,540	-2,320

Ученици који су садржаје алгебре учили уобичајеним методским поступком остварили су статистички значајно већи број поена на финалном (M = 41,8; SD = 19,16; p = 0,001) у поређењу са иницијалним мерењем (M = 40,32; SD = 19,59), али је постигнуће ове групе ученика на ретесту (M = 38,93; SD = 18,89; p = 0,014) статистички мање него на иницијалном. Очекивано, ученици К-групе су остварили статистички значајно бољи успех на финалном мерењу (M = 41,86; SD = 19,16) у односу на ретест (M = 38,93; SD = 18,89; p = 0,000). Прецизније речено, ученици контролне групе су напредовали од иницијалног теста (прва тачка мерења) до финалног теста (друга тачка мерења), али није било напретка од иницијалног теста (прва тачка мерења) до ретеста (трећа тачка мерења), нити су напредовали од финалног тестирања (друга тачка) до ретеста (трећа тачка), тј. на ретесту је дошло до пада просечног постигнућа и у односу на иницијални и у односу на финални тест. То нас наводи на закључак да учење алгебарских садржаја на традиционалан начин, тј. применом вербално-рецептивних метода рада и фронталним излагањем учитеља, не доприноси ретенцији стечених знања.

Затим смо пратили напредовање експерименталне групе. На Графикону 13 су приказани резултати ученика експерименталне групе у свим трима мерењима и статистичка значајност разлика у постигнућима ученика.



Графикон 13. *Напредовање ученика Е-групе у трима мерним тачкама*

За тестирање учинковитости експерименталног програма у експерименталној групи користили смо ANOVA-у поновљених мерења (Табела 63). Упоредили смо просечна постигнућа на тесту математике који је реализован пре експерименталног програма (иницијални тест), након експерименталног програма (финални тест) и три месеца по завршетку експеримента (ретест). Претпоставка о сферичности варијансе је задовољена, на шта указује Моклијев тест. Подаци потврђују статистички значајан утицај експерименталног програма, Wilks' lambda = 0,202; F = 257,442; p = 0,000. Вредност квадриране ете (0,789) указује на јак утицај експерименталног програма на постигнуће ученика, објашњавајући чак 79,8% варијабилитета зависне варијабле (Cohen,1988; према: Pallant, 2011).

Табела 63. *Напредовање ученика Е-групе у трима мерним тачкама (ANOVA поновљених мерења)*

	M	SD	Wilks' lambda	F	p	Percijalna Eta²
Иницијални тест	40,12	18,80				
Финални тест	51,42	22,87	0,202	257,442	0,000	0,798
Ретест	49,84	22,59				

Mauchly's Test of Sphericity, homogenost varijanse

Within Subjects Effect	Mauchly's W	Approx. Chi-Square	df	p
factor1	3,05	54,430	2	0,056

Накнадним вишеструким поређењем је испитано између којих мерења је установљена разлика.

Табела 64. *Напредовање у знању, експериментална група – накнадна поређења (Bonferroni Post Hoc Test)*

(I) Мерење	(J) Мерење	Средња разлика (I–J)	Стандардна грешка	p	95% Интервал поверења Доња граница	Горња граница
1. мерење	2. мерење	-11,303*	0,502	0,000	-12,297	-10,309
	3. мерење	-9,727*	0,513	0,000	-10,742	-8,712
2. мерење	1. мерење	11,303*	0,502	0,000	10,309	12,297
	3. мерење	1,576*	0,218	0,000	1,144	2,008
3. мерење	1. мерење	9,727*	0,513	0,000	8,712	10,742
	2. мерење	-1,576*	0,218	0,000	-2,008	-1,144

Ученици експерименталне групе су остварили статистички значајно лошије постигнуће на иницијалном мерењу (M= 40,12; SD= 18,80) у односу на финално (M= 51,42; SD = 22,8; p = 0,000) и ретест (M = 49,84; SD = 22,59; p = 0,000). Резултат ученика ове групе на финалном мерењу (M = 51,42; SD = 22,87) статистички је бољи у односу на ретест (M = 49,84; SD = 22,59; p = 0,000).

Дакле, код ученика експерименталне групе постоји напредак од иницијалног теста (прва тачка мерења) до финалног теста (друга тачка мерења), као и напредак од иницијалног теста (прва тачка мерења) до ретеста (трећа тачка мерења). Услед процеса заборављања дошло је до пада постигнућа између финалног тестирања (друга тачка мерења) и ретеста (трећа тачка мерења).

Посматрајући обједињено, ANOVA поновљених мерења за Е и К групу указује да су сви ученици напредовали у постигнућима током времена од иницијалног теста (прва тачка мерења) до финалног теста (друга тачка мерења). Међутим, у претходним поглављима смо доказали да је тај напредак значајно већи код ученика експерименталне групе, тачније постојао је значајан утицај екперименталног фактора на резултате ученика. Ученици експерименталне групе су остварили и напредак од иницијалног теста (прва тачка мерења) до ретеста (трећа тачка мерења), док је код ученика контролне групе дошло до пада постигнућа између ових двају мерења.

Закључујемо да су ученици који су учили по експерименталном моделу стекли већа знања, као и бољу трајност тог знања, и поред тога што су на иницијалном тестирању ученици контролне групе имали благу предност у односу на ученике експерименталне групе.

3. УЛОГА УЏБЕНИКА МАТЕМАТИКЕ У СТВАРАЊУ УСЛОВА ЗА УЧЕЊЕ АЛГЕБАРСКИХ САДРЖАЈА ПУТЕМ ОТКРИЋА

С обзиром на то да се у раду бавимо алгебарским садржајима, за које смо у теоријском делу рада констатовали да их карактерише апстрактност, комплексност и да их прате бројне потешкоће на путу њиховог усвајања, то методичко структурирање и моделовање ових садржаја у раду са ученицима подразумева коришћење нарочитих методичких поступака, као што је, између осталог, учење путем открића. Како се у моделовању процеса учења учитељ првенствено ослања на уџбеник, један од задатака нашег истраживања односио се на уџбенике математике у млађим разредима основне школе с циљем да се утврди њихова улога у стварању услова за учење алгебарских садржаја путем открића.

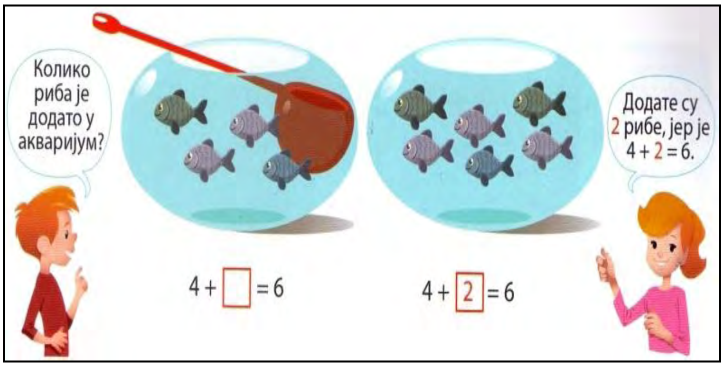
Полазећи од чињенице да учење алгебарских садржаја путем открића може да се оствари путем задатака који упућују ученика на самостално откривање нових појмова, правила, алгоритама итд, настојали смо да анализом садржаја идентификујемо уводне примере – задатке у уџбеницима математике за прва четири разреда основне школе који пружају ту могућност.

Ако се узму у обзир садржаји из области алгебре, наставним програмом за први разред основне школе предвиђа се усвајање и развијање појма непознатог броја у једнакостима са сабирањем и одузимањем, као и откривање непознатог броја искључиво путем „погађања“ (*Правилник о плану наставе и учења за први циклус основног образовања и васпитања и програму наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања*, 2017). Увидом у анализиране уџбенике математике за први разред основне школе установили смо да при увођењу алгебарских садржаја доминира експозиторно излагање на почетку наставне јединице, док је укупна заступљеност задатака који иницирају учење алгебарских садржаја путем открића нешто већа од 35% (Табела 64). У ниједном од анализираних уџбеника математике нису заступљени задаци који иницирају неки други облик учења при обради алгебарских садржаја. Највећа заступљеност задатака који стварају основу за учење путем открића утврђена је у уџбеницима издавачких кућа *Бигз* и *Вулкан знање* (66,6%), док је знатно мања заступљеност оваквих задатака утврђена у уџбенику издавачке куће *Нови Логос*, где је половина (50%) предвиђеног садржаја алгебре уведена путем открића. У уџбеницима издавачких кућа *Едука*, *Klett* и *Креативни центар* сви алгебарски садржаји су уведени смисленим рецептивним учењем (Табела 65).

Табела 65. *Заступљеност облика учења у формирању алгебарских појмова у уџбеницима математике за први разред основне школе*

Уџбеници	*Први разред*			
	Учење путем открића		*Рецептивно учење*	
	f	%	*f*	%
Едука	0	0%	3	100%
Креативни центар	0	0%	2	100%
Нови Логос	1	50 %	1	50%
Klett	0	0%	1	100%
Вулкан	2	66,6 %	1	33,3%
Бигз	2	66,6%	1	33,3%
Укупно	5	35,7%	9	64,3%

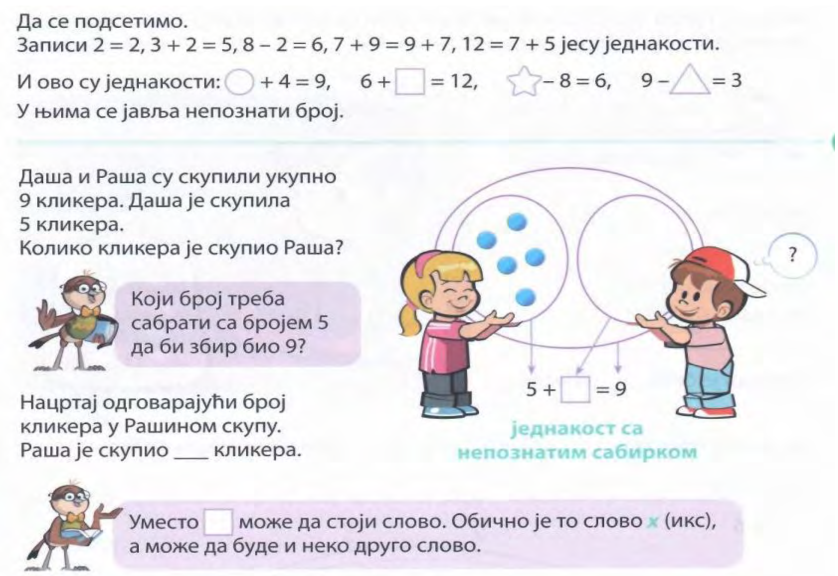
Наводимо пример задатка из анализираног уџбеника издавачке куће Бигз за први разред који ствара основу за учење садржаја о одређивању непознатог броја путем открића (Пример 39).



Пример 39: Одређивање непознатог броја (Маричић, 2018а: 81)

У Примеру 39 аутор развија појам непознатог броја кроз реалну ситуацију у којој је овај појам представљен кроз скривен број рибица које су додате у акваријум. Илустрација дате ситуације омогућава лакше сагледавање проблема и односа који постоји између података у задатку. На основу другог дела слике ученик увиђа односе између количина представљених на слици, генерализује представљену ситуацију и открива да вредност непознатог броја у једнакости у којој непознати број представљен преко „држача места“ износи 2. Вредност непознатог броја ученици одређују користећи претходно искуство са сабирањем бројева; тачније, треба да открију који то број треба сабрати са бројем 4 да би добијени збир износио 6.

Пример садржаја о одређивању непознатог сабирка који ствара основу за учење путем открића можемо пронаћи и у анализираном уџбенику издавачке куће Вулкан (Пример 40).



Пример 40: Једнакости са непознатим сабирком (Малиновић Јовановић, Малиновић, 2019б: 33)

Непознати број у овом примеру је представљен кроз непознати број кликера које је скупио дечак Раша, што је исказано у тексту задатка. Илустрацијом дате ситуације аутори воде ученике како би увидели односе између података датих у представљеном проблему и на основу савладане таблице сабирања открили колико кликера треба да доцртају у Рашином скупу и тиме одреде непознати број.

У другом разреду основне школе ученици се први пут упознају са употребом слова као ознаком за непознати број и појмом једначине. Поступак решавања једначина у другом разреду темељи се на уочавању зависности и узајамне повезаности између рачунских операција. Програмом је планирано решавање једначина паралелно са обављањем одређених рачунских радњи, па стога ученици другог разреда решавају *једначине са непознатим сабирком*, *умањеником*, *умањиоцем*, *чиниоцем*, *дељеником* и *делиоцем (Правилник о програму наставе и учења за други разред основног образовања и васпитања*, 2018).

У глобалу, анализом садржаја уџбеника за други разред основне школе утврђено је да се већина алгебарских садржаја (60%) уводи експозиторним излагањем. Заступљеност садржаја који захтевају учење путем открића свега је 35%, док су остали облици учења при увођењу алгебарских садржаја присутни у занемарљивом проценту 5% (Табела 65).

Алгебарски садржаји у другом разреду уводе се учењем путем открића са највећом учесталошћу у уџбенику издавачке куће *Вулкан знање* (71,4%), док су у уџбеницима издавача *Едука*, *Бигз* и *Klett* само по два садржаја уведена овим приступом. У уџбенику *Креативног центра* ниједна наставна јединица није уведена путем открића, док је у уџбенику за други разред издавачке куће *Нови Логос* утврђена подједнака заступљеност приступа који подразумева учење путем открића и приступа који се заснива на рецептивном учењу алгебарских садржаја (Табела 66).

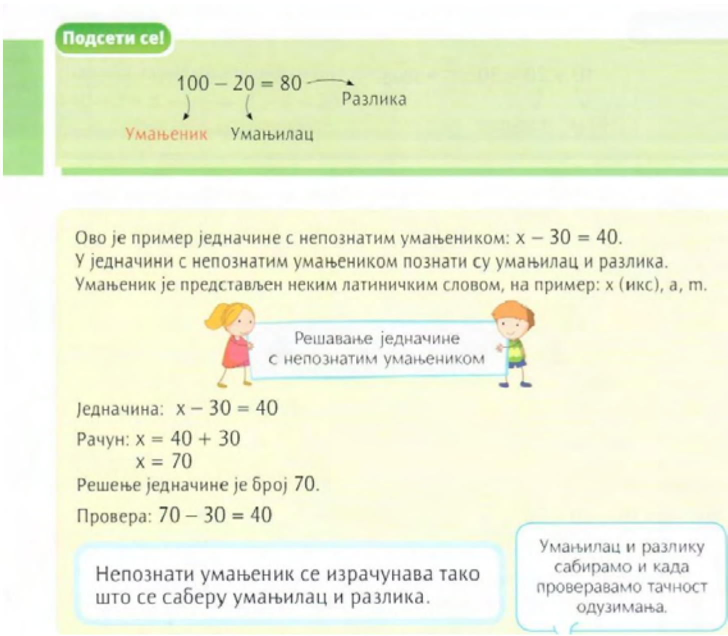
Табела 66. *Заступљеност облика учења у формирању алгебарских појмова у уџбеницима математике за други разред основне школе*

Уџбеници	*Други разред*					
	Учење путем открића		*Рецептивно учење*		*Остали облици учења*	
	f	%	*f*	%	*f*	%
Едука	2	33,3%	4	50%	1	16,7%
Креативни центар	0	0%	6	100%	0	0%
Нови Логос	3	50%	3	50%	0	0%
Klett	2	28,6%	4	57,1%	1	14,3%
Вулкан	5	71,4%	2	28,6%	0	0%
Бигз	2	28,6%	5	71,4%	0	0%
Укупно	14	35 %	24	60%	2	5%

Примером 41 је представљен задатак који пружа основу за учење садржаја о једначинама са непознатим умањеником путем открића.

Пример 41: Одређивање непознатог умањеника (Маричић, Ђуровић, 2019а: 44)

У Примеру 41 аутори моделовањем проблема исказаног у задатку, као и коришћењем истих боја за означавање одговарајућих компонената на цртежу (моделу) и у једнакостима, сликовито изражавају односе између познатих и непознатих вредности у задатку и тиме омогућавају ученицима да открију правило за одређивање непознатог умањеника. Визуелизација задатка омогућава ученицима да схвате начин састављања одговарајуће једначине, али и да открију сам поступак решавања исте, јер цртеж јасно изражава везу између компонената једначине, тј. сугерише везу између операција сабирања и одузимања.



Пример 42: Једначине са непознатим умањеником (Рикало, 2019: 18)

За разлику од претходног примера, у Примеру 42 је дат задатак који се базира искључиво на рецептивном усвајању садржаја о једначинама са непознатим умањеником. Наиме, овај уводни задатак је без неких посебних захтева за ученике, па их самим тим ни на који начин не подстиче да уочавају односе између познатих и непознатих величина и открију поступак решавања једначина са непознатим умањеником, већ се приступ своди на експлицитно саопштавање правила о одређивању непознатог умањеника коришћењем везе између рачунских операција.

Према захтевима програма за трећи разред, поред садржаја који укључују познате облике једначина у скупу бројева до 1000, предвиђа се усвајање и развијање појма неједначине. Осим поменутих, ученици трећег разреда упознају садржаје из области алгебре који се тичу зависности резултата од промене компонената рачунских операција и одређивања вредности израза са словима за понуђене вредности слова (*Правилник о наставном плану и програму за први, други, трећи и четврти разред основне школе, 2006*).

Анализом садржаја уџбеника математике за трећи разред утврђена је генерално мала заступљеност задатака – садржаја који захтевају учење алгебре путем открића. Међутим, разлике по уџбеницима појединих издавача, када је у питању заступљеност ових задатака, велике су и крећу се од 0% па до 63,6 % (Табела 66).

Задаци који стварају основу за учење путем открића најзаступљенији су у уџбенику издавачке куће *Едука,* и то у великом проценту – 63,6%. Заступљеност задатака-садржаја који иницирају учење путем открића у уџбенику издавачке куће *Нови Логос* је 27,3%, док се у уџбенику издавачке куће *Креативни центар* нешто мање од трећине алгебарских садржаја (30,8%) уводи откривајућим приступом (Табела 67).

Анализа садржаја је показала да садржаји о зависности резултата од промене компонената рачунских операција нису присутни у уџбенику издавача *Бигз,* док је 40 % осталих алгебарских садржаја у овом уџбенику уведено учењем путем открића.

У уџбенику издавачке куће *Klett* алгебарски садржаји се уводе искључиво путем рецептивног учења. Осим тога, увидом у овај уџбеник утврдили смо да у њему нису заступљени садржаји који се односе на увођење зависности збира од промене сабирака и зависности разлике од промене умањеника и умањиоца.

Такође, анализом садржаја уџбеника математике за трећи разред утврдили смо да у двама од пет анализираних уџбеника нису заступљени садржаји који се односе на одређивање вредности израза са промењљивом. Чињеница да садржаји предвиђени наставним програмом не постоје у појединим уџбеницима јесте забрињавајућа, нарочито ако се узме у обзир да су ти садржаји повезани и међусобно условљени другим алгебарским садржајима, посебно оним који се односе на једначине и неједначине.

Табела 67. *Заступљеност облика учења у формирању алгебарских појмова у уџбеницима математике за трећи разред основне школе*

Уџбеници	***Трећи разред***					
	Учење путем открића		*Рецептивно учење*		*Остали облици учења*	
	f	%	*f*	%	*f*	%
Едука	12	63,3%	7	36,8%	0	0%
Креативни центар	4	30,8%	6	46,1%	3	23,1%
Нови Логос	3	27,3%	8	72,7%	0	0%
Klett	0	0%	4	57,1%	3	42,9%
Бигз	2	40%	3	60%	0	0%
Укупно	21	38,1%	28	51%	6	10,9%

Наводимо примере задатака из уџбеника за трећи разред који иницирају учење путем открића, а које су аутори искористили за усвајање правила о сталности производа.

• У производу 8 · 3 први чинилац је **умањен 2 пута**, а други **повећан 2 пута**.
Да ли се производ променио?

8 · 3 = 24
(8 : 2) · (3 · 2) = ___ · ___ = ___
8 · 3 = 4 · 6

Одговор: ______________________

1 Израчунај сваки производ на два приказана начина.

• 40 · 6 = ___
40 · 6 = (40 · 2) · (6 : 2) = ___ · ___ = ___

• 25 · 5 = ___
25 · 5 = (25 : 5) · (5 · 5) = ___ · ___ = ___

• 20 · 4 = ___
20 · 4 = (20 · 4) · (4 : 4) = ___ · ___ = ___

• 15 · 3 = ___
15 · 3 = (15 : 3) · (3 · 3) = ___ · ___ = ___

• 26 · 5 = ___
26 · 5 = (26 : 2) · (5 · 2) = ___ · ___ = ___

• 25 · 8 = ___
25 · 8 = (25 · 4) · (8 : 4) = ___ · ___ = ___

2 Попуни табелу:

a	40	20	2	4
b	5	10	100	50
a·b				

Шта уочаваш?
____
____

• На основу ових примера уочавамо:

Допуни реченицу одговарајућим речима.

Производ два броја се неће променити ако један чинилац ______________, а други ______________ исти број пута.

Ово својство се назива **сталност производа**.

Пример 43: Сталност производа (Јоксимовић, Влаховић, 2016б: 42)

У Примеру 43 ученици се најпре усмеравају да уоче сталност производа на цртежима којима је сталност представљена. Наиме, дати производ је представљен путем одговарајућег цртежа. На другом делу цртежа први чинилац је смањен, а други повећан два пута. Ученици се наводе да на основу цртежа уоче да ли се производ променио услед наведених промена чинилаца. Аутори, затим, наводе ученике да уоче сталност производа на одговарајућим примерима, тј. бројевним једнакостима. Полазећи од почетне једнакости врши се промена обају чинилаца на начин да се један повећава, а други смањује исти број пута. Ученици се наводе да упоређују вредности полазног и новог израза на основу чега закључују о промени производа након промене чинилаца. На крају, аутори усмеравају ученике да посматрају податке дате у табели и уочавају одговарајуће промене на чиниоцима и производу. На основу претходног, допуњавајући започету реченицу, ученици се хеуристички воде до открића правила о сталности производа.

Алгебарски садржаји који су изучавани од првог до трећег разреда основне школе, у четвртом разреду се утврђују и проширују на скуп природних бројева.

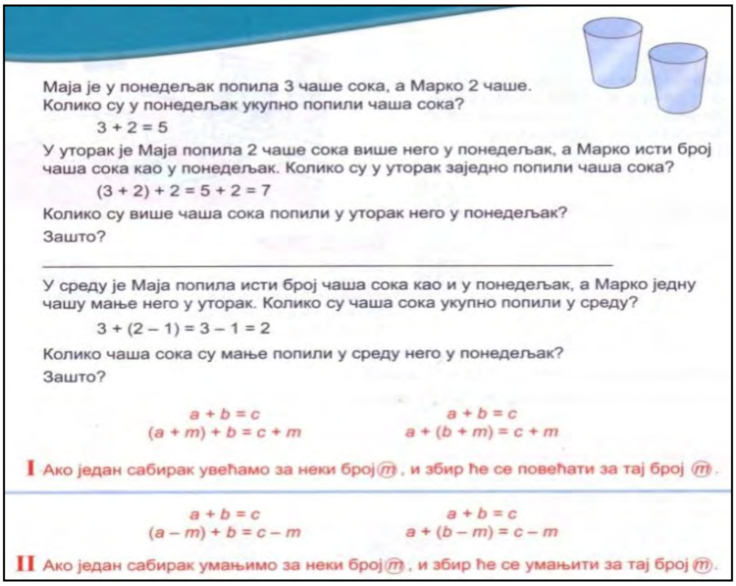
Анализа садржаја уџбеника математике за четврти разред указује на постојање разлика у приступу којим се уводе алгебарски садржаји. Већина садржаја алгебре у уџбеницима издавачких кућа *Бигз и Креативни центар* уводи се искључиво путем задатака који упућују ученике на откривање нових појмова, правила итд. који иначе одређују приступ учења путем открића. С друге стране, у уџбеницима издавача *Klett* овим приступом су уведена само два (14,3%) од 14 садржаја (Табела 67).

Заступљеност задатака-садржаја који иницирају учење путем открића у уџбенику издавачке куће *Нови Логос* јесте 23%, док су у уџбенику издавачке куће *Едука* нешто мање од половине алгебарских садржаја (47%) уведени приступом који се заснива на учењу путем открића. Дакле, у двама уџбеницима (*Нови Логос* и *Klett*), при увођењу алгебарских садржаја доминира приступ по коме се садржаји уводе рецептивним учењем (Табела 68).

Табела 68. *Заступљеност облика учења у формирању алгебарских појмова у уџбеницима математике за четврти разред основне школе*

Уџбеници	*Четврти разред*					
	Учење путем открића		*Рецептивно учење*		*Остали облици учења*	
	f	%	*f*	%	*f*	%
Едука	8	47%	9	53%	0	0%
Креативни центар	7	70%	2	20%	1	10%
Нови Логос	3	23%	8	61,6%	2	15,4%
Klett	2	14,3%	10	71,4%	2	14,3%
Бигз	7	70%	2	20%	1	10%
Укупно	27	42,2%	31	48,4%	6	9,4%

Наводимо пример заснован на учењу путем открића из анализираног уџбеника математике за четврти разред.


Маја је у понедељак попила 3 чаше сока, а Марко 2 чаше.
Колико су у понедељак укупно попили чаша сока?
$3 + 2 = 5$
У уторак је Маја попила 2 чаше сока више него у понедељак, а Марко исти број чаша сока као у понедељак. Колико су у уторак заједно попили чаша сока?
$(3 + 2) + 2 = 5 + 2 = 7$
Колико су више чаша сока попили у уторак него у понедељак?
Зашто?

У среду је Маја попила исти број чаша сока као и у понедељак, а Марко једну чашу мање него у уторак. Колико су чаша сока укупно попили у среду?
$3 + (2 - 1) = 3 - 1 = 2$
Колико чаша сока су мање попили у среду него у понедељак?
Зашто?

$a + b = c$ $\quad$ $a + b = c$
$(a + m) + b = c + m$ $\quad$ $a + (b + m) = c + m$

I Ако један сабирак увећамо за неки број m, и збир ће се повећати за тај број m.

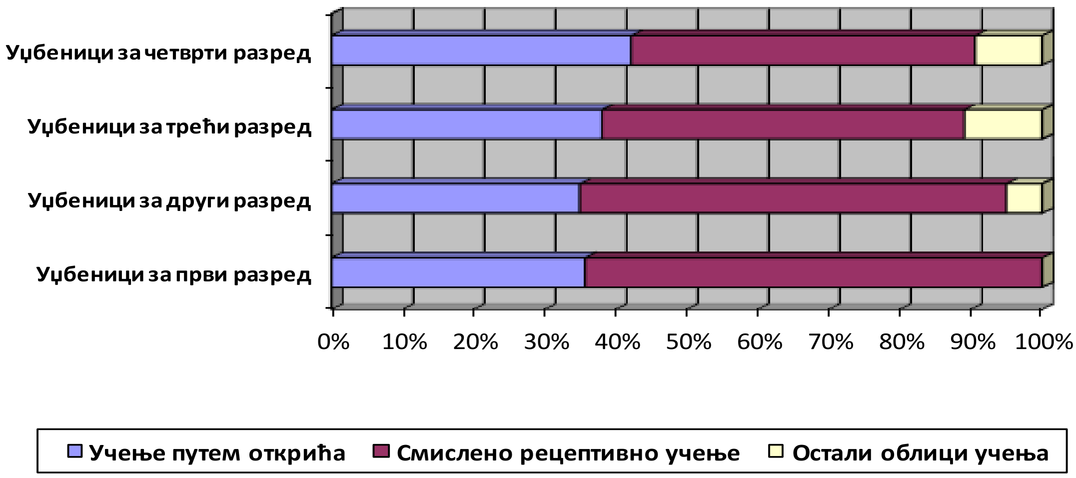
$a + b = c$ $\quad$ $a + b = c$
$(a - m) + b = c - m$ $\quad$ $a + (b - m) = c - m$

II Ако један сабирак умањимо за неки број m, и збир ће се умањити за тај број m.

Пример 44: Зависност збира од промене сабирака (Максимовић, 2016а: 90)

У Примеру 44 аутор уводи правило о зависности збира од промене сабирака креирањем реалне ситуације која имплицитно одсликава зависност збира услед промена сабирака. Наиме, полазну ситуацију са укупним бројем чаша сока које су попили Маја и Марко аутор модификује на начин да најпре повећава број чаша сока које је попила девојчица, а потом смањује број чаша сока које је попио дечак. У обама случајевима треба израчунати укупан број чаша које су заједно попили дечак и девојчица. На основу ових ситуација ученици се воде да открију по ком правилу се променом једног од сабирака мења збир. На крају, врши се математизација датих ситуација, при чему се реална ситуација генерализује алгебарском нотацијом.

Напослетку, када се посматра допринос анализираних уџбеника математике у функцији учења алгебарских садржаја путем открића (Графикон 14), може се уочити да тој функцији највише доприносе уџбеници четвртог разреда, затим уџбеници за трећи разред, а најмање уџбеници другог разреда.



Графикон 14. *Заступљеност облика учења у формирању алгебарских појмова у уџбеницима математике по разредима*

Добијени резултати показују да у анализираним уџбеницима доминира експозиторно излагање садржаја, тј. приступ при коме се на почетку наставне јединице знања експлицитно излажу без неких посебних захтева. Посматрано у односу на укупан број свих анализираних задатака, можемо констатовати да у уџбеницима математике за прва четири разреда просечно трећина задатака ствара основу за учење путем открића. Дакле, у уџбеницима математике у разредној настави постоје задаци који упућују ученике на самостално откривање садржаја који се учи и тако стварају основу за учење путем открића, али је њихова заступљеност недовољна. Стога закључујемо да уџбеници не обезбеђују у довољној мери услове за учење алгебарских садржаја путем открића, што је у складу са нашом полазном претпоставком.

Добијени резултати анализе уџбеника делимично потврђују виђење проф. Влаховића који истиче да је уџбеник, који је данас у употреби „...у служби позитивистичког, објективистичког, односно инструкционистичког концепта наставе/учења. То је решење које ученика држи у позицији пасивног примаоца туђих мисли, са разумевањем или не“ (Влаховић, 2009: 1092).

Резултати анализе могу помоћи ауторима уџбеника како би пронашли решења за концепирање уџбеника у којима би били заступљенији садржаји који ће упућивати ученике на самостално откривање нових појмова и иницирати закључке.

4. МИШЉЕЊА УЧЕНИКА О НАСТАВИ АЛГЕБРЕ ОРГАНИЗОВАНОЈ ПРИМЕНОМ УЧЕЊА ПУТЕМ ОТКРИЋА НА ДИФЕРЕНЦИРАНИМ САДРЖАЈИМА

Како бисмо потпуније сагледали ефекте примене учења путем открића на диференцираним садржајима алгебре, желели смо да испитамо и мишљења ученика експерименталне групе о вредностима примењеног начина реализације алгебарских садржаја. Циљ је био да испитамо следеће: 1) ставове ученика према учењу садржаја на овакав начин у односу на традиционалне часове; 2) како ученици самоперципирају положај и напредак у учењу садржаја алгебре путем открића; 3) да ли су ученици заинтересовани и мотивисани за учење путем открића на диференцираним садржајима; 4) шта су предности и недостаци учења путем открића на диференцираним садржајима алгебре према мишљењу ученика.

С обзиром на то да је нови начин рада приликом обраде алгебарских садржаја „другачији“ од дотадашњег, било је нарочито важно испитати мишљења и утиске ученика након реализације експерименталног програма. Претпоставили смо да ученици који су учили по експерименталним моделима учења имају позитивно мишљење о учењу садржаја алгебре путем учења путем открића на диференцираним садржајима исказивањем великог интересовања и мотивације за учење математичких садржаја на овај начин.

Утврђивање мишљења ученика о реализацији наставе математике применом учења путем открића на диференцираним садржајима значајно је јер се на основу њих могу развити адекватни начини даљег долажења до сазнања, усавршавања и осавремењивања наставе математике, као и подстицања ученика за проучавање наставних садржаја математике.

Учениково задовољство учењем путем открића на диференцираним садржајима

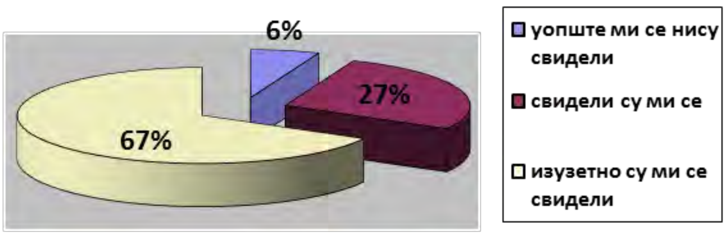
Мишљења ученика према настави математике организованој путем открића на диференцираним садржајима приказана су табеларно (Табела 69). Овај део анкетног упитника су чинила питања о томе колико су се ученицима свидели часови на којима су учили путем открића, о интересантности оваквог начина рада, о учесталости учења путем открића пре реализације експерименталног програма и о тежини усвајања садржаја на овај начин.

Табела 69. *Учениково задовољство учењем путем открића на диференцираним садржајима*

Питање	*Понуђени одговори*	*f*	*%*
Колико су ти се свидели овакви часови на којима си учио путем открића?	уопште ми се нису свидели	8	6%
	свидели су ми се	36	27,1%
	изузетно су ми се свидели	89	66,9%
Да ли је учење помоћу откривања занимљивије од „уобичајеног" рада на часу математике?	није занимљивије	11	8,2%
	исто је	5	3,7%
	занимљивије је	36	27,1%
	много је занимљивије	81	61%
Колико често сте раније учили путем открића на часовима математике?	никад нисмо учили на тај начин	64	48%
	понекад смо учили на овакав начин	69	52%
	често смо учили на овакав начин	/	/
Када сте на претходним часовима математике садржаје учили путем открића, учење ти је било	лако	99	74,4%
	тешко	34	25,6%
	исто као и на досадашњим часовима	/	/

Да бисмо утврдили општи утисак ученика о усвајању математичких садржаја путем учења путем открића, поставили смо им питање: *Колико су ти се свидели часови на којима си самостално откривао нове појмове, правила итд?* на које су се изјашњавали заокруживањем једног од понуђених одговора.

Структура одговора на ово питање приказана је на Графикону 15.

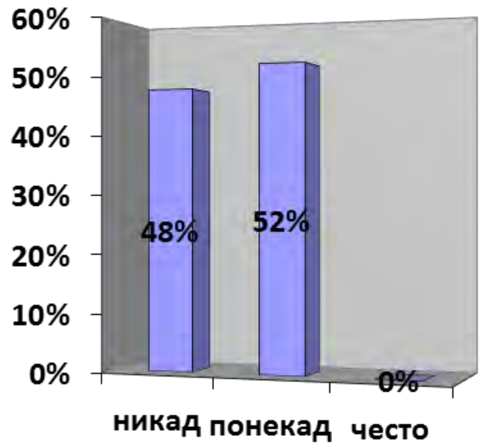


Графикон 15. *Дистрибуција одговора на питање*: *Колико су ти се свидели часови на којима си самостално откривао/ла нове појмове, правила итд?*

Са графикона се уочава да се највећем броју ученика допао овакав начин рада, тј. да имају позитиван утисак. Наиме, највећи број ученика, 89 или 66,9%, одговорио је да им се изузетно свидео овакав начин рада, њих 36 или 27,1% изјаснило се да им се овакав начин рада свидео, док је занемарљивих 8 или 6% ученика истакло негативан однос, тј. означили су да им се овај начин рада уопште није свидео. Задовољни смо оваквим доминантно позитивним утиском ученика, поготово ако се има у виду чињеница да пријатна атмосфера у процесу учења доприноси стицању трајнијих знања.

Да је учење путем открића на диференцираним садржајима ученицима занимљивије од „уобичајеног“ рада на часу математике, потврђују њихови одговори на друго питање. Чак 81 или 61% њих одговорио је да је учење на нови начин много занимљивије, 36 или 27,1% сматра да је овакав начин рада занимљивији, а само мањи број ученика, 11 или 8,2%, мисли да нови начин рада није занимљив, док 5 или 3,7% њих сматра да је подједнако занимљив као и уобичајени начин рада. На основу овакве структуре одговора посредно закључујемо да су ученици били мотивисани за овакав начин рада. Негативни одговори малог броја ученика могли би да се објасне неадекватним предзнањима и недовољном оспособљеношћу ученика за ефикасно перципирање, анализу, решавање проблема и извођење закључака, тачније за самостално учење. Узимајући у обзир одговоре учитеља да су у досадашњем раду ретко примењивали учење путем открића, као и било које друге облике активног учења, и да су повремено прилагођавали наставу према могућностима ученика, закључујемо да се реализација садржаја у првим трима разредима одвијала углавном применом вербално-рецептивних метода рада и фронталним излагањем учитеља, што оправдава недовољну оспособљеност ученика за самостално учење и негативан став према променама уобичајеног начина рада, тј. иновацијама. С друге стране, висок проценат заинтересованих ученика којима је учење путем открића на диференцираним садржајима алгебре било занимљиво може се сматрати добрим резултатом. Овакви одговори ученика потврђују да смо на сигурном путу да одбранимо став да учење путем открића треба бити заступљеније у васпитно-образовном раду.

Пошто нас је занимало колико је учење путем открића заступљено у школској пракси, питали смо ученике: *Колико често сте раније учили путем открића на часовима математике?* (Графикон 16) Нешто више од половине свих анкетираних ученика (69 или 52%) одговорило је да су, пре експерименталног програма, математичке садржаје понекад изучавали путем открића, док се 64 или 48% ученика изјаснило да никад нису усвајали математичке садржаје путем учења путем открића. Занимљиво је истаћи да ниједан ученик није одговорио да је овај облик учења често примењиван на часовима математике. Дакле, упркос предностима, потврђеним истраживањима бројних аутора (Yurniwati & Hanum, 2017; Khasanah et al., 2018; Baroody, Eiland & Purpura, 2013; Balim, 2009; Putriani & Rahayu, 2018; Sihombing, Singaga & Mukhtar, 2017) који су доказали да се квалитет стечених знања и боља образовна постигнућа ученика могу поспешити учењем путем открића, овај облик учења се још увек недовољно примењује у почетној настави математике. Структура одговора ученика на ово питање у складу је са одговорима учитеља о учесталости примене учења путем открића, који су истакли да у раду веома ретко примењују овај облик учења, јер немају, како истичу, адекватне стручне компетенције за припрему и реализацију овог облика наставног рада.

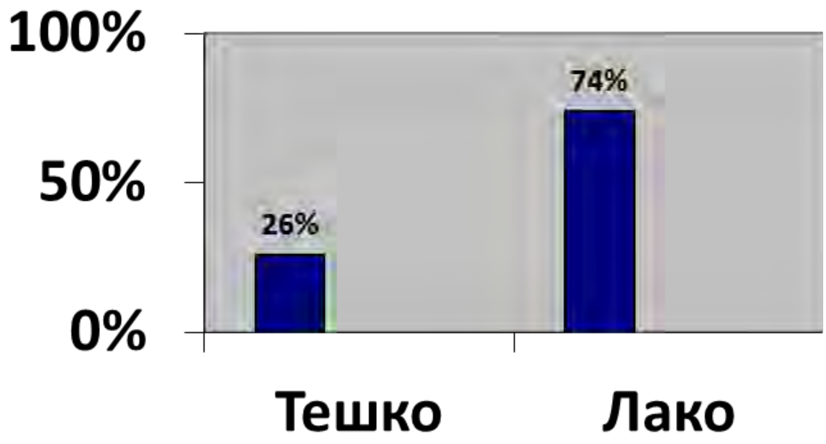


Графикон 16. *Дистрибуција одговора на питање: Колико често сте раније учили путем открића на часовима математике?*

Одговори ученика на питање о тежини усвајања садржаја указују на то да је већини њих (99 или 74,4%) учење алгебарских садржаја учењем путем открића било *лако*. Само 34 ученика, што чини 25,6% анкетираних, одговорила су да им је овај начин усвајања садржаја био *тежак*. С обзиром на то да усвајање знања учењем путем открића захтева самостално откривање нових појмова, правила, образаца итд, што подразумева максималну активност и ангажовање виших сазнајних функција ученика, претпостављамо да су ученици који су овај начин рада окарактерисали као тежак управо ученици којима је једноставније и лакше да механички усвајају „готова“ знања уместо да их активно конструишу, што се поново може објаснити недовољном заступљеношћу метода које подразумевају самостално стицање знања у свакодневној наставној пракси. Преокрет из традиционализма и шаблона је прилично постепен, компликован и дуготрајан процес, па је за значајнији напредак од пасивног ка активном учењу потребно поступно и систематски припремати ученике.

Међутим, оно што у истраживању нисмо узели у обзир јесте когнитивни стил ученика, а тиме бисмо можда дошли до прецизнијег сазнања зашто је појединим ученицима овакав начин учења био тежак. Имајући у виду чињеницу да ученицима са различитим когнитивним стиловима одговарају различите стратегије учења, један од предуслова успешног учења јесте уважавање когнитивног стила и стила учења ученика и усклађивање метода и садржаја са тим (Husarić, 2011). Стога би било корисно да се у неким предстојећим истраживањима укључе и ове варијабле.

Графикон 17 указује на утиске ученика везане за тежину савладавања градива применом учења путем открића на диференцираним садржајима.



Графикон 17. *Дистрибуција одговора на питање: Када сте на претходним часовима математике садржаје учили путем открића, учење ти је било...*

Посматрано обједињено, на основу приказаних налаза, закључујемо да су мишљења ученика о учењу садржаја алгебре применом учења путем открића на диференцираним садржајима углавном позитивна – већини ученика су часови осмишљени и реализовани на овај начин интересантни и изузетно су им се свидели, овај начин рада им није био тежак, иако је већина њих пре експерименталног програма само понекад или никад није учила путем открића.

Ученикова самопроцена постигнића и положаја у процесу учења путем открића на диференцираним садржајима

Да бисмо утврдили како ученици самоперципирају положај, напредак у постигнућу, разумевање усвојених знања, као и активност у процесу учења садржаја алгебре путем открића, поставили смо им питања чије смо одговоре приказали у Табели 70.

Табела 70. *Ученикова самопроцена постигнића и положаја у процесу учења путем открића на диференцираним садржајима*

Питање	*Понуђени одговори*	*f*	*%*
Приликом учења математичких садржаја путем открића био/ла сам:	веома активан/а и самостално сам долазио/ла до нових сазнања	119	89,4%
	подједнако активан/а као и на свим часовима математике до тада	14	10,5%
	мање активан/а него на осталим часовима математике	/	/
Учење математике путем открића ми је помогло да:	боље разумем градиво из математике	121	91%
	подједнако разумем градиво као и на свим часовима математике до тада	12	9%
	мање разумем градиво него до тада	/	/
Коју оцену би себи дао/ла за знање које си стекао/ла учећи путем открића?	одличан – 5	65	48,8%
	врлодобар – 4	42	31,5%
	добар – 3	26	19,5%
	довољан – 2	/	/
	недовољан – 1	/	/
Задаци за откривање појмова, правила итд. и за увежбавање са материјала за самостално учење за тебе су били:	изузетно тешки	9	6,7%
	мало тешки	49	36,8%
	нису били тешки	63	47,5%
	веома лаки	12	9%

У циљу сагледавања мишљења ученика о свом ангажовању, тј. самосталној активности, када се ново градиво из математике реализује учењем путем открића на диференцираним садржајима, била су им постављена питања о томе колико су били активни на овим часовима и да ли су самостално долазили до нових знања. Чак 119 или 89,4% ученика истиче да су активно и самостално стицали нова сазнања, а само 10,5% ученика истиче да је њихова активност на експерименталним часовима математике била подједнака као и до тада.

Иако овакви одговори, можда, представљају субјективну процену ученика, чињеница је да већина њих запажа своју активност на часовима, и свесни су своје самосталности приликом усвајања знања. Имајући то у виду, учитељи би требало да чине све напоре да више афирмишу самосталну активност ученика, тј. да чешће обезбеђују учешће ученика у наставним активностима, све са циљем повећања ефикасности наставе математике.

Како бисмо испитали мишљење ученика о разумевању и квалитету знања о садржајима алгебре која су усвојена учењем путем открића, поставили смо им питање: *Колико ти је учење путем открића помогло да разумеш градиво из математике?* Скоро сви ученици (121 или 91%) истакли су да су усвајањем садржаја по експерименталном моделу учења боље разумели градиво, а преосталих 12 или 9% ученика одговорило је да су подједнако разумели градиво као и на свим ранијим часовима математике.

Одговори ученика на питање: *Којом бисте оценом оценили своје знање стечено учењем путем открића?* потврђују да ученици сматрају како су стекли квалитетна знања и да би ова знања била оцењена високим оценама. Највећи проценат ученика се изјаснио да би добио оцену одличан (5) – 65 или 48,8%, мањи део (42 или 31,5%) оцењује стечено знање оценом врлодобар (4), док најмањи број (26 или 19,5 %) сматра да би добио оцену добар (3). Ниједан ученик се није изјаснио да би добио оцену довољан (2) или недовољан (1), што само потврђује да су добро разумели градиво.

Одговори ученика на претходна два питања очекивани су и можемо их повезати са одговорима на пето питање у анкети. С обзиром на то да су ученици максимално били активни током усвајања градива и самостално долазили до нових знања, објашњиво је што су градиво разумели и самим тим стекли квалитетно знање.

Садржаји обухваћени експерименталним програмом били су диференцирани на три нивоа сложености (основни ниво, средњи ниво и напредни ниво). Сваки ученик је у складу са својим знањима, способностима и могућностима добијао садржаје одговарајућег нивоа. Питали смо ученике шта они мисле о садржајима и задацима који су обухваћени експерименталним програмом. 49 ученика или 36,8% њих одговорило је да су задаци били мало тешки, а 63 ученика (47,5%) су одговорила да задаци нису били тешки. Претпостављамо да је овакав проценат ученика којима су задаци били мало тешки због тога што су наставни листићи за самостално утврђивање, осим задатака предвиђених за конкретни ниво сложености, садржали и одређени број задатака који одговарају наредном, вишем нивоу. Само 9 ученика (6,7%) одговорило је да су задаци били изузетно тешки, док се 12 ученика или 9% њих изјаснило да су задаци били веома лаки.

Генерално посматрано, оваква дистрибуција одговора потврђује да су захтеви били одмерени у складу са способностима ученика па је свако од ученика могао да одговори на део захтева, што омогућава индивидуални напредак и развој сваког од њих.

Резултати показују да ученици запажају своју активност у процесу учења путем открића на диференцираним садржајима, при чему стичу знања са разумевањам и та знања оцењују као квалитетна, будући да већина њих сматра да би добили високе оцене ако би били оцењивани.

Заинтересованост и мотивисаност ученика за учење путем открића на диференцираним садржајима

Анкетирањем смо желели да утврдимо и колико учење путем открића утиче на мотивацију и заинтересованост ученика за овај облик рада на часовима математике и других наставних предмета. Одговоре ученика на питања којима смо желели то да утврдимо представили смо у Табели 71.

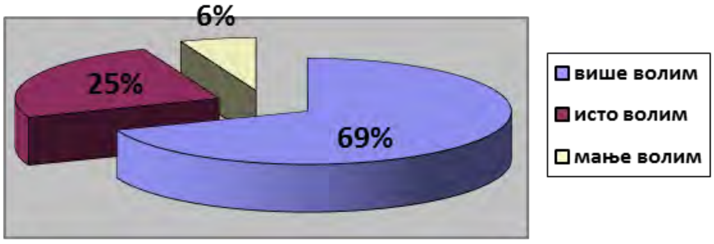
Табела 71. *Заинтересованост и мотивисаност ученика за учење путем открића на диференцираним садржајима*

Питање	*Понуђени одговори*	*f*	*%*
Садржаје из математике би овако волео/ла да учиш:	на сваком часу	87	65,4%
	понекад	32	24,1%
	никад	14	10,7%
Учење путем открића је утицало да математику:	више волиш	92	69,2%
	исто волиш	33	24,8%
	мање волиш	8	6%
Да ли би волео/ла да и градиво из других предмета учиш путем открића?	волео/ла бих	114	85,7%
	не бих волео/ла	/	/
	не знам	19	14,3%

О заинтересованости ученика за учење математике на овај начин показују одговори на питање: *Садржаје из математике би овако волео/ла да учиш...* Структура одговора указује на то да би највећи број анкетираних ученика (87 или 65,4%) волео да овај метод учења буде заступљен на сваком часу математике, 24,1% њих би волео да овако ради понекад, док је најмањи број ученика (14 или 10,5%) одговорио да им поменути начин рада не одговара.

Број ученика који *никада* не би волели да на часовима математике буде заступљено учење путем открића јесте очекиван, јер се претпоставља да су то ученици којима је учење математичких садржаја на овај начин било тешко.

Структура одговора на претходно питање објашњава повећану мотивисаност ученика за учење математике, јер су се чак 69,2% ученика изјаснила да је учење путем открића утицало да математику више воле него до тада. 24,8% испитаника, што је укупно 33 ученика, одговорило је да учење путем открића није утицало на то да они математику више заволе, већ је воле исто као и до тада, а 8 њих (6%) одговорило је да након учења путем открића метематику мање воли.



Графикон 18. *Дистрибуција одговора на питање: Учење путем открића утицало је да математику...*

Одговори ученика на питање: *Да ли би волео/ла да и градиво из других предмета учиш путем открића?* потврђују мотивисаност ученика за примену овог модела рада и на градиво из других наставних предмета. Велики проценат (85,7%) ученика би волео да и градиво из других предмета учи путем открића, док су 14,3% ученика заокружила одговор *не знам* и тиме исказала своју неодлучност поводом овог питања.

Резултати анкетирања потврђују нашу претпоставку да ученици изражавају позитивно мишљење о настави алгебре организованој применом учења путем открића на диференцираним садржајима, позитивно прихватају овај облик организације учења на часовима математике и волели би да је овај вид учења чешће заступљен и на часовима других наставних предмета. Осим тога, оваква методичка организација часа је утицала да већина ученика више заволи математику.

Мишљења ученика о предностима и недостацима учења путем открића на диференцираним садржајима алгебре

Питањима отвореног типа (последња два питања у упитнику) желели смо да сазнамо шта се то ученицима допало и шта им се није свидело у току реализације часова математике на којима су алгебарски садржаји обрађени учењем путем открића на диференцираним садржајима.

Одговоре које смо добили приказали смо у табелама 71 и 72, при чему смо сличне одговоре груписали у категорије. У категорију *Лични одговор* сврстали смо одговоре ученика које никако нисмо могли да подведемо под неку од постојећих категорија.

Одговори ученика на питање шта им се највише допало у току учења путем открића на диференцираним садржајима приказани су у Табели 72 и поређани су према учесталости.

Табела 72. *Расподела одговора на питање – Шта ти се допало када си садржаје из математике учио/ла путем открића?*

Одговори	*Фреквенција*	*%*
Све ми се допало	51	38,3%
То што сам сам/а изводио/ла закључке и учио/ла	37	27,8%
Боље сам разумео/ла и упамтио/ла градиво	21	15,7%
То што смо учили лекције део по део	18	13,5%
Лични одговор	6	4,5%

Из табеле уочавамо да је најфреквентнији одговор ученика био да им се на претходно реализованим часовима математике све допало (38,3%). На другом месту са 27,8% одговора ученици позитивно оцењују то што су сами изводили закључке и учили. Ученицима се допало и то што су боље раумели и упамтили градиво (15,7%) и што су лекције изучавали део по део (13,5%). Одговори мањег броја ученика (4,5%) сврстани су у категорију „Лични одговор".

Оно што ученици виде као недостатак овог облика рада и што су перципирали као проблем, тј. елементе оваквог начина рада које ученици негативно оцењују, представили смо у Табели 73.

Табела 73. *Расподела одговора на питање – Шта ти се није допало када си садржаје из математике учио/ла путем открића?*

Одговори	*Фреквенција*	*%*
Не постоји ништа што ми се није допало	52	39,1%
Поједини часови математике су трајали дуже	31	23,3%
То што је учитељица била мало ангажована (То што нам је учитељица само мало помагала)	25	18,8%
То што морам много да размишљам	17	12,8%
То што су поједини задаци за мене били тешки	8	6%

Подаци из табеле показују да је највећи проценат ученика (39,1%) експлицитно негирао да овакав начин учења има недостатке.

Већина часова експерименалног програма је трајала дуже од уобичајених 45 минута како би ученици са свих трију нивоа могли да известе о закључцима које су извели. 23,3% ученика су то перципирала као недостатак овакве организације рада.

18,8% ученика је одговорило да им је засметало то што им је учитељица мало помагала у току рада. Како помоћ ученицима треба пружити само понекад, када за то постоји потреба, јер претерано уплитање учитеља у процес открића и прерано изношење закључака доводи до тога да ученици само привидно самостално долазе до сазнања, овакав одговор ученика само потврђује да су учитељи-реализатори искусно водили ученике кроз откривајуће активности.

12,8% ученика је навело да им се није допало то што су морали много да размишљају. Претпостављамо да се ради о истим ученицима који су се изјаснили да је овакав начин учења за њих био тежак. С друге стране, пошто у овом истраживању нисмо издвојили одговоре по успеху ученика, постоји могућност да се ради о ученицима који имају нижу оцену из математике.

Незнатан број ученика (6%) истакао је да им се није допало то што су поједини задаци за њих били тешки. Вероватно се ради о задацима са наставних листића за утврђивање који одговарају вишем нивоу сложености у односу на ниво коме ученик припада.

Посматрано сумативно, резултати анкете потврђују позитивно мишљење ученика о усвајању садржаја из математике применом учења путем открића на диференцираним садржајима. Иако је мали проценат ученика овај начин рада оценио као тежак и захтеван, највећем броју ученика су часови организовани путем открића били интересантни, а већина би волела да је оваква организација учења чешће заступљена у настави математике. Ученици запажају повећану активност током учења на поменути начин и градиво им је тада јасније, па су самим тим стечена знања квалитетнија. Дакле, ученици позитивно доживљавају овај начин рада на часовима математике, чиме је наша хипотеза потврђена.

Одговори наших испитаника несумњиво упућују на закључак да овакав приступ у учењу алгебарских садржаја позитивно делује на заинтересованост ученика за садржаје који се изучавају и доприноси формирању позитивних ставова ученика према овом моделу рада, као и повећању мотивације за учење. С обзиром на позитиван утицај овог модела учења на ученике са свих нивоа постигнућа, требало би подстицати учитеље да га чешће користе у настави математике.

5. МИШЉЕЊА УЧИТЕЉА О МОГУЋНОСТИМА И ЗНАЧАЈУ ПРИМЕНЕ УЧЕЊА ПУТЕМ ОТКРИЋА НА ДИФЕРЕНЦИРАНИМ САДРЖАЈИМА АЛГЕБРЕ

У циљу евалуације експерименталног модела учења било је значајно, поред мишљења ученика, сагледати и мишљења учитеља, непосредних реализатора програма, будући да су они били директно ангажовани у реализацији истог. Зато смо, по завршетку реализације предвиђених наставних јединица, организовали са учитељима-реализаторима фокус групни интервју на коме је било речи о евалуацији примењеног програма. Поштујући стручно искуство учитеља, било је значајно да размотримо њихово мишљење о имплементираном експерименталном моделу и на тај начин потпуније сагледамо општу слику о могућностима и значају примене учења путем открића на диференцираним садржајима алгебре. Иако је узорак учитеља-реализатора експерименталног програма мали, што ограничава могућности генерализације података, испитивање путем фокус групног интервјуа пружа основ за продубљено и свестраније сагледавање мишљења и утисака учитеља о откривајућем учењу и функционалном повезивању овог облика учења са диференцијацијом садржаја у настави математике.

Групна дискусија је реализована у просторијама Педагошког факултета у Врању и трајала је око један час. Структуирани разговор са учитељима је вођен према унапред припремљеном водичу за разговор, који се односи на следеће аспекте:

• утисци и искуства учитеља о могућностима примене и захтевности реализације наставних јединица заснованих на учењу путем открића на диференцираним садржајима;

• мишљење учитеља о позитивним ефектима реализације наставних јединица заснованих на учењу путем открића на диференцираним садржајима;

• мишљење учитеља о предностима и ограничењима примене овакве организације часова.

Истраживач је разговор са учитељима снимио, о чему их је претходно обавестио.

Утисци учитеља о могућностима примене и захтевности реализације наставних јединица заснованих на учењу путем открића на диференцираним садржајима

Учење путем открића поставља ученика у центар наставног процеса, као активног субјекта који самостално открива, истражује и решава проблеме. Улога учитеља такође је активна, али за разлику од традиционалног приступа, учитељ је овде пре свега мотиватор и фацилитатор процеса учења. Ово подразумева да је учитељ стручан, те да добро познаје могућности и способности ученика. Учитељ фацилитира и подупире истраживање ученика тако што прати његов рад на проблему, указује му на грешке и даје сугестије за њихово превазилажење. Од једнаког значаја јесте и стратешко селектовање и презентовање садржаја и примера, у складу са развојним могућностима ученика, што подразумева добру методичку припрему учитеља. Примећујемо да се у наставној пракси учење путем открића ретко користи, што се може разумети у контексту високих захтева које овакав начин организовања наставе поставља пред учитеља.

С обзиром на то да нас је интересовало какво је чињенично стање у пракси, тј. да ли ово наше запажање важи и за учитеље-реализаторе, питали смо их да ли су раније и у којој мери примењивали учење путем открића на часовима математике. Један учитељ је одговорио да је повремено примењивао, три су се изјаснила да су примењивала врло ретко, док је један учитељ одговорио да у свом раду никад није примењивао учење путем открића. Образлажући разлоге недовољне примене учења путем открића, већина учитеља је истакла да веома ретко примењује овај облик учења зато што нема адекватне стручне компетенције за припрему и реализацију истог, тј. нису довољно теоријски и практично упознати са суштином овог облика рада.

Имајући у виду чињеницу да је свако дете посебна индивидуа и узимајући у обзир да од учитељевог начина презентовања градива умногоме зависи то како ће ученици разумети и усвојити нове садржаје, од значаја је било да испитамо да ли и са којом учесталошћу учитељи прилагођавају наставу и рад потребама и могућностима ученика.

Учитељи су навели да су у досадашњој наставној пракси повремено прилагођавали наставу према могућностима ученика. Такође, истакли су да се труде да прилагоде наставу могућностима ученика кад год то могу, али услед тешке и дуге припреме за час у систему диференциране наставе и уз преобиман наставни програм не успевају у томе често.

Поред тога, отежавајуће околности за прилагођавање наставе могућностима ученика јесу и превелик број ученика у одељењу, као и недостатак задатака са диференцираним захтевима у уџбеницима које користе. Овакви одговори учитеља су у складу са резултатима претходних истраживања (Маричић и Милинковић, 2015; Вуловић, 2011; Blair, 2014)

Већина учитеља-реализатора истиче да не прилагођава свој начин рада према свим ученицима, већ углавном према слабијим. Како је суштина диференцирања наставе у прилагођавању рада према свим ученицима или групама ученика, овакви одговори ученика указује да у њиховој наставној пракси нема потпуне диференцијације.

На питања о томе да ли се учење путем открића може успешно повезати са диференцијацијом садржаја у почетној настави математике и да ли су раније повезивали ове методске поступке, учитељи су одговорили да никада раније нису долазили на идеју да повежу ове облике учења, али им је искуство у реализацији експерименталног програма показало да се они могу успешно функционално повезивати у циљу квалитетне реализације наставе. Учитељи сматрају да је повезивање ових двају методских поступака добар начин да се излазећи у сусрет могућностима ученика они подстакну да активно уче и тиме се сваком ученику омогући да одговори на део захтева и научи градиво у складу са својим способностима. Узимајући то у обзир, учитељи су истакли да су им предложени модели припрема у оквиру експерименталног програма инспиративни и да ће им послужити као ваљана основа за планирање, припрему и реализацију и других садржаја из математике на овај начин.

Занимало нас је мишљење учитеља-реализатора о захтевности реализације наставних јединица у оквиру експерименталног програма. Учитељи су одговорили да је реализација часова путем учења путем открића на диференцираним садржајима захтевна, јер је у току реализације потребно посветити пажњу свакој подгрупи ученика.

Осим тога, потребно је добити повратну информацију о тачности решења и закључака са свих трију нивоа, што резултира недостатком времена у оквиру једног школског часа за реализацију предвиђене наставне јединице. Сличан утисак су стекли и када је у питању планирање наставног часа заснованог на овом облику наставног рада. Наиме, учитељи су приметили да је за припрему часа потребно много наставног материјала и умешност учитеља да изврши тачну и прецизну диференцијацију захтева по нивоима.

Мишљење учитеља о позитивним ефектима реализације наставних јединица заснованих на учењу путем открића на диференцираним садржајима

Следећи сегмент разговора се односио на мишљење учитеља о педагошким ефектима примене учења путем открића на диференцираним садржајима, при чему се под ефектима подразумева утицај овог облика рада на квалитет и трајност знања ученика, мотивацију и активност током учења.

Основни предуслов успешног учења јесте мотивација ученика. Мотивисани и заинтересовани ученици лакше се активирају на часу, чиме се повећава и степен мисаоног ангажовања у процесу учења. Такође, „тако научено наставно градиво је трајније, смисленије и употребљивије" (Дракулић и Миљановић, 2010: 220). Питањем о мотивацији ученика за учење путем открића на диференцираним садржајима желели смо утврдити мишљење учитеља-реализатора засновано на стеченом искуству применом овакве организационе мере у настави. Сви учитељи су приметили да су ученици прилично узбуђени приликом учења путем открића и да овај начин рада делује врло мотивационо на њих. Према речима учитеља, ученици су посебно били мотивисани за учење и улагање напора када су радили задатке који су били нешто изнад њихових могућности на часу утврђивања. Том приликом је био приметан већи степен задовољства ученика при успешно обављеном захтеву.

Већина учитеља процењује да је учење путем открића на диференцираним садржајима омогућило већу самосталност ученика у процесу сазнања, за разлику од класичног начина учења. Самосталним откривањем ученици су били подстакнути на већу мисаону активност и ангажовање током часова. Тиме је обезбеђена и већа динамичност наставе математике, а процес учења је постао продуктиван. Дакле, учитељи су уочили повећану активност ученика током експерименталних часова, као и већу мотивацију ученика за учење. Овакви одговори учитеља су поткрепили ставове које су ученици истакли у анкети.

Учитељи су запазили да је процес диференцираног стицања знања путем учења путем открића на истим садржајима почетне наставе математике, али са различитим нивоом сложености захтева, оптимално прилагођен индивидуалним разликама међу ученицима, што је утицало на напредовање сваког ученика у погледу образовних постигнућа. Захваљујући томе, како је констатовао један од учитеља, омогућено је ефикасније праћење и објективније оцењивање ученика. Осим тога, учење на овај начин, према мишљењу учитеља, омогућује бољу контролу ученика над сопственим напредовањем.

Сви учитељи су сагласни да самостално откривање утиче на ефикасно примењивање наученог у другим ситуацијама, тј. обезбеђује бољи трансфер знања на нове садржаје. Оваква тврђења су поткрепили навођењем примера где су ученица алгебарске садржаје, обрађене у оквиру експерименталног програма, успешно примењивали приликом решавања задатака из других тематских области. Што се тиче трајности знања, већина учитеља истиче да још увек није прошло довољно времена како би проценили ефекте овакве организације учења на трајност знања. Међутим, узимајући у обзир начин на који су знања стечена, верују да ће овај вид учења утицати на трајније задржавање наученог.

Претходно изнета запажања учитеља-реализатора о ефектима примене учења путем отрића на диференцираним садржајима умногоме се поклапају са стручним налазима ефеката примене учења путем открића и диференцијације наставе, које смо пронашли у доступној релевантној литератури (Вуловић, 2011; Малешевић, 2011; Maarif, 2016; Kistian et al., 2017; Martaida et al., 2017 и др.).

Мишљење учитеља о предностима и ограничењима примене учења путем открића на диференцираним садржајима

Како бисмо добили потпунију слику о примењеном експерименталном моделу, желели смо да идентификујемо предности и добре стране учења путем открића на диференцираним садржајима које су учитељи уочили при реализацији експерименталног програма.

Изјашњавајући се о предностима ове организационе мере, учитељи наводе следеће: доприноси оспособљавању ученика за даље учење и развијању самосталности у стицању знања, прилагођеност захтева способностима ученика омогућава да се сваки ученик укључи у рад, ради оно шта може и постигне успех у томе, као и да научи градиво и напредује у складу са сопственим способностима; задаци на три нивоа сложености за увежбавање новоусвојених знања омогућавају учитељу бољи увид у напредовање сваког ученика и потпуније сагледавање квалитета усвојених знања, учитељи су били у прилици и да запазе одређене потешкоће у учењу појединих ученика.

Поред позитивних ефеката у примени учења путем открића на диференцираним садржајима, од учитеља смо тражили да наведу и евентуалне недостатке који би представљали препреку ефикасној реализацији овог облика рада.

С обзиром на то да су учитељи на почетку разговора истакли да је реализација наставних јединица у оквиру експерименталног програма захтевна, очекивано је да су имали потешкоће и проблеме при раду. Одговори учитеља указују да су се потешкоће углавном јављале због недостатка времена, тј. недовољно времена у оквиру једног школског часа за реализацију наставних једница, као и већег ангажовања и сложеније улоге учитеља, нарочито приликом пружања повратне информације.

Нека од ограничења у даљој примени оваквог начина рада, према речима учитеља, могла би бити сложена и захтевна припрема и организација таквих часова; недостатак материјалних средстава, тј. већа материјална улагања (учитељи наводе да је за реализацију часа потребно умножавање великог броја наставних листића за шта они немају могућност у школама у којима су запослени).

На питање да ли ће у даљем раду примењивати учење путем открића на диференцираним садржајима, сви учитељи су одговорили потврдно. Истакли су, такође, да верују да би и већина њихових колега радо примењивала овај вид учења, али да је неопходно упознати их са њим путем различитих облика стручног едуковања на којима би се детаљније упознали са организацијом и реализацијом ових часова, обезбеђивањем адекватне литературе и израдом угледних модела припрема. С обзиром на то да овакав концепт наставе прилично повећава и усложњава улогу учитеља, њихова заинтересованост за примену оваквог начина реализације часова у дањем раду прилично охрабрује.

Иако на основу података са фокус групног разговора са учитељима-реализаторима, због ограниченог узорка, не можемо да извршимо релевантније статистичке анализе, неоспорно је да су у погледу њихових процена ученици били ангажованији у процесу сазнања, мотивисанији за учење, и сваком од ученика је омогућено да научи градиво. Наиме, налази иду у прилог томе да је експериментални програм у погледу своје дидактичко-методичке ефикасности позитивно оцењен од стране учитеља реализатора, што је у складу са нашом полазном претпоставком. Ови резултати, и поред ограниченог узорка, могу бити индикативни за сагледавање могућности реализације и позитивних ефеката учења путем открића на диференцираним садржајима.

ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА И ИМПЛИКАЦИЈЕ ИСТРАЖИВАЊА

Класична предавачка настава, иако и даље доминантан наставни систем у образовању, суочава се са низом проблема и тешкоћа, а у савременој педагошкој науци се уочава потреба за развојем нових концепција учења са циљем превазилажења недостатака традиционалне школе. Једна од темељних замерки класичној настави односи се на доминантну предавачку функцију учитеља, услед чега преовлађују хијерархијски односи у стицању знања, при чему се не посвећује довољно времена за самосталне мисаоне активности ученика, нити се уважавају индивидуалне могућности ученика, због чега се смањује квалитет наставног процеса и његових исхода (Mandic, Lalic i Bandjur, 2010). Многобројне и веома рапидне промене које су одлика 21. века одражавају се у свим аспектима живота савременог човека, па тако и у области образовања. Кључна промена у образовном систему односи се на прелазак са класичне на савремену наставу која је тако осмишљена да одговара потребама модерног друштва – друштва знања.

Према препоруци америчког *Националног удружења наставника математике,* циљ наставе математике треба да буде развој ученичке способности за постављање хипотеза и истраживање, логичко закључивање и употребу знања из математике у решавању сложених, нерутинских проблемских ситуација (NCTM, 2000). Како би постављени циљеви наставе математике били остварени, неопходно је коришћење савремене методологије у наставном процесу, која подразумева да су ученици главни и активни учесници и истраживачи, који до знања долазе путем самосталног рада, док учитељи престају да буду само преносиоци и тумачи знања, већ постају ментори, сарадници и водичи ученика.

Имајући ово на уму, у настави математике је потребно у што већем степену примењивати учење путем открића, будући да се у оквиру овог методског поступка стварају услови у којима ће ученици, улажући сопствене мисаоне напоре, усвајати трајна и активна знања и развијати способности за примену тих знања. С друге стране, настава путем открића у математици мора да буде добро припремљена и прилагођена актуелним могућностима и способностима ученика, јер само презентовање математичког проблема и подстицање ученика да самостално трагају за решењем неће нужно довести до учења (Garelick, 2009). Тиме се потпуно задовољавају захтеви за диференцијацијом и индивидуализацијом наставног процеса.

Учење путем открића у настави математике, према бројним истраживањима, даје веома добре резултате (Yurniwati & Hanum, 2017; Khasanah et al., 2018; Baroody, Eiland & Purpura, 2013; Balim, 2009; Putriani & Rahayu, 2018; Sihombing, Singaga & Mukhtar, 2017, Малешевић, 2011 и други). С друге стране, разна истраживања указују на бројне проблеме и тешкоће у учењу и разумевању алгебарских садржаја на млађем школском узрасту (Kieran, 1981, 2004; Sfard & Linchevski, 1994; Filloy & Rojano, 1989; Knuth et al., 2006; Vergnaud, 1988, према: Carraher et al., 2006 и други).

Учење путем открића у настави математике, према бројним истраживањима, даје веома добре резултате (Yurniwati & Hanum, 2017; Khasanah et al., 2018; Baroody, Eiland & Purpura, 2013; Balim, 2009; Putriani & Rahayu, 2018; Sihombing, Singaga & Mukhtar, 2017, Малешевић, 2011 и други). Са друге стране, разна истраживања указују на бројне проблеме и тешкоће у учењу и размевању алгебраских садржаја на млађем школском узрасту (Kieran, 1981, 2004; Sfard & Linchevski, 1994; Filloy & Rojano, 1989; Knuth et al., 2006; Vergnaud, 1988, према: Carraher et al., 2006 и други). То имплицира неопходност промене у приступу овим садржајима и проналажењу ефикасног методичког поступка за успешно учење почетних алгебарских појмова. Имајући у виду то да до најквалитетнијих знања ученици долазе путем самосталне активности, при чему су садржаји и захтеви учења прилагођени индивидуалним могућностима ученика, дошли смо на идеју да осмислимо модел учења који се заснива на учењу алгебарских садржаја путем открића, при чему је материјал за учење структуиран на три нивоа сложености, односно, на фунционалном повезивању учења путем открића и диференцирања садржаја алгебре у почетној настави математике. Тачније, циљ нашег рада био је да утврдимо да ли се учењем путем открића на садржајима алгебре који су диференцирани на три нивоа сложености може утицати на напредовање сваког ученика у погледу образовних постигнућа, као и испитивање мишљења учитеља-реализатора о могућностима и значају који овакав начин учења пружа и анализирање мишљења и искуства ученика о настави алгебре организованој на поменути начин.

На основу педагошког експеримента који је спроведен на узорку од 261 ученика четвртог разреда, можемо извести следеће закључке:

1. Налази истраживања показују да се стратегијом учења путем открића на диференцираним садржајима алгебре позитивно утиче на побољшање укупног образовног постигнућа ученика. Осим тога, значајан напредак под утицајем овог методичког приступа утврђен је и код ученика на сваком од трију нивоа постигнућа. Тиме је потврђена једна од наших полазних претпоставки да ученици који уче *применом учења путем открића на диференцираним садржајима постижу боље постигнуће у савладавању алгебарских садржаја.*

Истраживање, дакле, потврђује ефикасност поменутог приступа у методичком обликовању алгебарских садржаја чинећи их разумљивијим за ученике у поређењу са обрадом ових садржаја путем класичне наставе.

2. Резултати истраживања потврђују позитивне ефекте учења путем открића на диференцираним садржајима на укупно постигнуће код свих ученика, без обзира на пол. Тиме је потврђена полазна претпоставка да не постоји статистички значајна разлика у образовним постигнућима између дечака и девојчица под утицајем учења путем открића на диференцираним садржајима алгебре.

3. Сви ученици, без обзира на општи успех који постижу у настави, под утицајем учења путем открића на диференцираним садржајима алгебре постигли су напредак у образовним постигнућима. Међутим, значајнији напредак под утицајем експерименталног фактора уочен је код ученика са бољим општим успехом. Овакви резултати су у складу са нашим полазним очекивањем.

4. Експериментални модел учења је допринео постизању бољих образовних постигнућа код свих група ученика формираних с обзиром на успех у настави математике. Ипак, значајнији напредак у погледу математичких постигнућа утврђен је код ученика са бољом оценом из математике. Што је разлика између оцена већа, то су разлике између група, формираних према оцени из математике, веће, што је у складу са нашом полазном претпоставком.

5. Истраживање је показало да се методичким обликовањем алгебарских садржаја, које је засновано на учењу путем открића на диференцираним садржајима, позитивно утиче на трајност стечених знања ученика, и то на свим трима нивоима образовних постигнућа. Откривање појмова, принципа, правила итд. путем садржаја који су прилагођени актуелним могућностима ученика допринело је лакшем усвајању, дужем памћењу, тј. трајнијем задржавању знања у уму ученика.

Анализа садржаја уџбеника је показала да у уџбеницима математике, који се најчешће употребљавају у пракси, постоје примери обраде нових садржаја алгебре који подстичу на откривање, али да су они недовољно заступљени. Имајући у виду позитивне ефекте овог облика учења, резултати нашег истраживања би требало да буду индикативни за ауторе уџбеника како би задаци који подстичу на откриће били више заступљени у уџбеницима у циљу унапређивања наставне праксе.

Резултати испитивања мишљења ученика експерименталне групе о настави алгебре организованој применом учења путем открића на диференцираним садржајима и о ономе што су доживели током трајања експеримента указују на њихова позитивна мишљења о вредностима примењеног модела наставе. Поред одређених примедби малог броја ученика које се односе на тежину оваквог начина учења и продуженог трајања појединих часова, највећем броју ученика су часови организовани путем открића били интересантни и волели би да је таква организација учења чешће заступљена на часовима математике. Ученици опажају своју повећану мисаону активност током учења по експерименталном моделу и истичу да боље разумеју градиво, па су самим тим стечена знања квалитетнија. Одговори ученика упућују на закључак да овакав приступ у учењу алгебарских садржаја позитивно делује на побољшање мотивисаности и заинтересованости ученика за садржаје који се уче.

Резултати фокус групе којима смо испитивали мишљење учитеља о могућностима, значају примене учења путем открића на диференцираним садржајима алгебре, као и његовом утицају на побољшање образовних постигнућа ученика у почетној настави математике, потврђују позитивну оцену експерименталног програма у погледу његове дидактичко-методичке ефикасности од стране учитеља-реализатора. Према процени испитиваних учитеља, ученици су при овом начину учења били ангажованији у процесу сазнања, мотивисанији за учење, и овакав начин рада је омогућио сваком ученику да научи градиво, што позитивно утиче на остварење исхода у почетној настави математике. Као основне потешкоће при раду на овај начин учитељи су навели недостатак времена, тј. недовољно времена у оквиру једног школског часа за реализацију наставних јединица, као и веће ангажовање и сложенију улогу учитеља, нарочито приликом пружања повратне информације.

Из резултата нашег истраживања произилазе неке идеје и сугестије за савремену организацију васпитно-образовне праксе у почетној настави математике. Оне се огледају у следећем:

Кључна улога у процесу организације и реализације наставе припада учитељу. Резултати нашег истраживања указују да је неопходно предавачку функцију учитеља заменити инструкторском. Задатак учитеља је да, водећи рачуна о индивидуалности ученика, ствара ситуације у којима ученици, уз правилно вођење, активно суделују и самостално долазе до открића појмова, правила, алгоритама. Учитељ у процесу открића треба да мотивише ученике, подстиче их и охрабрује, пружа диференцирану помоћ када то ученици потраже, даје повратне информације и др. За то је, пре свега, нeпходно мотивисати учитеље за примену иновативних модела рада и пружити им адекватну подршку за стално усавршавање и дидактичко-методичко оспособљавање за примену експерименталног модела учења како би били припремљени за унапређивање наставне праксе.

Модели разрађени у оквиру нашег експерименталног истраживања учитељима могу послужити као путоказ и јаснија оријентација да самостално креирају садржаје и моделе учења засноване на принципима учења путем открића на диференцираним садржајима.

Већ смо истакли да уџбеник представља основни и најчешће коришћени извор информација у школској пракси који се непосредно одражава на организацију и моделовање процеса учења. Резултати нашег истраживања би требало да пруже подстицај ауторима за савременије концепирање и дидактичко-методичко обликовање уџбеника математике у којима би садржаји за обраду и утврђивање градива уважавали индивидуалне особености различитих група ученика и пружали основу за учење путем открића. То би значило да примери и задаци у уџбеницима не би требало да буду истих или сличних захтева, нити да подстичу стицање механичких знања која су заснована на познавању низа формула, правила и способности решавања једноставних „шаблонских" задатака, већ да мисаоно активирају ученике, подстичу их на интеракцију са садржајима и самосталне активности које иницирају закључке који воде конструкцији знања.

Да би учење путем открића било остварљиво у почетној настави математике, неопходно је ученицима нудити разне проблемске ситуације прилагођене њиховим могућностима на основу којих ће уочавати односе између познатог и непознатог, продуковати нове идеје реорганизацијом постојећег искуства и тако стицати квалитетнија и примењљивија знања. Ученике треба подстицати и дозволити им да истражују и самостално откривају различита решења проблема и начине њиховог решавања. На тај начин ће се повећати заинтересованост и мотивација ученика за учење математичких садржаја.

Наставни процес у почетној настави математике треба да буде усмерен на способности и интересовања ученика. Резултати нашег истраживања показују да се учењем путем открића на диференцираним садржајима може позитивно утицати на све категорије ученика. Стога би примена овог методичког поступка у пракси била значајна јер би се на тај начин сваком ученику дала могућност да активним учествовањем у процесу учења напредује према својим развојним способностима и интересовањима. Тиме би се омогућило да ученици постану свесни својих знања и начина доласка до њих, али и да доживе успех и задовољство у процесу стицања истих.

Са аспекта наставе алгебре, значај истраживања се испољава у чињеници да је потврђен позитиван утицај примене овог методичког приступа у обликовању апстрактних алгебарских садржаја који на тај начин постају ближи ученику и разумљиви за учење. Такви налази упућују на оправданост његове примене у обради алгебарских садржаја.

Сублимацијом свих резултата до којих смо дошли у истраживању можемо закључити да је општа хипотеза истраживања потврђена. Тачније, потврђено је да *учење путем открића на диференцираним садржајима алгебре значајно доприноси постизању бољих исхода учинака у почетној настави математике у односу на класично организовану наставу*. Ови резултати су значајни с аспекта мењања постојеће организације наставе математике и увођења иновативних методских поступака у циљу повећања ангажовања и мисаоне активности ученика, а самим тим и побољшања квалитета наставе. Овакав облик учења има потенцијала да одговори захтевима савременог образовања, па можемо рећи да представља будућност у образовно-васпитном процесу у настави математике, као и у настави других предмета, али су за то неопходне битне промене у организацији рада школе и пружање материјалне и едукативне подршке и помоћи учитељима. Претходно наведени закључци истраживања представљају индикаторе тренутног стања и прве кораке у истраживању могућности које овакав облик методичког рада пружа. Надамо се да ће овај рад бити подстицај другим истраживачима да се баве наведеним проблемом и да га проуче и расветле са других аспеката, али и да ће бити од користи практичарима да овај модел учења више примењују у настави математике, или, уз одговарајућа прилагођавања, и у другим наставним предметима.

ЛИТЕРАТУРА

Adams, W. J. (2007). Individual differences in mathematical ability: genetic, cognitive and behavioural factors. *Journal of Research in Special Educational Needs*, 7 (2), 97–103.

Akgün, L., & Özdemir, M. E. (2006). Students' understanding of the variable as general number and unknown: A case study. *The teaching of mathematics*, 16, 45–51.

Alfieri, L., Brooks, J. P., Aldrich, J. N., Tenenbaum, R. H. (2011). Does discovery-based instruction enhance learning?. *Journal of Educational Psychology*, 103 (1), 1–18.

Anyafulude, J. (2014). Impact of Discovery-Based Learning Method on Senior Secondary School Physics. *IOSR Journal of Research & Method in Education*, 4 (3), 32–36.

Andrić, V., Ćirović, V. (2013). Neke mogućnosti individualizacije u nastavi matematike, *Zbornik sa 8. stručno-metodičkog skupa, Metodika nastave matematike u osnovnoj i srednjoj školi*, Pula.

Анђелковић, С. (2020). Настава алгебре у почетној настави математике. *Годишњак Педагошког факултета у Врању,* 11 (2), 119–131.

Babić, N. (2007). Konstruktivizam i pedagogija. *Pedagogijska istraživanja*, 4 (2), 217–229.

Banđur, V. (1991). Savremene tendencije u vrednovanju rada učenika. *Pedagogija*, 1–2, 9–14.

Банђур, В., Потковњак, Н. (1999). *Методологија педагогије*. Београд: Савез педагошких друштава Југославије.

Бауцал, А. (2013). Стандарди образовних постигнућа у Србији: искуства из прве деценије. *Иновације у настави,* 26 (3), 7–23.

Balım, A., G. (2009). The Effects of Discovery Learning on Students' Success and Inquiry Learning Skills. *Eurasian Journal of Educational Research*, 35, 1–20.

Baroody, J.A., Eiland, D.M., Purpura, J. D. (2013). Can Computer-Assisted Discovery Learning Foster First Graders' Fluency With the Most Basic Addition Combinations?. *American Education Research Journal*, 50 (3), 533–573.

Bikić, N., Maričić, S., Pikula, M. (2016). The effects of differentiation of content in problem-solving in learning geometry in secondary school. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 12 (11), 2783–2795.

Bicknell-Holmes, T. & Hoffman, P. S. (2000). Elicit, engage, experience, explore: Discovery learning in library instruction. *Reference Services Review*, 28 (4), 313–322.

Blair, A. (2014). Inquiry maths: An idea whose time has come. *Mathematics Teaching*, 32–35.

Blanco, L. J., Garrote, M. (2007). Difficulities in learning inequalities in students of the first year of pre-university education in Spain. *Eurasia Journal of Mathematics Science and Technology Education*, 3, 221–229.

Blanton, L.M. and Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36, 412–446.

Blanton, L. M., and Kaput, J. J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. In: J. Chai, & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization, Advances in Mathematics Education* (5–23). Berlin: Springer.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics*, 95 (2), 181–202.

Bognar, L., Matijević, M. (2002). *Didaktika*. Zagreb: Školska knjiga.

Бозало, Ј., Самарџић, Б. (2016). Уџбеник математике у функцији проблемске наставе. У: А. Пешикан (ур.), *Настава и учење – уџбеник у функцији наставе и учења*, 365–376. Ужице: Учитељски факултет.

Borek, A., McLaren, B. M., Karabinos, M., & Yaron, D. (2009). How Much Assistance is Helpful to Students in Discovery Learning? In: U. Cress, V. Dimitrova & M. Specht (Eds.), Proceedings of the Fourth European Conference on Technology Enhanced Learning, Learning in the Synergy of Multiple Disciplines (EC-TEL 2009), LNCS 5794, September/October 2009, Nice, France. (391–404). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Бранковић, Д., Микановић, Б. (2012). Проблемско-откривајући модел истраживачког рада ученика. *Иновације у настави*, 25 (1), 22–32.

Bazzini, L., Tsamir, P. (2003). Connection between theory and research findings: the case of inequalities. In: M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of Congress of European Research in Mathematical Education* 10, (1–3). Bellaria: ERME.

Brizuela, B, Schliemann, A. D. (2004). Ten-year-old students solving linear equations. *For the Learning of Mathematics*, 24 (2), 33–40.

Brown, C. A., Carpenter, T. P., Kouba, V. L., Lindquist, M. M., Silver, E. A. and Swafford, J. O. (1988). Secondary school results for the fourth NAEP mathematics assessment: Algebra, geometry, mathematical methods, and attitudes. *Mathematics Teacher*, 81, 337–347.

Brophy, J. (2004). *Motivating students to learn*. London: Lawrence Erlbaum Associates, publishers.

Bruner, J (1960). The Process of Education, Cambridge: Harvard University Press. (Retrieved on 05-September-2019, from: http://edci770.pbworks.com/w/file/fetch/45494576/Bruner_Processes_of_Education.pdf).

Bruner, J. (1961). The Act of Discovery. *Harvard Educational Review*, 31, 21–32.

Bruner, J. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge: Harvard University Press.

Bruner, J., Olver, R., Greenfield, P. M. (1971). *Studien zur kognitiven Entwicklung*. Stuttgart: Klett.

Bruner, J. S. (1973). *The Relevance of Education*. New York: Norton.

Van Amerom, B. A. (2002). *Reinvention of early algebra: Developmental research on the transition from arithmetic to algebra* (Doctoral dissertation). Utrecht University.

Van Amerom, A. B. (2003). Focusing on Informal Strategies when Linking Arithmetics to Early Algebra, *Educational Studies in Mathematics*, 54, 1, 63–75.

Van Stiphout, I., Drijvers, P. H. M., & Gravemeijer, K. P. E. (2013). The development of students' algebraic proficiency. *Mathematics Education*, 8 (2–3), 62–80.

Вилотијевић, М. (2000). *Дидактичке теорије и теорије учења*. Београд: Научна књига и Учитељски факултет у Београду.

Вилотијевић, М., Вилотијевић, Н. (2008). *Иновације у настави*. Врање: Учитељски факултет.

Вилотијевић, М., Вилотијевић, Н. (2014). Вредновање квалитета резултата и процеса учења. *Иновације у настави*, 27 (4), 21–30.

Влаховић, Б. (2009). Уџбеник у сусрет сутрашњици образовања. У: Н. Поткоњак (ур.), *Будућа школа – Зборник радова са научног скупа II део* (1090–1110). Београд: Српска академија образовања.

Вуловић, Н., Егерић, М. (2010). Диференцирана настава у свакодневној наставној пракси. *Узданица*, VII (2) , 119–137.

Вуловић, Н. (2011). Диференцијација геометријских садржаја и активно учење у почетној настави математике. *Настава и васпитање*, LX (3), 529–540.

Вуловић, Н. (2011). *Примена метода активног учења на диференцираним садржајима геометрије у почетној настави математике* (докторска дисертација). Јагодина: Педагошки факултет у Јагодини.

Вуковић, В. (1998). *Савремено учење математике*. Јагодина: Учитељски факултет у Јагодини и Студио СЦ Јагодина.

Garelick, B. (2009). Discovery learning in math: Exercises versus problems. *Nonpartisan Education Review / Essays*, 5 (2), 1–17.

Gazibara, S. (2018). Constructivist active learning environments from the students'perspective, 5th International Multidisciplinary Scientific Conference on Social Sciences and Arts SGEM 2018 (183–190). Albena, Bugarska, 26. 8 – 1. 9. 2018.

Gojkov, G., Stojanović, A. (2011). *Participativna epistemologija u didaktici*. Arad: Univerzitet „Aurel Vlajku“, Vršac: Visoka škola strukovnih studija za obrazovanje vaspitača „Mihailo Palov“.

Grijak, Đ. (2019). *Učenik – razvoj i učenje*. Zrenjanin: Tehnički fakultet „Mihajlo Pupin“.

Гусев, В. А. (2003). Дифференциация обучения математике в школе. У: *Психолого-педагогичнеские основьи математике* (184–290). Москва: Вербум-М, Академия.

Дејић, М., Егерић, М. (2003). *Методика наставе математике*. Јагодина: Учитељски факултет.

Дејић, М., Милинковић, Ј. (2012). Образовни стандарди – основа диференциране наставе математике. *Иновације у настави*, XXV (2), 97–104.

Дејић, М., Миленковић, В. (2016). Стандарди постигнућа ученика у функцији ефикасне диференциране наставе математике. *Иновације у настави*, XXIX (2), 15–24.

DeVellis, R. F. (2003). *Scale development: Theory and applications (2nd ed.).* Thousand Oaks, CA: Sage Publications, Inc.

Desimone, L. M. (2009). Improving impact studies of teachers' professional development: Toward better conceptualizations and measures. *Educational Researcher*, 38 (3), 181–199.

Dmitrijev, D. G. (2008). Konstruktivistički diskurs u teoriji sadržaja obrazovanja u SAD. *Pedagogija*, 63 (3), 347–356.

Дракулић, В., Миљановић, Т. (2010). Ставови ученика о примени програмиране наставе биологије уз помоћ компјутера у основној школи. У: О. Гајић, и сар. (ур.), *Европске димензије промена образовног система у Србији*, Зборник радова, 6, 215–232, Нови Сад: Филозофски факултет.

Duffy, T. M., Jonassen, D. H. (1992). Constructivism: New implications for instructional technology. In: M. Duffy & D. H. Jonassen (Eds.), *Constructivism and the technology of instruction: A conversation*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ђорђевић, Ј. (1981). *Настава и учење у савременој школи*. Београд: Научна књига.

Ђорђевић, Ј. (1997). *Настава и учење у савременој школи*. Београд: Учитељски факултет.

Ђокић, О. (2014). Диференцијација као структурна компонента иновативног модела уџбеника математике. У: Р. Николић (ур.), *Настава и учење – савремени приступ и перспективе* (543–554). Ужице: Учитељски факултет.

Егерић, М. (2004). *Садржајна диференцијација у настави математике*. Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.

Efklides, A., Papadaki, M., Papantoniou, G., Kiosseoglou, G. (1999). Individual differences in school mathematics performance and feelings of difficulty: The effects of cognitive ability, affect, age, and gender. *European Journal of Psychology of Education*, 14 (1), 57–69.

Закон о уџбеницима Републике Србије (2018). бр. 27. Београд: Службени гласник.

Zech, F. (1999). *Grundkurs Mathematikdidaktik-Theoretische and praktische Anleitungen für das Lehren von Matematik*. Beltz Verlag-Weinheim und Basel.

Зељић, М. (2011). Проблем разумевања структуре и поступка решавања једначина у основношколској алгебри. *Иновације у настави*, 24 (1), 39–52.

Зељић, М. (2014). *Методички аспекти ране алгебре*. Београд: Учитељски факултет.

Ивић, И., Пешикан, А. и Антић, С. (2001). *Активно учење 2: Приручник за примену метода активног учења/наставе.* Београд: Институт за психологију.

Ивић, И., Пешикан, А. и Антић, С. (2008). *Водич за добар уџбеник – општи стандарди квалитета уџбеника*. Нови Сад: Платонеум.

Ilić, M. (2002). Unapređivanje, periodizacija razvoja i perspektive individualizovane nastave. *Pedagogija*, 40 (1–2), 45–57.

In'am, A. & Hajar, S. (2017). Learning Geometry through Discovery Learning Using a Scientific Approach. *International Journal of Instruction*, 10 (1), 55–70.

INTO – Irish National Teachers Organisation (2007). Approaches to teaching and learning, INTO Consultative conference on education. [Online]: Retrieved on 25-November-2018, from: https://www.into.ie/ROI/Publications/ApproachesTeachingandLearning.pdf.

Јанковић, С. (2016). Индивидуализација наставе математике применом проблемске наставе. *Методичка пракса*, 13 (3–4), 269–282.

Janssen, F. J., Westbroek, H. B., & van Driel, J. H. (2014). How to make guided discovery learning practical for student teachers. *Instructional Science*, 42 (1), 67–90.

Jukić, R. (2013). Konstruktivizam kao poveznica poučavanja sadržaja prirodoznanstvenih i društvenih predmeta. *Pedagogijska istraživanja,* 10 (2), 241–263.

Jukić Matić, Lj., Tutnjević, V. (2013). Algebarski koncepti u nastavi matematike. *Poučak,* 14, 31–38.

Kadum, V. (2005). Utjecaj učenja rješavanjem problemskih zadataka na obrazovni učinak u elementarnoj nastavi matematike. *Metodički ogledi*, 12 (2), 31–60.

Kalathaki, M. (2015). Evaluation Tool for the Application of Discovery Teaching Method in the Greek Environmental School Projects. *World Journal of Education*, 5 (2), 40–51.

Kaput, J. (1998). Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power by Algebrafying the K-12 Curriculum. In National Council of Teachers of Mathematics and Mathematical Sciences Education Board (Eds.), *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium* (25–26). Washington D.C.: National Research Council, National Academy Press.

Kaput. J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In: E. Fennema & A. T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (133–155). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Kvaščev, R. (1980). *Sposobnosti za učenje i ličnost*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317–326.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In: D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (390–419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (2004a). Algebraic thnking in the early grades: What is it?. *Mathematics Educator*, 8 (1), 139–151.

Kieran, C. (2004b). The Equation / Inequality Connetion in Constructing Meaning for Inequality Situations. In: M. J. Høines, A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (143–147). Bergen: Bergen University College.

Kirschner, A. P., Sweller, J., Clark, E. R. (2006). Why Minimal Guidance During Instruction Does Not Work: An Analysis of the Failure of Constructivist, Discovery, Problem-Based, Experiential, and Inquiry-Based Teaching. *Educational Psychologist*, 41 (2), 75–86.

Kistian, A., Armanto, D. & Sudrajat, A. (2017). The Effect Of Discovery Learning Method On The Math Learning Of The V Sdn 18 Students Of Banda Aceh, Indonesia. *British Journal of Education*, 5 (11), 1–11.

Knuth, E., Stephens, A., McNeil, N. & Alibali, M. W. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36 (4), 297–312.

Ковач, Е. (2020). *Кооперативно учење и његови ефекти у настави математике у млађим разредима основне школе* (докторска дисертација). Ужице: Педагошки факултет.

Ковачевић, З. (2011). *Инструкције за самостално учење у уџбеницима за млађе разреде*. Београд: Учитељски факултет.

Krajcik, J. S., McNeill, K. L., & Reiser, B. J. (2008). Learning-goals-driven design model: Developing curriculum materials that align with national standards and incorporate project-based pedagogy. *Science Education*, 92 (1), 1–30.

Kriegler, S. (2008). Just What is Algebraic Thinking? (Retrieved on 01. october 2019, from http://docplayer.net/42067229-Just-what-is-algebraic-thinking-by-shelley-kriegler.html).

Kroll, L. R., LaBoskey, V. K. (1996). Practicing what we preach: Constructivism in a teacher education program. *Action in teacher education*, 18 (2), 63–72.

Krkljuš, S. (1977). *Učenje u nastavi otkrivanjem*. Novi Sad: Radnički univerzitet „Radivoj Ćipranov“.

Круљ, Р., Стојановић, С., Круљ Драшковић, Ј. (2007). *Увод у методологију педагошких истраживања са статистиком*. Врање: Учитељски факултет у Врању.

Kubat, U. (2018). Identifying the individual differences among students during learning and teaching process by science teachers. *International Journal of Research in Educational and Science,* 4 (1), 30–38.

Khasanah,V. N., Usodo, B. & Subanti, S. (2018). Guided learning in geometry learning, *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conference Series 983*, (Retrieved on 25-June-2019, from:www.researchgate.net/publication/324254426_Guided_discovery_learning_in_geometry_learning).

Лактеа, Н., Василијевић, Д. (2006). *Основе дидактике.* Ужице: Учитељски факултет.

Lalić Vučetić, Z. N. (2015). *Postupci nastavnika u razvijanju motivacije za učenje* (doktorska disertacija). Beograd: Filozofski fakultet.

Lalović, Z. (2009). *Naša škola – Metode učenja/nastave u školi*. Podgorica: Zavod za školstvo.

Lazarević, V. (2005). Individualizovana nastava. *Obrazovna tehnologija,* 2, 47–60.

Lubart, T. (2004). Individual student differences and creativity for quality education, Background paper prepared for the Education for All Global Monitoring Report 2005 The Quality Imperative. (Retrieved on 15-November-2018, from: http://unesdoc.unesco.org/images/0014/001466/146667e.pdf).

Maarif, S. (2016). Improving junior high school students’ mathematical analogical ability using discovery learning method. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES),* 2 (1), 114–124.

Malinović Jovanović, N., Malinović, T. (2013). *Metodika osavremenjene nastave matematike.* Vranje: Učiteljski fakultet.

Малешевић, Д. (2003). *Утицај учења откривањем на развој продуктивног мишљења ученика у почетној настави математике* (магистарска теза). Врање: Учитељски факултет у Врању.

Малешевић, Д. (2011). *Моделовање садржаја наставе математике за учење откривањем у разредној настави* (докторска дисертација). Врање: Учитељски факултет у Врању.

Malešević, D. (2014). Razvijanje teorije učenja otkrivanjem. *Obrazovna tehnologija,* 4, 333–342.

Mandić, P. (1972). *Inovacije u nastavi*. Sarajevo: Zavod za izdavanje udžbenika.

Mandic, D., Lalic, N. i Bandjur, V. (2010). *Managing innovations in education. In: The book 9th WSEAS Intenational Conference on Artificial Intelligence, Knowledge Engineering and Data Bases (AIKED ’10)* (231–237). United Kingdom: University of Cambridge.

Марјановић, М. (1996). *Методика математике (други део).* Београд: Учитељски факултет.

Маричић, С. (2012). Образовни стандарди и унапређивање почетне наставе математике. У: С. Маринковић (ур.), *Настава и учење: циљеви, стандарди, исходи,* 535–548. Ужице: Учитељски факултет.

Маричић, С., Шпијуновић, К. (2014). Ставови учитеља о улози образовних стандарда у унапређивању почетне наставе математике. *Иновације у настави*, XXVII (1), 21–30.

Маричић, С., Милинковић, Н. (2015). Диференцирана настава и ученици потенцијално даровити за математику. У: А. Михајловић (ур.), *Зборник радова са III међународног научног скупа Методички основи наставе математике III* (61–74). Јагодина: Педагошки факултет.

Маричић, С., Милинковић, Н. (2017). Уџбеник у стварању услова за контекстуални приступ учењу садржаја алгебре у почетној настави математике, *Зборник радова Педагошког факултета у Ужицу,* 19, 117–130.

Marković, M. (2005). Individualizovana nastava. *Obrazovna tehnologija,* 2, 61–66.

Martaida, T., Bukit, H.Ginting, E.M. (2017). The Effect of Discovery Learning Model on Student’s Critical Thinking and Cognitive Ability in Junior High School, *IOSR Journal of Research & Method in Education,* 7 (6), 1–8.

Matijević, M. (2008). Projektno učenje i nastava. U: D. Drandić (ur.), *Nastavnički suputnik* (188–225). Zagreb: Znamen.

Matejić Đuričić, Z. (2012). Nove konceptualizacije razvoja i vaspitanja. *Specijalna edukacija i rehabilitacija*, 11 (2) 267–284.

Meyer, H. (2004). *Was ist gutter Unterricht?* Berlin: Cornelsen.

Mayer, E. R. (2004). Should There Be a Three-Strikes Rule Against Pure Discovery Learning? The Case for Guided Methods of Instruction. *American Psychologist,* 59 (1), 14–19.

Mialaret, G. (1991). *Pédagogie generale*. Paris: P.U.F.

Мијановић, Н. (2008). Субјекатска позиција ученика у васпитно-образовном процесу између декларативног и стварног. *Иновације у настави*, 21 (1), 13–22.

Микановић, Б. (2014). Исходи учења и стандарди знања у основном образовању. *Иновације у настави*, XXVII (1), 84–93.

Милинковић, Н. (2014). Дидактичке вредности диференциране наставе и ученици потенцијално даровити за математику. У Р. Николић (ур.), *Настава и учење – савремени приступ и перспективе* (569–580). Ужице: Учитељски факултет.

Миловановић, Ј. Б. (2008). Математички задаци с обележјем стандарда као модели индивидуализоване и диференциране наставе математике. *Настава и васпитање*, 57 (4), 469–482.

Милутиновић, Ј. (2011). Социјални конструктивизам у области образовања и учења. *Зборник Института за педагошка истраживања*, 2, 177–194.

Minner, D., Levy, A. J., Century, J. (2010). Inquiry-Based Science Instruction : What Is It and Does It Matter?. *Journal of Research in Science Teaching* , 47 (4), 474–496.

Mirkov, S. (2011). Konstruktivistička paradigma i obrazovanje za društvo znanja: progresivni diskurs u nastavi. TEHNOLOGIJA, INFORMATIKA I OBRAZOVANJE ZA DRUŠTVO UČENJA I ZNANJA. 6. međunarodni simpozijum, Tehnički fakultet Čačak, 3−5. jun 2011. Preuzeto sa: http://www.ftn.kg.ac.rs/konferencije/tio6/radovi/2)%20Pedagoske%20dimenzije%20drustva%20ucenja%20i%20znanja/PDF/201%20Snezana%20Mirkov.pdf.

Мићић, В. (2005). Учење откривањем – можда нови приступ. *Настава математике,* L (4), 13–21.

Mrđa, M. (2013). *Interaktivna nastava matematike u mlađim razredima osnovne škole* (doktorska disertacija). Beograd: Učiteljski fakultet u Beogradu.

Mužić, V. (1986). *Metodologija pedagoškog istraživanja*. Sarajevo: SVJETLOST OOUR Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards of School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Nešić, B. (2010). Ciljevi nastave u svetlu novijih teorija o transferu i reforma osnovnog obrazovanja. *Pedagogija,* 65 (1), 77–90.

OECD (2005). *Definition and Selection of Key Competencicies: Executive Summary*. OECD.

Nicolaidou, M & Philippou, G. (2003). Attitudes towards mathematics, self-efficacy and achievement in problem solving. In: M. A. Mariotti (Ed.), *European Research in Mathematics Education III* (1–11). Pisa, Italy: University of Pisa.

Olssen M. (1996). Radical Constructivism and its failings: Anti-realism and Individualism. *British Journal of Educational Studies*, 44 (3), 275–295. [Online]: Retrieved on 21-November-2019, from: http://dx.doi.org/10.1080/00071005.1996.9974075.

Okwute, O. A. (2015). *Effect of guided discovery method on mathematic performance of low and high averted secondary school students in FCT Abuja Nigeria* (PhD Dissertation). Zaria: Ahmadu Bello University. [Online]: Retrieved on 15-December-2019, from: http://kubanni.abu.edu.ng/jspui/bitstream/123456789/6980/1/EFFECT%20OF%20GUIDED%20DISCOVERY%20METHOD%20ON%20MATHEMATICS%20PERFORMANCE%20OF%20LOW%20AND%20HIGH%20AVERTED%20SECONDARY%20SCHOOL%20STUDENTS%20IN%20FCT%20ABUJA%2C%20NIGERIA.pdf.

Pallant, J. (2011). *SPSS priručnik za preživljavanje: postupni vodič kroz analizu podataka pomoću SPSS-a*, Prevod 4. izdanja. Beograd: Mikro knjiga.

Palekčić, M. (2007). Od kurikuluma do obrazovnih standarda. U: V. Previšić, (ur.), *Kurikulim: teorija – metodologija – sadržaj – struktura* (39–115). Zagreb: Zavod za pedagogiju, Školska knjiga.

Palekčić, M. (2002). Konstruktivizam – nova paradigma u pedagogiji?. *Napredak*, 143 (4), 403–413.

Palmer, D. (2005). A motivational view of constructivist – Informed teaching. *International Journal of Science Education*, 27 (15), 1853–1881.

Педагошка енциклопедија 2 (1989). Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.

Педагошки речник (1967). Београд: Завод за издавање уџбеника СРС.

Педагошки лексикон (1996). Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.

Peresuh, M. (1998). A Comparative Analysis of Bruner's and Ausubel's Views on the Learning Process and Their Implications for Zimbabwe. *Zim babwe Journal of Educational Research*, 10 (1), 73–91.

Petrović, N., Mrđa, M. i Lazić, B. (2010). Modeli diferencirane interaktivne razredne nastave matematike. *Norma*, 15 (2), 211–227.

Petrović, N., Mrđa, M. (2005). Diferencirano poučavanje u problemskoj nastavi matematike. *Pedagogija*, LX (3), 397–408.

Petrović, N., Pinter, J. (2006). *Metodika nastave matematike*. Sombor: Pedagoški fakultet.

Podrug, I. (2017). Utjecaj primjene strategije učenje otkrivanjem na motivaciju učenika za učenje biologije na primjeru nastavne jedinice molekula DNK. *Educatio Biologiae,* 3, 143–158.

Poljak, V. (1984). *Didaktika*. Zagreb: Školska knjiga.

Правилник о наставном плану и програму за први, други, трећи и четврти разред основног образовања и васпитања (2006). Просветни гласник, Службени гласник Републике Србије, бр. 15/2006.

Правилник о програму наставе и учења за први разред основног образовања и васпитања (2017). Просветни гласник, Службени гласник Републике Србије, бр. 10/2017.

Правилник о програму наставе и учења за други разред основног образовања и васпитања (2018). Просветни гласник, Службени гласник Републике Србије, бр. 16/2018.

Правилник о програму наставе и учења за трећи разред основног образовања и васпитања (2019). Просветни гласник, Службени гласник Републике Србије, бр. 5/2019.

Правилник о програму наставе и учења за четврти разред основног образовања и васпитања (2019). Просветни гласник, Службени гласник Републике Србије, бр. 11/2019.

Prodanović, T., Ničković, R. (1974). *Didaktika*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.

Putriani, D. & Rahayu, C. (2018). The effect of discovery learning model using sunflowers in circles on mathematisc learning outcomes. *International Journal on Trends in Mathematcs Education Research,* 1 (1), 22–25.

Радовановић, Р. (1978). Учење откривањем – метод продуктивног учења у настави. *Зборник Института за педагошка истраживања,* 11, 347–349.

Радовановић, Р. (1982). *Учење откривањем у разредној настави*. Београд: Просветни преглед.

Радовановић, Р. (1983). *Учење откривањем – четрдесет обрађених наставних јединица за III разред основне школе*. Београд: Просветни преглед и Горњи Милановац: Дечје новине.

Радовановић, Р. (1983). *Учење откривањем – тридесет три обрађене наставне јединица за IV разред основне школе*. Београд: Просветни преглед и Горњи Милановац: Дечје новине.

Радивојевић, Д. (2016). Учење путем откривања (открића) у настави природе и друштва. *Бијељински методички часопис*, 3, 15–23.

Radford, L. (2010). Signs and Meanings in Students' Emergent Algebraic Thinking: A Semiotic Analysis?. *Educational Studies in Mathematics,* 42 (3), 237–268.

Radford, L. (2006). Algebraic Thinking and The Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. In: S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the NA-PME* (2–21). Mérida: Universidad Pedagógica Nacional.

Ramdhani, R.M., Usodo, B., Subanti, S. (2017). Discovery Learning with Scientific Approach on Geometry, *International Conference on Mathematics and Science Education (ICMScE)*, Journal of Physics: Conf. Series 895.

Rackov, G. (2011). Računar u funkciji efikasnijeg organizovanja diferencirane nastave, Tehnologija, informatika i obrazovanje za društvo učenja i znanja. 6. međunarodni simpozijum, Tehnički fakultet: Čačak. Preuzeto sa: http://www.ftn.kg.ac.rs/konferencije/tio6/radovi/6)%20Primena%20informacionih%20tehnologija%20u%20obrazovanju%20i%20vaspitanju/PDF/627%20Gordana%20Rackov.pdf

Ристановић, Д. (2007). Утицај примене хеуристичког модела наставе на ефекте учења садржаја природе и друштва. *Педагошка стварност,* 53 (3–4), 214–226.

Rittle-Johnson, B. & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology*, 99, 561–574.

Richardson, V. (2003). Constructivistic Pedagogy. *Teachers College Records*, 105 (9), 1623–1640.

Romano, D. A. (2009). Šta je algebarsko mišljenje?. *MAT-KOL Banja Luka*, XV (2) 19–29.

Svinicki, D. M. (1998). A theoretical foundation for discovery learning. *ADVANCES IN PHYSIOLOGY EDUCATION*, 20 (1), 4–7.

Simić, K. (2015). *Osnove metodike nastave*. Brčko: Evropski univerzitet.

Simić Vukomanović, I., Đukić Dejanović, S., Đonović, N. i Borovčanin, M. (2012). Psiho-medicinski i socijalni činioci školskog uspeha. *Engrami*, 34 (1), 45–57.

Sihombing, H., Sinaga, B. & Mukhtar (2017). The effect of discovery learning model to students' mathematical concepts master. *IOSR Journal of Research and Method in Education*, 7 (5), 18–23.

Slavin, E. R. (2005). *Educational Psychology: Theory and Practice*. Boston: Allyn & Bacon, Pearson Education.

Stevanović, M. (2002). *Škola i stvaralaštvo*. Labin: MediaDesign.

Stojaković, P. (2002). *Pedagoška psihologija 2*. Banja Luka: Filozofski fakultet.

Станојевић, Д. (ур.) (2010*). Образовни стандарди за крај обавезног образовања за наставни предмет математика*. Београд: Министарство просвете Републике Србије, Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања.

Stacey, K., & MacGregor, M. (1999). Learning the algebraic method of solving problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, 18 (2), 149–167.

Стевановић, С., Црвенковић, Ц. и Романо, Д. (2014). Један примјер анализе аритметичког и раноалгебарског мишљења. *Иновације у настави*, 27 (1), 118–134.

Sullivan, R. F., Moriarty, A. M. (2009). Robotics and Discovery Learning: Pedagogical Beliefs, Teacher Practice, and Technology Integration. *Journal of Technology and Teacher Education*, 17 (1), 109–142.

Suh, J. M. (2007). Developing „Algebra-'Rithmetic“ in the Elementary Grades. *Teaching Children Mathematics*, 14, 246–253.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). Between arithmetic and algebra: In the search of a missing link the case of equations and inequalities. *Rendiconti Del Seminario Matematico*, 52, 279–307.

Terhart, E. (2001). *Metode poučavanja i učenja: Uvod u probleme metodičke organizacije poučavanja i učenja*. Zagreb: Educa.

Tomlinson, C. A., & Imbeau, M. B. (2010). *Leading and managing a differentiated classroom*. Alexandria, Virginia: ASCD.

Tomlinson, C. A., Strickland, C. (2005). *Differentiation in Practice*. Alexandria, Virginia: Association for Supervision and Curriculum Development.

Tomlinson, C. A. (2014). *The differentiated classroom: Responding to the needs of all learners*. Alexandria, Virginia: ASCD.

Topolovčan, T., Rajić, V., Matijević, M. (2017). *Konstruktivistička nastava – teorija i empirijska istraživanja.* Zagreb: Sveučilište u Zagrebu, Učiteljski fakultet.

Требјешанин, Б. (2001). Развој метакогниције и мотивације – улога уџбеника. У: Б. Требјешанин и Д. Лазаревић (ур.), *Савремени основношколски уџбеник,* 117–127. Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.

Trnavac, N. i Đorđević, J. (1998). *Pedagogija*. Beograd: Naučna knjiga komerc.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics*, 9 (2), 19–25.

Fosnot, C. T. & Perry, R. S. (2005). Constructivism: A psychological theory of learning. In: C. T. Fosnot (Ed.), *Constructivism: Theory, perspectives and practice,* 8–33. New York: Teacher College Press.

Hammer, D. (1997). Discovery learning and discovery teaching. *Cognition and instruction,* 15 (4), 485–529.

Hanafi, A. (2016). The Effect of Discovery Learning Method Application on Increasing Student's Listening Outcome and Social Attitude. *Dinamika Ilmu*, 16 (2), 291–306.

Herbert, K., Brown, R. (1997). Patterns as Tools for Algebraic Reasoning. *Teaching Children Mathematics,* 3, 340–344.

Herdiana, Y., Wahyudin, Sispiyati, R. (2017). Effectiveness of Discovery Learning Model on Mathematical Problem Solving, *The 4th International Conference on Research, Implementation and Education of Mathematics and Science (4th ICRIEMS*). (Retrieved on 07-December-2018, from: https://doi.org/10.1063/1.4995155).

Hoffman, S. (2013). Instruction for Discovery Learning: Levels of Implementation Exhibited by a Sample of Algebra I Teachers (MA thesis). Faculty of the Graduate School of The University of Texas at Austin.

Honomichl, D. R. & Chen, Z. (2012). The role of guidance in children's discovery learning. *WIREs Cognitive Science*, 3 (6), 615–622.

Huitt, W. (1997). Individual differences. *Educational Psychology Interactive*, Valdosta, GA: Valdosta State University. (Retrieved on 02-December-2018, from: http://www.edpsycinteractive.org/topics/instruct/indiff.html).

Husarić, M. (2011). Važnost uvažavanja kognitivnih stilova i stilova učenja kod učenika u procesu poučavanja. *Metodički obzori*, 6 (12), 143–151.

Carracher, W. D., Schliemann, D. A., Brizuela, M. B., Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37 (2), 87–115.

Carracher, D. W., Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In: F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 669–705. Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Carraher, D., Schliemann, A. D. & Schwartz, J. (2007). Early Algebra Is Not the Same as Algebra Early. In: J. Kaput, D. Carraher and M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*, 235–272. Mahwah,NJ: Erlbaum.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, 40 (1), 3–22.

Carpenter, T., Franke, M. L. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: Generalization and proof. In: H. Chick, K. Stacey, J. Vincent and J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning Algebra*, 155–162. Australia: The University of Melbourne.

Carpenter, T., Franke, M. & Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Castronova, J. (2002). Discovery learning for the 21st century: What is it and how does it compare to traditional learning effectiveness in the 21st century?: Article Manuscript, Action Research Exchange, 1 (1). (Retrieved on 14-October-2018, from: http://chiron.valdosta.edu/are/ Artmanscrpt/vol1no1/castronova_am.pdf).

Căprioară, D., Frunză, V. (2013). Differentiation and Individualization in the Organization of the Teaching-Learning Activities in Mathematics. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 93, 2063–2067.

Cvijanović, G. (2016). Konceptualizacija pojma rana algebra i ranoalgebarsko mišljenje. *Istraživanje matematičkog obrazovanja*, 8 (14), 1–8.

Costello, J. (2001). *Teaching and Learning Mathematics*. London: Routledge.

Cusi, A., Malara, N. A., & Navarra, G. (2011). Theoretical issues and educational strategies for encouraging teachers to promote a linguistic and metacognitive approach to early algebra. In: *Early algebraization* (483–510). Berlin, Heidelberg: Springer.

Džinkić, O., Milutinović, J. (2018). Ideje konstruktivizma u savremenoj školskoj praksi. *Zbornik Odseka za pedagogiju, Filozofski fakultet u Novom Sadu,* 27, 129–149.

Šefer, J. (2004). Konstruisanje znanja kao kreativni akt i razumevanje celine. U: S. Milanović Nahod i N. Šaranović Božanović (ur.), *Znanje i postignuće* (130–139). Beograd: Institut za pedagoška istraživanja.

Шефер, Ј., Радишић, Ј. и Јошић, С. (2012). Истраживачки рад и решавање проблема као подстицај стваралаштва, иницијативе и сарадње у настави. У: Ј. Шефер и Ј. Радишић (ур.), *Стваралаштво, иницијатива и сарадња, Импликације за образовну праксу,* 243–266. Београд: Институт за педагошка истраживања.

Španović, S., Trbojević, S. (2010). Novi pristup metodskom aspektu obrade društvenih sadržaja u razrednoj nastavi. *Norma,* 15 (2), 177–190.

Шпановић, С. (2008). Теоријске претпоставке за дидактичко обликовање уџбеника. *Наша школа*, 3–4, 63–87.

Шпановић, С. (2011). Индивидуализована настава у теорији и пракси. *Настава и васпитање*, LX (3), 500–515.

Шпијуновић, К., Маричић, С. (2016). *Методика почетне наставе математике*. Ужице: Учитељски факултет.

Warren, E., Cooper, T. J. (2005). Introducing Functional Thinking in Year 2: A Case Study of Early Algebra Teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood,* 6 (2), 150–162.

Weimer, R. C. (1974). *A Critical Analysis of the Discovery Versus Expository Research Studies Investigating Retention or Transfer Within the Areas of Science, Mathematics, Vocational Education, Language, and Geography from 1908 to the Present* (PhD Dissertation). University of Illinois at Urbana Champaign.

Yurniwati, & Hanum, L. (2017). Improving mathematics achievement of Indonesian 5th grade students through guided discovery learning. *Journal on Mathematics Education*, 8 (1), 77–84.

Yuliani, T., Noer, S. & Rosidin, U. (2018). Guided Discovery Worksheet for Increasing Mathematical Creative Thinking and Self-Efficacy. *International Journal of Trends in Mathematics Education Research*, 1 (1), 30–34.

ИЗВОРИ

1. разред

Јухас, И. (2018). *Математика 1А, Уџбеник за први разред основне школе*. Београд: Едука.

Јухас, И. (2018). *Математика 1Б, Уџбеник за први разред основне школе*. Београд: Едука.

Иванчевић Илић, И., Тахировић, С. (2018). Математика 1, *Уџбеник математике за први разред основне школе (1. део).* Београд: Нови Логос.

Иванчевић Илић, И., Тахировић, С. (2018). Математика 1, *Уџбеник математике за први разред основне школе (2. део).* Београд: Нови Логос.

Иванчевић Илић, И., Тахировић, С. (2018). Математика 1, *Уџбеник математике за први разред основне школе (3. део).* Београд: Нови Логос.

Иванчевић Илић, И., Тахировић, С. (2018). Математика 1, *Уџбеник математике за први разред основне школе (4. део).* Београд: Нови Логос.

Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2018). *Маша и Раша – Математика 1, Уџбеник за први разред основне школе (1. део).* Београд: Klett.

Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2018). *Маша и Раша – Математика 1, Уџбеник за први разред основне школе (2. део).* Београд: Klett.

Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2018). *Маша и Раша – Математика 1, Уџбеник за први разред основне школе (3. део).* Београд: Klett.

Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2018). *Маша и Раша – Математика 1, Уџбеник за први разред основне школе (4. део).* Београд: Klett.

Маричић, С. (2018). *Математика 1, Уџбеник за први разред основне школе*. Београд: БИГЗ школство.

Милинковић, Ј. (2018). *Математика 1, Уџбеник за први разред основне школе*. Београд: Креативни центар.

Малиновић Јовановић, Н., Малиновић, Ј. (2019). *Математика 1,* Уџбеник *за први разред основне школе 1. део*. Београд: Вулкан издаваштво, Вулкан знање.

Малиновић Јовановић, Н., Малиновић, Ј. (2019). *Математика 1, Уџбеник за први разред основне школе 2. део*. Београд: Вулкан издаваштво, Вулкан знање.

2. разред

Јухас, И. (2019). *Математика 2А, Уџбеник за други разред основне школе*. Београд: Едука.

Јухас, И. (2019). *Математика 2Б, Уџбеник за други разред основне школе*. Београд: Едука.

Маричић, С., Ђуровић, Д. (2019*). Математика 2, Уџбеник за други разред основне школе.* Београд: БИГЗ школство.

Малиновић Јовановић, Н., Малиновић, Ј. (2019). *Математика 2, Уџбеник за други разред основне школе (1. део)*. Београд: Вулкан издаваштво, Вулкан знање.

Малиновић Јовановић, Н., Малиновић, Ј. (2019). *Математика 2, Уџбеник за други разред основне школе (2. део)*. Београд: Вулкан издаваштво, Вулкан знање.

Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2019). *Маша и Раша – Математика 2, Уџбеник за други разред основне школе (1. део).* Београд: Klett.

Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2019). *Маша и Раша – Математика 2, Уџбеник за други разред основне школе (2. део).* Београд: Klett.

Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2019). *Маша и Раша – Математика 2, Уџбеник за други разред основне школе (3. део).* Београд: Klett.

Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2019). *Маша и Раша – Математика 2, Уџбеник за други разред основне школе (4. део).* Београд: Klett.

Рикало, В. (2019). *Математика 2, Уџбеник за други разред основне школе.* Београд: Креативни центар.

Иванчевић Илић, И., Тахировић, С. (2019). *Математика 2, Уџбеник математике за други разред основне школе (1. део).* Београд: Нови Логос.

Иванчевић Илић, И., Тахировић, С. (2019). *Математика 2, Уџбеник математике за други разред основне школе (2. део).* Београд: Нови Логос.

Иванчевић Илић, И., Тахировић, С. (2019). *Математика 2, Уџбеник математике за други разред основне школе (3. део).* Београд: Нови Логос.

Иванчевић Илић, И., Тахировић, С. (2019). *Математика 2, Уџбеник математике за други разред основне школе (4. део).* Београд: Нови Логос.

<u>3. разред</u>

Јоксимовић, С., Влаховић, Б. (2016). *Математика 3, Уџбеник за трећи разред основне школе 3а*. Београд: Едука.

Јоксимовић, С., Влаховић, Б. (2016). *Математика 3, Уџбеник за трећи разред основне школе 3б*. Београд: Едука.

Поповић, Б., Вуловић, Н., Анокић, П., Кандић, М. (2016). *Маша и Раша – Математика 3, Уџбеник за трећи разред основне школе.* Београд: Klett.

Тахировић, С., Иванчевић, И. (2016). *Математика 3, Уџбеник математике за трећи разред основне школе.* Београд: Нови Логос.

Јовановић Лазић, М., Дрндаревић, Д. (2016). *Математика 3, Уџбеник за трећи разред основне школе (1. део).* Београд: Бигз школство.

Јовановић Лазић, М., Дрндаревић, Д. (2016). *Математика 3, Уџбеник за трећи разред основне школе (2. део).* Београд: Бигз школство.

Стефановић, А., Рикало, В. (2015). *Математика 3, Уџбеник за трећи разред основне школе*. Београд: Креативни центар.

<u>4. разред</u>

Дејић, М., Милинковић, Ј., Ђокић, О. (2015). *Математика 4, Уџбеник за четврти разред основне школе.* Београд: Креативни центар.

Поповић, Б., Вуловић, Н., Јовановић, М.,Николић, А. (2016). *Маша и Раша – Математика 4, Уџбеник за четврти разред основне школе.* Београд: Klett.

Зарупски, С. (2016). *Математика 4, Уџбеник за четврти разред основне школе.* Београд: Едука.

Тахировић, С. (2016). *Математика 4, Уџбеник математике за четврти разред основне школе.* Београд: Нови Логос.

Максимовић, М. (2016). *Математика 4, Уџбеник за четврти разред основне школе (1. део).* Београд: Бигз школство.

Максимовић, М. (2016). *Математика 4, Уџбеник за четврти разред основне школе (2. део).* Београд: Бигз школство

ПРИЛОЗИ

ПРИЛОГ 1. ИНИЦИЈАЛНИ ТЕСТ ЗНАЊА

Име и презиме:____

Школа и одељење:____

Основни ниво

1. За дати текстуални задатак заокружи слово поред једначине која му одговара, а затим реши једначину:
   Који број подељен са 10 даје количник једнак збиру бројева 38 и 2?

   а) $x : 10 = 38 + 2$ б) $x \cdot 10 = 38 + 2$ в) $x : 10 = 38 - 2$

   Решење једначине:____

2. Допуни започету реченицу.
   а) Ако умањилац повећамо за неки број, разлика __________________ за тај број.

3. Напиши на црту одговарајући број не вршећи израчунавање:
   а) $500 + 400 = 900$
   б) $(500 + 120) + 400 = 900 +$____
   в) $500 + (400 - 150) = 900 -$ _____

4. Израчунај вредност датих израза ако је $a = 5$:

   $295 + a =$____.

   $(288 - 278) \cdot a =$____.

5. Напиши које је својство коришћено ради лакшег израчунавања следеће једнакости:
   а) $498 + 236 = (498 + 2) + (236 - 2) = 500 + 234 = 734$

   Коришћено је својство: ____;
   б) Користећи својство сталности збира и разлике израчунај на лакши начин.
   $218 - 199 =$____.

6. Одреди скуп решења неједначине $x < 9$.

   Скуп решења је: {___________________}

Средњи ниво

1. За дате вредности промењиве ***m*** израчунај вредност датог израза и упиши је на одговарајуће место у табели:

m	100	101	102	103	104
(220 + m) - 100					

2. Ако знаш да је тачна једнакост $324 - 115 = 209$, упиши одговарајуће резултате на црте вршећи само једну рачунску операцију:

   а) $(324 - 19) - 115 =$ ________;

   б) $(324 - 24) - (115 - 24) =$ ________.

3. Нађи скуп решења неједначина:

   а) $346 - x > 338$ б) $8 \cdot x < 960$

4. Од уштеђеног новца Мила је купила књигу која кошта 863 динара. Продавачица јој је вратила кусур од 37 динара. Колико је новца уштедела Мила? Једначина:____

   ____

   Одговор: ____.

5. Производ двају бројева је 240. Колики ће бити производ ако се један од чинилаца повећа два пута, а други смањи шест пута?

   ____

6. Како се мења:

   а) Први сабирак, ако је други сабирак смањен за 15, а да се притом збир не промени?

   ____;

   б) Разлика, ако умањилац повећамо за 89?

   ____;

   в) Количник, ако се и дељеник и делилац помноже истим бројем?

   ____

Напредни ниво

1. Кад би Милица имала 345 динара више него што има, вратила би дуг од 250 динара и остало би јој још 150 динара. Колико динара има Милица? Једначина:____
____.
Одговор: ____.

2. Разлика двају бројева је 531. Ако већи број увећамо за 128, за колико треба увећати мањи број да би нова разлика износила 135?
____.

3. При сабирању Марко је направио следеће грешке:
   - цифру стотина 7 заменио је цифром 5;
   - цифру десетица 9 заменио је цифром 4;
   - цифру јединица 2 заменио је цифром 1.
   За колико су ове грешке промениле вредност збира?
____

4. У 7 редова су засађене шљиве. Колико стабала шљива може да буде у сваком реду, ако укупно има више од 98 стабала шљива?

Неједначина:____
____
Одговор: ____.

5. Састави неједначину чији је скуп решења: {305, 306, 307, …}.

____.

6. Пут се састоји од трију деоница дужине a, b и c.

а) Колика је укупна дужина пута? Напиши израз са промењљивима.
____.
б) За колико је укупна дужина првих двеју деоница дужа од треће?
____.
в) Ако је $a = 275$ *m*, $b = 328$ *m*, $c = 485$ *m, израчунај бројевне вредности написаних израза са промениљивима.*
____.
____.

ПРИЛОГ 2. ФИНАЛНИ ТЕСТ ЗНАЊА

Име и презиме:____

Школа и одељење:____

Основни ниво

1. Заокружи слово поред текста који одговара датој једначини, а затим је реши.

$$x : 9 = 1200 - 1000$$

а) Који број подељен са 9 даје количник који је једнак збиру бројева 1200 и 1000?

б) Који број помножен са 9 даје производ који је једнак разлици бројева 1200 и 1000?

в) Који број подељен са 9 даје количник који је једнак разлици бројева 1200 и 1000?

г) Одреди делилац ако је дељеник број 9, а количник број који је једнак разлици бројева 1200 и 1000?

Решење једначине:____

____

Провера: ____

2. Допуни започете реченице:

а) Ако један од сабирака смањимо за неки број, збир ће _____________________.

б) Ако један од чинилаца повећамо неколико пута, а други смањимо исто толико пута, производ ће______________________.

3. Напиши на црту одговарајући број не вршећи израчунавање:

а) 25 · 30 = 750

(25 · 7) · 30 = 750 · ______

б) 4000 : 8 = 500

(4000 : 10) : 8 = 500 : _____

4. Израчунај вредност датих израза ако је x = 5:

$(545 + x) \cdot 2$ =____.

$10 \cdot x + 1050$ =____.

Претходни изрази представљају примере израза са _________________________.

5. Напиши на црту одговарајући број тако да једнакости буду тачне:

а) 1350 + 750 = 2100 **б) 9700 – 4550 = 5150**

(1350 + 50) + (750 –______) = 2100 (9700 – ______) – (4550 – 450) = 5150

6. Реши неједначину: $10 \cdot x > 1700$

____

____

$x \in \{$__________________________$\}$

Средњи ниво

1. Марко је замислио неки број ***x*** који је помножио са 3 и добијени производ смањио за 120. Напиши одговарајући израз. ___________________________

На одговарајуће место у табели напиши добијени израз, а затим за дате вредности променљиве ***x*** израчунај његову вредност.

x	100	200	300	500	700
______________________					

2. На полици у библиотеци је било 1150 књига. Након што је библиотекар поређао још неколико књига, на полици је било мање од 1250 књига. Колико је књига библиотекар могао да стави на полицу?

Неједначина:____

____

$x \in \{$____$\}$

Одговор:____.

3. Користећи својство сталности збира и разлике израчунај на лакши начин.

   а) 798 + 317 = (______+______) + (______–_____) = ______+______ = ______

   б) 1843 – 598 = ____

4. Марко је замислио неки број. Када је замишљени број увећао 7 пута, добио је број 1505. Који је број Марко замислио?

   Једначина:____

   ____

   Одговор:____

5. Како ће се променити:

а) Количник двају бројева ако се делилац повећа 9 пута?

____;

в) Збир двају бројева ако се један од сабирака смањи за 45, а други повећа за 60?

____;

6. Ако знаш да је **14500 – 7600 = 6900,** упиши одговарајуће резултате на црте вршећи само једну рачунску операцију:

(14500 – 300) – 7600 = ____

14500 – (7600 + 1400) = ____

Напредни ниво

1. За дати текст напиши одговарајући израз са промењљивом.

У продавници је било ***a*** килограма воћа. Први дан је продато ***b*** килограма, други дан ***c*** килограма мање него што је остало после првог дана. Колико је килограма воћа продато другог дана? ____

2. Стева је у касици имао 5000 динара. Купио је лопту и утврдио да има довољно пара да купи књигу која кошта 1400 динара, али нема довољно пара за књигу која кошта 1700 динара. Колика је могла бити цена лопте?

Неједначина:____

____

$x \in \{$____$\}$

Одговор:____.

3. Нина је својим бомбонама додала још 40, па је затим све бомбоне поделила петорици другова, тако да је сваки дечак добио по 70 бомбона. Колико је Нина имала бомбона?

   Једначина:____

   ____

   Одговор:____

4. На један камион је натоварено 10000 килограма терета више него на други камион. Колика ће бити та разлика ако се са камиона на коме има више терета истовари 3850 килограма____.

Одговор: ____.

5. Један радник је из магацина пренео 70 кутија са по 40 килограма робе, а други 140 кутија са по 20 килограма робе. Без израчунавања одговори ко је од двојице радника пренео више робе и образложи одговор.

____

____.

6. Ако је $a + b = 11100$, одреди вредност непознатог броја x у следећим изразима:

$(a + x) + b = 12100$ $x =$____________

$a + (b - x) = 9100$ $x =$____________

ПРИЛОГ 3. Упитник за ученике

Разред и одељење: _____________ Школа : __________________________________

На претходним часововима математике изучавао/ла си садржаје самостално на тај начин што си откривао/ла нове појмове, правила итд. На следећа питања одговори искрено како би нам омогућио/ла да сазнамо да ли ти је учење на овај начин занимљивије од уобичајеног и да ли ти је овај начин учења тежак или лак.

Хвала на сарадњи!

****

1. На претходним часовима си садржаје из математике изучавао/ла на тај начин што си самостално откривао/ла нове појмове, правила итд.

   Колико су ти се свидели овакви часови?

   а) уопште ми се нису свидели

   б) свидели су ми се

   ц) изузетно су ми се свидели

2. Да ли је учење помоћу откривања занимљивије од „уобичајеног“ рада на часу математике?

   а) није занимљивије

   б) исто је

   ц) занимљивије је

   д) много је занимљивије

3. Колико често сте раније учили путем открића на часовима математике?

   а) никад нисмо учили на тај начин

   б) понекад смо учили на овакав начин

   в) често смо учили на овакав начин

4. Када сте на претходним часовима математике садржаје учили путем открића, учење ти је било:

   а) лако

   б) тешко

   ц) исто као и на досадашњим часовима

5. Приликом учења математичких садржаја путем открића био/ла сам:
   а) веома активан/а и самостално сам долазио/ла до нових сазнања
   б) подједнако активан/а као и на свим часовима математике до тада
   ц) мање активан/а него на осталим часовима математике

6. Учење математике путем открића ми је помогло да:
   а) боље разумем градиво из математике
   б) подједнако разумем градиво као и на свим часовима математике до тада
   ц) мање разумем градиво него до тада

7. Коју оцену би себи дао/ла за знање које си стекао/ла учећи путем открића?
   а) одличан – 5
   б) врлодобар – 4
   в) добар – 3
   ц) довољан – 2
   д) недовољан – 1

8. Задаци за откривање појмова, правила итд. и за увежбавање са материјала за самостално учење за тебе су били:
   а) изузетно тешки
   б) мало тешки
   в) нису били тешки
   б) веома лаки

9. Садржаје из математике би овако волео/ла да учиш:
   а) на сваком часу
   б) понекад
   в) никад

10. Учење путем открића је утицало да математику:
   а) више волиш
   б) исто волиш
   ц) мање волиш

11. Да ли би волео/ла да и градиво из других предмета учиш путем открића?

    а) волео/ла бих

    б) не бих волео/ла

    ц) не знам

12. Шта ти се највише допадало када си садржаје из математике учио/ла путем открића?

    ____

    ____.

13. Шта ти се није допало када си садржаје из математике учио/ла путем открића?

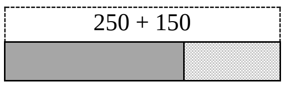
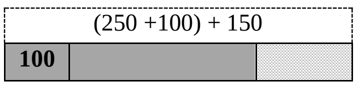
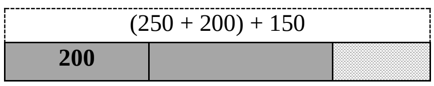
    ____

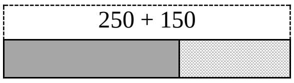
    ____.

ПРИЛОГ 4. Протокол интервјуа за учитеље-реализаторе експерименталног програма

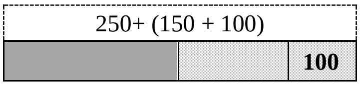
1. Колико често користите учење путем открића на часовима математике?
2. Колико често прилагођавате наставу према могућностима ученика?
3. Да ли сматрате да се учење путем открића може успешно повезати са диференцијацијом садржаја у почетној настави математике?
4. Да ли сте раније повезивали диференцирану наставу и учење путем открића?
5. Да ли су наставне јединице које су обухваћене експерименталним програмом захтевне за реализацију?
6. Да ли су ученици били мотивисани за овакав начин рада?
7. Да ли овакав начин реализације математичких садржаја подиже ниво самосталности и мисаоног ангажовања ученика?
8. Да ли се учењем путем открића на садржајима на три нивоа сложености може утицати на напредовање сваког ученика у погледу образовних постигнућа?
9. Да ли су ученици стекли трајнија и примењива знања?
10. Које су предности и добре стране оваквог начина рада?
11. Шта су евентуални недостаци и ограничења примене овакве организације часа?
12. Да ли ћете у даљем раду примењивати овакав начин реализације наставе математике?

ПРИЛОГ 5. Вежбе у оквиру експерименталног програма

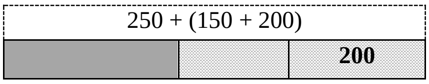
Вежба број 1	
Наставна јединица:	*Зависност збира од промене сабирака*
Тип часа:	обрада
Диференцијација захтева:	***Основни ниво:*** Ученик треба да: – препознаје зависност збира од промене сабирака на цртежима и примерима којима је зависност представљена; – репродукује на једноставним примерима, вербално изражава и именује правило које се односи на зависност збира од промене сабирака. ***Средњи ниво:*** Ученик треба да: – схвати правило о зависности збира од промене сабирака које уочава на одговарајућим примерима и вербално изражава то правило; – симболички (помоћу слова) записује вербално исказано правило које се односи на зависност збира од промене сабирака; – уочава (одређује) „скривене“ вредности слова у примерима којима је представљена зависност збира од промене сабирака; – примењује знања о зависности збира од промене сабирака у експлицитно датим примерима као „олакшицу“ за рационалније рачунање збира у скупу *N*. ***Напредни ниво*:** Ученик треба да: – примењује знања о зависности збира од промене сабирака у решавању текстуалних задатака који се односе на реалне животне ситуације, као и на решавање проблемских задатака.
Ток часа	
Припремна фаза	– Провера домаћег задатка. – Обнављање о компонентама рачунске радње сабирање: **Задатак 1**: *У једној кутији је 680, а у другој 1000 кликера. Колико је укупно кликера?* **Решење:** 680 + 1000 = 1680 Први сабирак је број ______, други сабирак је број ________, збир је запис_________, а вредност збира је број_____. – Циљ часа: открити да ли се и како мења збир ако променимо (повећамо или смањимо) један од сабирака и како то можемо користити као олакшицу при рачунању.
Оперативна фаза	– Самостално учење путем наставних листића на којима су захтеви диференцирани на три нивоа, при чему сваки ученик добија наставни листић у складу са својим способностима. ***Наставни листић за самостално учење – основни ниво*** **Истраживачки задатак 1**: Открити како се мења збир ако се један од сабирака повећа за неки број. **Задатак 1.** *Извршено је сабирање следећих бројева::* **250 + 150 =_____** Први сабирак је ______, други сабирак је_____, збир је број______. а) У наредним примерима је извршено повећање првог сабирка. Погледај слику и утврди какве су промене настале код збира.  250 + 150 = _____  (250 + **100**) + 150 =_____+ 150 =_______ а то је 400 + **100** Први сабирак се повећао за______, па се и збир повећао за _____.  (250 + **200**) +150 =_____+ 150 =______, а то је 400 + **_____** Први сабирак се повећао за _____, па се и збир ________за_____. **Дакле, када први сабирак повећамо за неки број, и збир се __________ за тај исти број.** б) У следећим примерима је извршено повећање другог сабирка. Погледај слику и утврди какве су промене настале код збира.



250 + 150 =_____



250 + (150 + **100**) = 250 +______=______, а то је 400 + _____
Други сабирак се повећао за ____, па се и збир повећао за____.



250 + (150 + **200**) = 250 +______=______=, а то је 400 + _______
Други сабирак се повећао за______, па се и збир ________ за______.

Дакле, када други сабирак повећамо за неки број, и збир се __________ за тај исти број.

Изведи закључак о промени збира након повећања једног од сабирака:

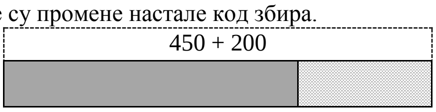
***Закључак 1*: Ако се један од сабирака повећа за неки број, и збир ће се _____________ за тај исти број.**

Истраживачки задатак 2: Открити како се мења збир ако се један од сабирака смањи за неки број.

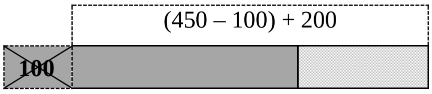
Задатак 2. *Извршено је сабирање следећих бројева:*

450 + 200 = 650 Први сабирак је _______, други сабирак је_______, збир је број_______.

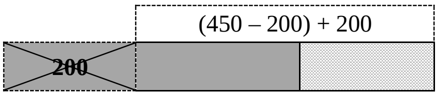
а) У наредним примерима је извршено смањење првог сабирка. Погледај слику и утврди какве су промене настале код збира.



450 + 200 =_____



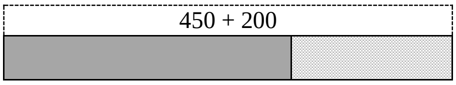
(450 – **100**) + 200 =____+ 200 =_____, а то је 650 – **100**
Први сабирак се смањио за ____, па се и збир смањио за_____.



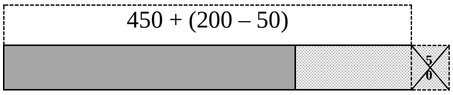
(450 – **200**) + 200 =____+ 200 =____,а то је 650 – ______
Први сабирак се смањио за ___, па се и збир смањио за ______.

Дакле, када први сабирак смањимо за неки број, и збир се __________ за тај исти број.

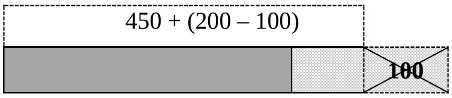
б) У следећим примерима је извршено смањење другог сабирка. Погледај слику и утврди какве су промене настале код збира.



450 + 200 =_____



450 + (200 – **50**) = 450 +___ = ____, а то је 650 – ___
Други сабирак се смањио за ___, па се и збир смањио за___.



450 + (200 – **100**) = 450+___ = ___, а то је 650 –____ Други сабирак се смањио за _______, па се и збир смањио за ______.

Дакле, када други сабирак смањимо за неки број, и збир се ______ за тај исти број.

Изведи општи закључак о промени збира након смањења једног од сабирака:

***Закључак 2*: Ако се један од сабирака смањи за неки број, и збир ће се _____________ за тај исти број. Ово својство сабирања се назива _____________________________. (погледај наслов на табли!)**

Наставни листић за самостално учење – средњи ниво

Истраживачки задатак 1: Открити како се мења збир ако се један од сабирака повећа за неки број.

Задатак 1. *Изврши сабирање следећих бројева:*

***а)* 3354 + 46 =______**

Први сабирак је ______, други сабирак је_____, збир је број______.

	б) У наредним примерима утврди како се мења први сабирак (из примера под *а*) и какве су промене настале код збира. 1) 3355 + 46 = ____ Први сабирак је повећан за ____ и збир се____за ____. 2) 3360 + 46 =____ Први сабирак је _____за______ и збир се_____ за ____. 3) 3364 + 46 =____ Први сабирак је _____ за _____ и збир се____ за _____. **Дакле, ако се први сабирак повећа за неки број, и збир се _________ за___________.** У наредним примерима је извршена промена другог сабирка. Упореди промену збира са бројевима за које смо променили други сабирак. 4) 3354 + 47 =___ Други сабирак је ____ за ____ и збир се_____ за _____. 5) 3354 + 50 =___ Други сабирак је _____за_____ и збир се _____ за ____. 6) 3354 + 56 =___ Други сабирак је _____за ____ и збир се _____ за ____. **Дакле, ако се други сабирак_________за неки број, и збир се ________ за____________.** На основу претходних примера изведи општи закључак о промени збира након повећања једног од сабирака: ***Закључак1*: Ако се један од сабирака_________ за неки број, и збир ће се _____________ за ___________________________.** Како сабирци могу бити било који природни бројеви, уместо бројева се могу написати слова као замена за било који природан број. Претходни закључак можемо записати овако: ако је $\boldsymbol{a + b = c}$**, онда је** $\boldsymbol{(a + x) + b = c +}$ **____** и $\boldsymbol{a + (b + x) = c +}$ **____.** **Истраживачки задатак 2**: Открити како се мења збир ако се један од сабирака смањи за неки број. **Задатак 2**. *Изврши сабирање следећих бројева:* ***а)* 4940 + 40 =_____** Први сабирак је ______, други сабирак је_____, збир је број______. б) У наредним примерима утврди како се мења први сабирак (из примера под *а*) и какве су промене настале код збира. 1) 4920 + 40 =___ Први сабирак је смањен за _____ и збир се______за _____. 2) 4910 + 40 =___ Први сабирак је _____ за_____ и збир се______ за ______. 3) 4900 + 40 =___ Први сабирак је ______ за_____ и збир се_______ за ____. **Дакле, ако се први сабирак смањи за неки број, и збир се _________ за ___________.** в) У наредним примерима је извршена промена другог сабирка (из примера под *а*). Упореди промену збира са бројевима за које смо променили други сабирак. 4) 4940 + 30 = ___ Други сабирак је______ за_____ и збир се______за _____. 5) 4940 + 20 = ___ Други сабирак је_____ за ______ и збир се_____ за_____. 6) 4940 + 10 =___ Други сабирак је______за______ и збир се______за _____. **Дакле, ако се други сабирак ___________ за неки број, и збир се _________ за_____________.** На основу претходних примера изведи општи закључак о промени збира након смањења једног од сабирака: ***Закључак 2*: Ако се један од сабирака ________за неки број, и збир ће се _____________ за тај исти број.** Како се уместо бројева могу ставити слова као замена за било који природан број, претходни закључак можемо записати овако: ако је $\boldsymbol{a + b = c}$**,** онда је $\boldsymbol{(a - x) + b = c -}$ **____** и $\boldsymbol{a + (b - x) = c -}$ **____** (при чему је $\boldsymbol{a > x}$ или $\boldsymbol{a = x}$ и $\boldsymbol{b > x}$ или $\boldsymbol{b = x}$**).** **Ово својство сабирања се назива __________________________________.** **(сети се где би могао/ла да видиш назив)** ***Наставни листић за самостално учење – напредни ниво*** **Истраживачки задатак 1**: Открити како се мења збир ако се један од сабирака повећа за неки број. **Задатак 1**. *На столу су две кутије са кликерима. У једној кутији је 1100 црвених, а у другој 790 белих кликера.* а) Укупан број кликера је: ______+________=_______. Први сабирак је ______, други сабирак је_____, збир је број______. б) *Мила је додала 30 црвених кликера у прву кутију.* Напиши преко бројевног израза и израчунај укупан број кликера након што је Мила додала 30 кликера у прву кутију. (______+______) +______=______+______=_____= 1890 +_____ Шта се десило са бројем црвених куглица у првој кутији?________________________. Шта се десило са укупним бројем куглица?___________________________. Дакле, први сабирак се _____________ и збир се________________. в) *Да је Мила, уместо у прву, ставила 50 белих кликера у другу кутију, како би се променио укупан број кликера?* Напиши преко бројевног израза и израчунај укупан број кликера након што је Мила

	додала 50 белих кликера у другу кутију. ______+ (______+______) =______+_____=_____= 1890 +_____ Шта се десило са бројем куглица у другој кутији?___________________. Шта се десило са укупним бројем кликера?_________________________. Дакле, други сабирак се _____________ и збир се________________. Упореди промену збира са бројевима за које смо увећавали сабирке. ***Закључак 1:*****____.** Пошто дата слова замењују било који природан број, ако знаш да је $\boldsymbol{a + b = c}$, напиши чему је једнако $\boldsymbol{(a + x) + b =}$ **____+ ____** и $\boldsymbol{a + (b + x) =}$ **_____ + _____.** **Истраживачки задатак 2**: Открити како се мења збир ако се један од сабирака смањи за неки број. **Задатак 2.** *На столу су две кутије са кликерима. У једној кутији је 1100 црвених, а у другој 790 белих кликера.* а) Укупан број кликера је: ______+_______=_______. Први сабирак је ______, други сабирак је_____, збир је број______. б) *Мила је узела 20 црвених кликера из прве кутије.* Напиши преко бројевног израза и израчунај укупан број кликера након што је Мила узела 20 кликера из прве кутије. (______– ______) +______=_______+______=______= 1890 - _____ Шта се десило са бројем куглица у првој кутији?______________________. Шта се десило са укупним бројем куглица?___________________________. Дакле, први сабирак се _____________ и збир се________________. в) *Да је Мила, уместо из прве, узела 10 белих кликера из друге кутије, како би се променио укупан број кликера?* Напиши бројевни израз и израчунај укупан број кликера након што је Мила узела 10 кликера из друге кутије. ______+ (______ – _____) =_______+_______=_______= 1890 – ______ Шта се десило са бројем куглица у другој кутији?____________________. Шта се десило са укупним бројем кликера?_________________________. Дакле, други сабирак се _____________ и збир се________________. Упореди промену збира са бројевима за које смо смањивали сабирке. ***Закључак 2:*****____.** **Ако су** $\boldsymbol{a, b, c}$ **и** $\boldsymbol{x}$ природни бројеви и ако знаш да је $\boldsymbol{a + b = c}$, **напиши чему је једнако** $\boldsymbol{(a - x) + b =}$ **___ – ____ и** $\boldsymbol{a + (b - x) =}$ **____ – ____,** при чему је $\boldsymbol{a > x}$ или $\boldsymbol{a = x}$ и $\boldsymbol{b > x}$ или $\boldsymbol{b = x}$. **Ово својство сабирања се назива __________________________.** – Ученици добијају повратну информацију о тачности у раду и извођењу закључака. Утврђују број тачних и погрешних одговора, исправљају грешке и, уз аргументовани разговор са учитељем и осталим ученицима исте групе, уче закључке наставне јединице. – Ученици увежбавају новоусвојена знања помоћу наставних листића на којима су задацима диференцирани на три нивоа сложености.
Верификативна фаза	– Прегледно понављање садржаја обрађених на часу (рекапитулација обрађених садржаја). Шта смо данас научили? Како се мења збир у зависности од промене сабирака? – Давање додатних подстицаја и задужења за рад. – Евалуација часа од стране ученика и учитеља.

Вежба број 2	
Наставна јединица:	*Зависност збира од промене сабирака*
Тип часа:	утврђивање
Диференцијација захтева:	***Основни ниво:*** Ученик треба да: – препознаје зависност збира од промене сабирака на цртежима и примерима којима је зависност представљена; – репродукује на једноставним примерима, вербално изражава и именује правило које се односи на зависност збира од промене сабирака. ***Средњи ниво:*** Ученик треба да: – схвати правило о зависности збира од промене сабирака које уочава на одговарајућим примерима и вербално изражава то правило; – симболички (помоћу слова) записује вербално исказано правило које се односи на зависност збира од промене сабирака; – уочава (одређује) „скривене“ вредности слова у примерима којима је представљена зависност збира од промене сабирака; – примењује знања о зависности збира од промене сабирака у експлицитно датим примерима као „олакшицу“ за рационалније рачунање збира у скупу N. ***Напредни ниво*:** Ученик треба да: – примењује знања о зависности збира од промене сабирака у решавању текстуалних задатака који се односе на реалне животне ситуације, као и на решавање проблемских задатака.
Ток часа	
Припремна фаза	– Провера домаћег задатка. – Обнављање превила о зависности збира од промене сабирака. – Циљ часа: утврдити и увежбати стечена знања о зависности збира од промене сабирака.
Оперативна фаза	– Самостални рад ученика на наставним листићима са диференцираним садржајима. Сваки наставни листић, поред задатака за конкретни ниво, садржи и задатке за наредни виши ниво. ***Наставни листић за самостално вежбање – основни ниво*** 1. Допуни започету реченицу. Ако први сабирак повећамо за неки број, збир ће се _______________ за тај број. 2. Како се назива својство из претходног задатка?______________________________. 3. Збир двају бројева је 1000. а) Ако се први сабирак повећа за 10, збир ће износити ________________________. б) Ако се други сабирак смањи за 20, збир ће износити________________________. 4. Не рачунајући допиши шта недостаје: 1260 + 500 = 1760 (1260 + 133) + 500 = 1760 +____ 1260 + (500 - 300) = 1760 – _____ (1260 – x) + 500 = 1760 – ______ 1260 + (500 +354) = 1760 + _____ 5. Шта ће се догодити са збиром ако се један од сабирака увећа за 200, а други увећа за 400? ____. 6. Ако је **7560 + 520 = 8080**, онда је (7560 + 260) + 520= 8080 + _____=_____ (7560 – 260) + 520 = 8080 -_____=_____ б) **2350 + 560 = 2910**, онда је 2350 + (560 + 320) = 2910 + _____ = _____ 2350 + (560 – 320) = 2910 – _____ = _____ ***Наставни листић за самостално вежбање – средњи ниво*** 1. Збир двају бројева је 7686. Како ће се променити збир ако се један сабирак повећа за 860, а други смањи за 145?___________________________________. ***2.*** Ако знаш да је тачна једнакост 1450 + 250 = 1700, упиши одговарајуће резултате на црте рачунајући само једном: а) (1450 – 45) + 250 =______ б) 1450 + (250 + 25) =______

3. Ако је $\underline{a + b = 9200}$, на сваку линију (без израчунавања) напиши одговарајући број тако да једнакост буде тачна.

   (a + ______) + b = 9200 + 600 $\qquad$ a + (b + _____) = 9200 + 125

   a + (b – _____) = 9200 – 200 $\qquad$ (a – ______) + b = 9200 – 64

4. Одреди вредности променљиве a упоређујући другу једнакост са првом.

   а) 6382 +108 = 6490
   (6382 + a) + 108 = 7490
   a =________

   б) 3524 + 434 = 3958
   3524 + (434 – a) = 3900
   a =________

5. Израчунај збир највећег шестоцифреног и најмањег петоцифреног броја:
   ____

   Како ће се овај збир променити ако се:
   а) први сабирак повећа за највећи двоцифрени број? _____________________.
   б) други сабирак смањи за највећи број прве стотине?______________________.

6. Заокружи већи збир без израчунавања:

а)	б)	в)	г)
2782 + 9	24830 + 25	32827 + 38	66666 + 50
2982 + 9	24830 + 26	32827 + 28	65666 + 50

Наставни листић за самостално вежбање – напредни ниво

1. Ако масу кромпира у једном џаку смањимо за 25 килограма, шта треба да урадимо са масом кромпира у другом џаку да би се укупна маса кромпира смањила за 55 килограма?____.

2. Лука, Нина и Мила су за месец мај укупно уштедели 38575 динара. Колико новца су укупно уштедели јуна месеца ако се зна да је Лука уштедео 4500 динара мање него претходног месеца, Нина 2850 динара мање него претходног месеца, а Мила 10860 динара више него претходног месеца? (Примени правило промене збира у зависности од промене сабирака.)
   ____.

3. У два џака је стављено 230500 g брашна. Из првог џака је извађено 3450 g, а у други џак додато још 1500 g. Колико је сада грама брашна у овим двама џаковима? (Примени правило промене збира у зависности од промене сабирака.)
   ____.

4. Када је први сабирак повећан за 1220, збир је повећан за 1000. Како је промењен други сабирак?
   ____.

5. Ненад и његов брат Саша имали су укупно 5200 динара. Обојица су купили по лопту од 200 динара. Колико имају укупно новца после куповине лопти? (Примени правило промене збира у зависности од промене сабирака.)
   ____.

Верификативна фаза	– Повратна информација о тачности задатака са наставних листића. – Давање додатних подстицаја и задужења за рад. – Евалуација часа од стране ученика и учитеља.

<table>
<tr><th colspan="2">Вежба број 3</th></tr>
<tr><td>Наставна јединица:</td><td>Зависност разлике од промене умањеника</td></tr>
<tr><td>Тип часа:</td><td>обрада</td></tr>
<tr><td>Диференцијација захтева:</td><td>Основни ниво: Ученик треба да:
– препознаје зависност разлике од промене умањеника на цртежима и примерима којима је зависност представљена;
– репродукује на једноставним примерима, вербално изражава и именује правило које се односи на зависност разлике од промене умањеника.
Средњи ниво: Ученик треба да:
– схвати правило о зависности разлике од промене умањеника које уочава на одговарајућим примерима и вербално изражава то правило;
– симболички (помоћу слова) записује вербално исказано правило које се односи на зависност разлике од промене умањеника;
– уочава (одређује) „скривене“ вредности слова у примерима којима је представљена зависност разлике од промене умањеника;
– примењује знања о зависности разлике од промене умањеника у експлицитно датим примерима као „олакшицу“ за рационалније рачунање разлике у скупу N.
Напредни ниво: Ученик треба да:
– примењује знања о зависности разлике од промене умањеника у решавању текстуалних задатака који се односе на реалне животне ситуације, као и на решавање проблемских задатака.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Ток часа</th></tr>
<tr><td>Припремна фаза</td><td>– Провера домаћег задатка.
– Обнављање о компонентама рачунске радње одузимање:
Задатак: У једној књижари има 1100 књига. Продавац је продао 300 књига. Колико је књига остало у књижари? Решење: <u>1100</u> – <u>300</u> = <u>800</u>
У претходној једнакости умањеник је број ______, умањилац је број ________, разлика је запис_________, а вредност разлике је број_____. Циљ часа: открити да ли се и како мења разлика ако променимо (повећамо или смањимо) умањеник и како то можемо користити као олакшицу при рачунању.</td></tr>
<tr><td></td><td>– Самостално учење путем наставних листића на којима су захтеви диференцирани на три нивоа, при чему сваки ученик добија наставни листић у складу са својим способностима.

Наставни листић за самостално учење – основни ниво

Истраживачки задатак 1: Открити како се мења разлика ако се умањеник повећа за неки број.
Задатак 1. Извршено је одузимање следећих бројева:
900 – 200 =_____ Умањеник је ______, умањилац је_____, разлика је број______.
У наредним примерима је извршено повећање умањеника. Погледај слику и утврди какве су промене настале код разлике.

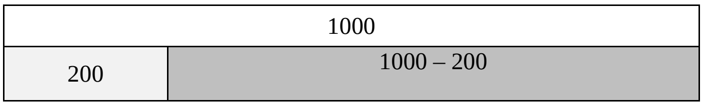
<table><tr><td colspan="2">900</td></tr><tr><td>200</td><td>900 – 200</td></tr></table>
900 – 200 =_______

<table><tr><td colspan="2">900</td><td>100</td></tr><tr><td>200</td><td colspan="2">(900 + 100) – 200</td></tr></table>
(900 + 100) – 200 = ____ – 200 = ____,

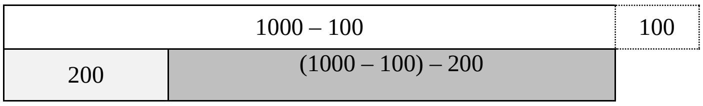
а то је 700 + 100. Умањеник је повећан за ________, па се и разлика повећала за ________.
<table><tr><td colspan="2">900</td><td>150</td></tr><tr><td>200</td><td colspan="2">(900 + 150) – 200</td></tr></table>
(900 + 150) – 200 =____– 200 =___, а то је 700 + 150.
Умањеник је повећан за ______, па се и разлика повећала за ______.
Дакле, када умањеник повећамо за неки број, и разлика се ______ за тај исти број.
Изведи општи закључак о промени разлике након повећања умањеника.
Закључак 1: Ако се умањеник повећа за неки број, и разлика ће се _____________ за тај исти број.
Истраживачки задатак 2: Открити како се мења разлика ако се умањеник смањи за неки број.</td></tr>
</table>

Оперативна фаза

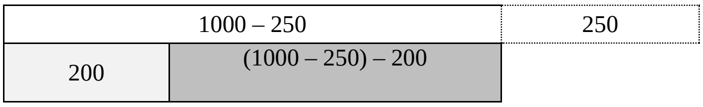
Задатак 2. *Извршено је одузимање следећих бројева::*
1000 – 200 =_____ Умањеник је ______, умањилац је_____, разлика је број______.
У наредним примерима је извршено смањење умањеника. Погледај слику и утврди какве су промене настале код разлике.



1000 – 200 =**_____**



(1000 – 100) – 200 =____ – 200 =**____,** а то је 800 – **100.** Умањеник је смањен за ___, па се и разлика смањила за_____.



(1000 – 250) – 200 =**_____** – 200 =**_____,** а то је 800 – **250.**

Умањеник је смањен за ________, па се и разлика смањила за _________.
Изведи општи закључак о промени разлике након смањења умањеника:
***Закључак 2*: Ако се умањеник смањи за неки број, и разлика ће се _____________ за тај исти број. Ово својство одузимања се назива __________________ (погледај наслов на табли).**

Наставни листић за самостално учење – средњи ниво

Истраживачки задатак 1: Открити како се мења разлика ако се умањеник повећа за неки број.
Задатак 1. *Изврши одузимање следећих бројева:*
***а)* 1545 –146 =______** Умањеник је _______, умањилац је_______, разлика је број________.
б) У наредним примерима утврди како се мења умањеник (из примера под *а*) и какве су промене настале код разлике. Упореди промену разлике са бројевима за које смо променили умањеник.
1550 – 146 =_____ Умањеник је повећан за ________ и разлика се __________ за _______.
1560 – 146 =_____ Умањеник је_______ за ___ _____ и разлика се ___________за ___ ____.
1575 – 146 =_____ Умањеник је _______ за ____ ____ и разлика се ___________за __ ____.
На основу претходних примера изведи општи закључак о промени разлике након повећања умањеника:
***Закључак1*: Ако се умањеник_______ за неки број, и разлика ће се _________ за тај исти број.**
Уместо бројева се могу ставити слова као замена за било који природан број. Ако су ***a, b, c*** и ***x*** природни бројеви и ако важи да је ***a – b = c* (*a > b*),** онда је **(*a + x*) – *b = c* + ____.**
Истраживачки задатак 2: Открити како се мења разлика ако се умањеник смањи за неки број.
Задатак 2. . *Изврши одузимање следећих бројева:*
***а)* 2940 – 350 =_______** Умањеник је ______, умањилац је_____, разлика је број______.
б) У наредним примерима утврди како се мења умањеник и какве су промене настале код разлике. У каквом су односу број за који смо променили умањеник и промена разлике?
2930 – 350 =______ Умањеник је смањен за ________ и разлика се ____________за __ ___.
2910 – 350 =______ Умањеник је _______за ________ и разлика се ___________ __за _____.
2900 – 350 =______ Умањеник је _______за ____ __ __ и разлика се ______ ______за _____.
На основу претходних примера изведи општи закључак о промени разлике након смањења умањеника:
***Закључак2*: Ако се умањеник ________за неки број, и разлика ће се ________ за тај исти број.**
Како се уместо бројева могу ставити слова као замена за било који природан број, претходни закључак можемо записати овако: **ако је *a – b = c*** (где је ***a > b*),** онда је **(*a – x*) – *b = c* –_____**, при чему је ***a > x.***
Ово својство одузимања се назива ______________ (сети се где би могао/ла да видиш назив).

Наставни листић за самостално учење – напредни ниво

Истраживачки задатак 1: Открити како се мења разлика ако се умањеник повећа за неки број.

	Задатак 1. Марко има плату 28000 динара, а Милина плата износи 25000 динара. За колико Марко има већу плату од Миле? Марко је следећег месеца добио повишицу од 4300 динара, а Мила је остала на истој плати. За колико се сада разликују њихове плате? а) Разлика у плати износи: ______– _______=_______. Умањеник је _______, умањилац је______, разлика је број______. б) Напиши бројевни израза и израчунај вредност разлике у плати након што је Марко добио повишицу. (______+______) –______=_______–_______=_______ Шта се десило са Марковом платом?____. Шта се десило са разликом у плати?____. Дакле, умањеник се _____________ и разлика се________________. в) За колико би се разликовале Маркова и Милина плата да је Маркова повишица износила 5000 динара? Напиши бројевни израз и израчунај његову вредност. (______+______) –______=_______–______=_______ Шта десило са Марковом платом?____. Шта се десило са разликом у плати?____. Дакле, умањеник се _____________ и разлика се________________. Упореди промену разлике са бројем за који је увећан умањеник. Шта закључујеш? ***Закључак 1:***____. Ако су ***a, b, c*** и ***x*** природни бројеви и ако је ***a* – *b* = *c*** (где је ***a* > *b*,**) напиши чему је **(*a* + *x*) – *b* = ____+ ____ .** **Истраживачки задатак 2**: Открити како се мења разлика ако се умањеник смањи за неки број. **Задатак 2.** Марко има плату 28000 динара, а Милина плата износи 25000 динара. За колико Марко има већу плату од Миле? Марко је следећег месеца био на боловању па је примио умањену плату за 3250 динара, а Мила је остала на истој плати. За колико се сада разликују њихове плате? а) Разлика у плати износи: ______– _______=_______. Умањеник је ______, умањилац је_____, разлика је број______. б) Напиши бројевни израз и израчунај вредност разлике у плати након што је Марко добио умањену плату. (______–______) – _____=______–______=_______ Шта се десило са Марковом платом?_______________________ ______________________. Шта се десило са разликом у плати?____. Дакле, умањеник се _____________ и разлика се________________. в) За колико би се разликовале Маркова и Милина плата да је Марко био на боловању два месеца? Напиши бројевни израз и израчунај његову вредност. (______–______) –______=_______– ______=_______ Шта се десило са Марковом платом?____. Шта се десило са разликом у плати?____. Дакле, умањеник се _____________ и разлика се________________. Упореди промену разлике са бројем за који је смањен умањеник. Шта закључујеш? ***Закључак 2:***____. Ако су ***a, b, c*** и ***x*** природни бројеви и ако је ***a* - *b* = *c*** (где је ***a* > *b*),** напиши чему је једнако **(*a* – *x*) – *b* = ___ – ___**, где је је ***a* > *x*** или ***a*= *x*. Ово својство одузимања се назива ___________________________________.** – Ученици добијају повратну информацију о тачности у раду и извођењу закључака. Утврђују број тачних и погрешних одговора, исправљају грешке и, уз аргументовани разговор са учитељем и осталим ученицима исте групе, уче закључке наставне јединице. – Ученици увежбавају новоусвојена знања помоћу наставних листића на којима су задацима диференцирани на три нивоа сложености.
Верификативна фаза	– Прегледно понављање садржаја обрађених на часу (рекапитулација обрађених садржаја). Шта смо данас научили? Како се мења разлика у зависности од промене умањеника? – Давање додатних подстицаја и задужења за рад. – Евалуација часа од стране ученика и учитеља.

<table>
<tr><th colspan="2">Вежба број 4</th></tr>
<tr><td>Наставна јединица:</td><td>Зависност разлике од промене умањиоца</td></tr>
<tr><td>Тип часа:</td><td>обрада</td></tr>
<tr><td>Диференцијација захтева:</td><td>Основни ниво: Ученик треба да:
– препознаје зависност разлике од промене умањиоца на цртежима и примерима којима је зависност представљена;
– репродукује на једноставним примерима, вербално изражава и именује правило које се односи на зависност разлике од промене умањиоца;
Средњи ниво: Ученик треба да:
– схвати правило о зависности разлике од промене умањиоца које уочава на одговарајућим примерима и вербално изражава то правило;
– симболички (помоћу слова) записује вербално исказано правило које се односи на зависност разлике од промене умањиоца;
– уочава (одређује) „скривене“ вредности слова у примерима којима је представљена зависност разлике од промене умањиоца;
– примењује знања о зависности разлике од промене умањеника у експлицитно датим примерима као „олакшицу“ при рачунању.
Напредни ниво: Ученик треба да:
– примењује знања о зависности разлике од промене умањиоца у решавању текстуалних задатака који се односе на реалне животне ситуације, као и на решавање проблемских задатака.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Ток часа</th></tr>
<tr><td>Припремна фаза</td><td>– Провера домаћег задатка.

– Обнављање о зависности разлике од промене умањеника:

Задатак: Изврши следећа одузимања:
а) 1500 – 500 = <u>1000</u>
У претходној једнакости умањеник је број ___, умањилац је број______, разлика је запис______, а вредност разлике је број_____.
б) 2000 – 500 = <u>1500</u>
Шта се десило са умањеником у односу на пример под а? Каква је промена настала код разлике?
в) 1300 – 500 = <u>800</u>
Како се у овом примеру променио умањеник у односу на пример под а и каква је промена разлике?
Циљ часа: открити да ли се и како мења разлика ако променимо (повећамо или смањимо) умањилац и како то можемо користити као олакшицу при рачунању.</td></tr>
<tr><td>Оперативна фаза</td><td>– Самостално учење путем наставних листића на којима су захтеви диференцирани на три нивоа, при чему сваки ученик добија наставни листић у складу са својим способностима.

Наставни листић за самостално учење – основни ниво

Истраживачки задатак 1: Открити како се мења разлика ако се умањилац повећа за неки број.
Задатак 1. Изврши одузимање следећих бројева:
1000 – 300 =_____ Умањеник је ______, умањилац је_____, разлика је број______.
У наредним примерима је извршено повећање умањиоца. Погледај слику и утврди какве су промене настале код разлике.

<table><tr><td colspan="2">1000</td></tr><tr><td>1000 – 300</td><td>300</td></tr></table>
1000 – 300 =_____

<table><tr><td colspan="3">1000</td></tr><tr><td>100 – (300 + 100)</td><td>100</td><td>300</td></tr></table>
1000 – (300 + 100) = 1000 – ____=____, а то је 700 – 100. Умањилац је повећан за ____, а разлика се смањила за _____.

<table><tr><td colspan="3">1000</td></tr><tr><td>1000 – (300 + 150)</td><td>150</td><td>300</td></tr></table>
1000 – (300 + 150) = 1000 – ____=____, а то је 700 – 150. Умањилац је повећан за ____, а разлика се смањила за _____.</td></tr>
</table>

Изведи општи закључак о промени разлике након повећања умањиоца.

***Закључак 1*: Ако се умањилац повећа за неки број, разлика ће се _____________ за тај исти број.**

Истраживачки задатак 2: Открити како се мења разлика ако се умањилац смањи за неки број.

Задатак 2. *Извршено је одузимање следећих бројева:*

950 – **350 =_____** Умањеник је ______, умањилац је_____, разлика је број______.

У наредним примерима је извршено смањење умањиоца. Погледај слику и утврди какве су промене настале код разлике.

950	
950 – 350	**350**

950 – 350 =_____

950		
950 – (3550 – 100)	**100**	**350 – 100**

950 – (350 – 100) =
950 – ___=____, а то је 600 + **100.** Умањилац је смањен за ____, а разлика се повећала за _____.

950		
950 – (350 – 150)	**150**	**350 –150**

950 – (350 – 150) =
950 – ____=___, а то је 600 + **150.** Умањилац је смањен за ____, а разлика се повећала за _____.

Изведи општи закључак о промени разлике након смањења умањиоца:

***Закључак 2*: Ако се умањилац смањи за неки број, разлика ће се ____________ за тај исти број. Ово својство одузимања се назива _________________ (погледај наслов на табли).**

Наставни листић за самостално учење – средњи ниво

Истраживачки задатак 1: Открити како се мења разлика ако се умањилац повећа за неки број.

Задатак 1. *Изврши одузимање следећих бројева:*

***а)* 2450 – 330 =______**

Умањеник је ______, умањилац је_____, разлика је број______.

б) У наредним примерима утврди како се мења умањилац (из примера под *а*) и какве су промене настале код разлике. Упореди промену разлике са бројевима за које смо променили умањилац.

4) 2450 – 340 =______ Умањилац је повећан за _______ и разлика се __________за ______.
5) 2450 – 350 =______ Умањилац је _________ за ______ и разлика се _________за_______.
6) 2450 – 430 =______ Умањилац је ________за ______ и разлика се _________за_______.

На основу претходних примера изведи општи закључак о промени разлике након повећања умањиоца:

***Закључак1*: Ако се умањилац_________ за неки број, разлика ће се _____________ за тај исти број.**

Уместо бројева се могу ставити слова као замена за било који природан број. Ако су ***a, b, c*** и ***x*** природни бројеви и ако важи да је ***a* – *b* = *c*** (где је ***a* > *b*),** онда је ***a* – (*b* + *x*) = *c* –____.**

Истраживачки задатак 2: Открити како се мења разлика ако се умањилац смањи за неки број.

Задатак 2. *Изврши одузимање следећих бројева*

***а)* 1950 – 640 =_____**

Умањеник је ______, умањилац је_____, разлика је број______.

б) У наредним примерима утврди како се мења умањилац (из примера под *а*) и какве су промене настале код разлике.

1) 1950 – 630 = ______ Умањилац је смањен за ________, разлика се ________за ______.
2) 1950 – 600 = ______ Умањилац је _________ за ______, разлика се ________за ______.
3) 1950 – 540 = ______ Умањилац је _________ за ______, разлика се ________за ______.

На основу претходних примера изведи општи закључак о промени разлике након смањења умањиоца:

***Закључак2*: Ако се умањилац __________за неки број, разлика ће се _____________ за тај исти број.**

Како се уместо бројева могу ставити слова као замена за било који природан број, претходни закључак можемо записати овако: **ако је *a* – *b* = *c*** (где је ***a* > *b*),** онда је ***a* – (*b* – *x*) = *c* +___**, при чему је ***b* > *x*** или ***b* = *x*.**

	Ово својство одузимања се назива __________________ (сети се где би могао/ла да видиш назив). ***Наставни листић за самостално учење – напредни ниво*** **Истраживачки задатак 1**: Открити како се мења разлика ако се умањилац повећа за неки број. **Задатак 1.** Урош је од своје плате која износи 32455 динара плаћао месечне трошкове у износу од 7650 динара, а остатак новца је штедео. Међутим, дошло је до поскупљења струје, па су месечни трошкови повећани за 650 динара. Шта се десило са Урошевом уштеђевином? а) Колика је била Урошева месечна уштеђевина пре поскупљења струје: ____– ____=_____. Умањеник је ______, умањилац је_____, разлика је број______. б) Напиши преко бројевног израза и израчунај износ Урошеве месечне уштеђевине након поскупљења струје. ______– (_____+_____) =_____–_____=_____ Шта се десило са износом месечних трошкова?______________________________________. Шта се десило са Урошевом уштеђевином?____. Дакле, умањилац се _____________, разлика се________________. в) Колики би био износ Урошеве месечне уштеђевине да је поскупљење струје износило 800 динара? Напиши бројевни израз и израчунај његову вредност. _____ – (_____+_____) =_____– _____=_____ Шта се десило са износом месечних трошкова?__________________________________. Шта се десило са Урошевом уштеђевином?____. Дакле, умањилац се _____________, разлика се________________. Упореди промену разлике са бројем за који је повећан умањилац. Шта закључујеш? ***Закључак 1:***____. Ако су ***a, b, c*** и ***x*** природни бројеви и ако је ***a - b = c*** (где је ***a > b***)***,*** напиши чему је једнако ***a* – (*b* + *x*) = ____– ____.** **Истраживачки задатак 2**: Открити како се мења разлика ако се умањилац смањи за неки број. **Задатак 2.** Марко је желео да купи патике које коштају 1447 динара. Пошто је у новчанику имао новчаницу од 2000 динара, Марко је рачунао колико ће износити кусур. На каси му је продавачица рекла да има попуст на патике које је одабрао у износу од 356 динара. Колико ће сада износити кусур? а) Марков кусур без попуста износи: _____– _____=_______. Умањеник је ______, умањилац је_____, разлика је број______. б) Напиши преко бројевног израза и израчунај износ кусура који би Марко требало да добије са попустом. _____– (____– ____) =_____–_____=_____ Шта се десило са ценом Маркових патика?_____________________________________. Шта се десило са кусуром који је Марко добио?_____________________________________. Дакле, умањилац се _____________, разлика се________________. в) Колики би био кусур да је попуст износио 450 динара? Напиши преко бројевног израза и израчунај његову вредност. _____ – (____– ____) =_____–_____=_____ Шта се десило са ценом Маркових патика?_____________________________________. Шта се десило са кусуром који је Марко добио?_____________________________________. Дакле, умањилац се _____________ , разлика се________________. Упореди промену разлике са бројем за који је смањен умањилац. Шта закључујеш? ***Закључак 2:***____. Ако су ***a, b, c*** и ***x*** природни бројеви и ако је ***a* – *b* = *c*** (где је ***a > b***)***,*** напиши чему је једнако ***a* – (*b* – *x*) = _____ + ____,** где је је ***b > x*** или ***b = x.*** **Ово својство одузимања се назива ____.** – Ученици добијају повратну информацију о тачности у раду и извођењу закључака. Утврђују број тачних и погрешних одговора, исправљају грешке и, уз аргументовани разговор са учитељем и осталим ученицима исте групе, уче закључке наставне јединице. – Ученици увежбавају новоусвојена знања помоћу наставних листића на којима су задацима диференцирани на три нивоа сложености.
Верификативна фаза	– Прегледно понављање садржаја обрађених на часу (рекапитулација обрађених садржаја). Шта смо данас научили? Како се мења разлика у зависности од промене умањиоца? – Давање додатних подстицаја и задужења за рад. – Евалуација часа од стране ученика и учитеља.

Вежба број 5	
Наставна јединица:	*Зависност разлике од промене умањеника и умањиоца*
Тип часа:	утврђивање
Диференцијација захтева:	***Основни ниво:*** Ученик треба да: – препознаје зависност разлике од промене умањеника и умањиоца на цртежима којима је зависност представљена; – репродукује на једноставним примерима, вербално изражава и именује правило које се односи на зависност разлике од промене умањеника и умањиоца. ***Средњи ниво:*** Ученик треба да: – схвати правило о зависности разлике од промене умањеника и умањиоца које уочава на одговарајућим примерима и вербално изражава то правило; – симболички (помоћу слова) записује вербално исказано правило које се односи на зависност разлике од промене умањеника и умањиоца; – уочава (одређује) „скривене“ вредности слова у примерима којима је представљена зависност разлике од промене умањеника и умањиоца; – примењује знања о зависности разлике од промене умањеника и умањиоца у експлицитно датим примерима као „олакшицу“ при рачунању. ***Напредни ниво*:** Ученик треба да: – примењује знања о зависности разлике од промене умањеника и умањиоца у решавању текстуалних задатака који се односе на реалне животне ситуације, као и на решавање проблемских задатака.
Ток часа	
Припремна фаза	– Провера домаћег задатка. – Обнављање превила о зависности збира од промене сабирака. – Циљ часа: утврдити и увежбати стечена знања о зависности збира од промене сабирака**.**

Оперативна фаза

– Самостални рад ученика на наставним листићима са диференцираним садржајима. Сваки наставни листић, поред задатака за конкретни ниво, садржи и задатке за наредни виши ниво.

Наставни листић за самостално вежбање – основни ниво

1. Допуни започету реченицу: Ако умањеник повећамо за неки број, разлика ће се____________.
   Ово својство називамо:____.

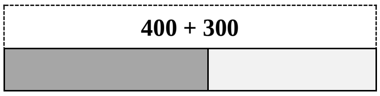
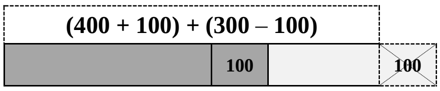
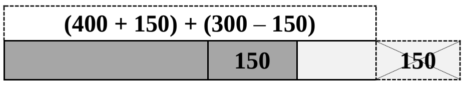
2. а) Шта ће се десити са разликом ако умањилац смањимо за 1250?___________________.
   б) Шта ће се десити са разликом ако умањилац повећамо за 2850? ___________________.
3. Не рачунајући допиши шта недостаје:
   1700 – 400 = 1300
   (1700 + 120) - 400 = 1300 +_____
   1700 – (400 – 150) = 1300 + ______
   1700 – (400 + 50) = 1300 –______
4. На основу својства зависности разлике од промене умањеника и умањиоца, израчунај:
   2000 – 675 = ______
   (2000 – 200) – 6 75 = ______– 200 = ______
   2000 – (675 + 125) = _____–______ = _____

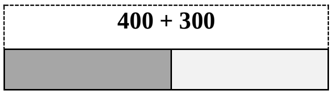
5. Када се умањилац увећа за 340, разлика је 1600. Колика је била разлика пре увећања умањиоца?____.

6. Попуни табелу:

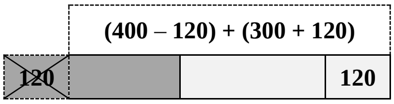
a	500	750	
b	200	150	130
a - b			370
$a - (b + 140)$			
$(a - 260) - b$			

	Наставни листић за самостално вежбање – средњи ниво 1. а) Шта ће се десити са разликом ако умањеник смањимо за 1000, а умањилац повећамо за 2000?____. б) Шта ће се десити са разликом ако умањеник повећамо за 3000, а умањилац смањимо за 1000?____. в) Шта ће се десити са разликом ако умањеник повећамо за 4000, а умањилац повећамо за 6000?____. 2. Ако знаш да је тачна једнакост $1324-1115=209$, упиши одговарајуће резултате на црте рачунајући само једном: а) $(1324-39)-1115=$_______; б) $1324-(1115+41)=$_______; в) $(1324+54)-1115=$_______. 3. Израчунај разлику највећег петоцифреног броја и најмањег петоцифреног броја: ____ Како ће се ова разлика променити ако се: а) умањеник повећа за највећи двоцифрени број?_______________________________. б) умањилац повећа за највећи број пете десетице?______________________________. в) умањилац смањи за највећи број прве стотине?______________________________. 4. Ако је ***a* – *b* = 3100**, израчунај: $(a + 1296) - b$ = _________________________ $a - (b - 1875)$ = _________________________ $(a - 1196) - (b + 1054)$ = ___________________________ 5. Израчунај разлику, а затим одреди вредност x у једнакостима. 17865 – 5432 = $(17865 - x) - 5432 = 10433$ x =_____ $17865 - (5432 + x) = 14433$ x =_____ 6. Заокружи већу разлику без рачунања: а) 2567– 87 б) 15245 – 93 в) 11999 – 54 г) 235678 – 1215 2567– 78 15254 – 93 11999 – 64 245678 – 1215 ***Наставни листић за самостално вежбање – напредни ниво*** 1. Милан има 2531 динара више од Марка. Ако Милан добије још 146 динара, колико треба још да добије Марко да би разлика у новцу који имају Милан и Марко износила 1035 динара?____. Одговор: ____. 2. Ако је разлика двају бројева 97452, одговори како се променио умањеник ако се разлика повећала за 1500, када се од умањиоца одузме 250.___________________________. 3. На један камион је натоварено 10000 килограма терета више него на други камион. Како ће се та разлика понашати ако се са камиона на коме има више терета истовари 3850 килограма?____. Одговор: ____. 4. Сања има за 16000 динара већу плату од Милана. За колико ће Сања имати већу плату од Милана, ако добије повишицу од 7314 динара, а Милан остане на истој плати?____. Одговор: ____.
Верификативна фаза	– Повратна информација о тачности задатака са наставних листића. – Давање додатних подстицаја и задужења за рад. – Евалуација часа од стране ученика и учитеља.

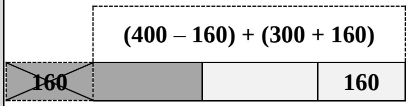
Вежба број 6	
Наставна јединица:	*Сталност збира*
Тип часа:	обрада
Диференцијација захтева:	***Основни ниво:*** Ученик треба да: – препознаје, репродукује на једноставним примерима, вербално изражава и именује правило које се односи на сталност збира; – препознаје сталност збира на цртежима којима је сталност представљена; – препознаје примере који се односе сталност збира. ***Средњи ниво:*** Ученик треба да: – уочи на одговарајућим примерима и схвати сталност збира; – симболички (помоћу слова) записује вербално исказано правило које се односи на сталност збира; – уочи (утврди) „скривене“ вредности слова у примерима у којима је представљена сталност збира; – примењује знања о сталности збира у експлицитно датим примерима као „олакшицу“ за рационалније рачунање. ***Напредни ниво*:** Ученик треба да: – примењује знања о сталности збира у решавању текстуалних задатака који се односе на реалне животне ситације, као и на решавање проблемских задатака.
Ток часа	
Припремна фаза	– Провера домаћег задатка. – Обнављање о зависности збира од промене сабирака: **Задатак 1**: *Изврши следећа сабирања рачунајући само једном:* а)1450 + 1200 =_____ б) (1450 + 300) + 1200 =________________ в) 1450 + (1200 + 500) =_______________ г) (1450 – 100) + 1200 =________________ д) 1450 + (1200 – 150) =________________ Из претходних примера смо се подсетили да ако се један од сабирака _______ или _______ за неки број, и збир ће се _________ или ________ за тај исти број. – Циљ часа: открити како можемо да мењамо сабирке, а да збир остане непромењен и како то можемо користити као олакшицу при рачунању.
Оперативна фаза	– Самостално учење путем наставних листића на којима су захтеви диференцирани на три нивоа, при чему сваки ученик добија наставни листић у складу са својим способностима. ***Наставни листић за самостално учење – основни ниво*** **Истраживачки задатак:** Открити како на збир утиче повећање једног и исто смањење другог сабирка. **Задатак 1.** *Извршено је сабирање следећих бројева:* **400 + 300 =_____** Први сабирак је ______, други сабирак је_____, збир је број______. а) У наредним примерима је извршено повећање првог сабирка и исто смањење другог сабирка. Погледај слику и утврди да ли су неке промене настале код збира.  400 + 300 =_____  (400 + **100**) + (300 – **100**) = ___+ ____ =_____ Први сабирак се повећао за_______, други сабирак се смањио за ________, а збир је __________.  (400 + **150**) + (300 – **150**) = ____+ ____ =____ Први сабирак се повећао за____, други сабирак се смањио за ________, а збир је _________. **Дакле, када први сабирак повећамо за неки број, а други сабирак смањимо за тај исти број, збир ће остати_________________________.** б) Уследећим примерима је извршено смањење првог сабирка и исто увећање другог сабирка. Погледај слику и утврди да ли су код збира настале промене.



400 + 300 =_______



(400 – **120**) + (300 + **120**) = _____+ _____ =_____
Први сабирак се смањио за____, други сабирак се повећао за ________, а збир је ________________.



(400 – **160**) + (300 + **160**) = _____+ _____ =_____
Први сабирак се смањио за____, други сабирак се повећао за ________, а збир је ________________.

Дакле, када први сабирак смањимо за неки број, а други сабирак повећамо за тај исти број, збир ће остати____________________.
На основу претходних примера изведи закључак о промени збира након повећања једног од сабирака и истог смањења другог сабирка:
Закључак : **Ако се један од сабирака повећа за неки број, а други смањи за тај исти број, збир _____________________________________. Ово својство се назива сталност (непромењљивост) збира.**

Наставни листић за самостално учење – средњи ниво

Истраживачки задатак: Открити како на збир утиче повећање једног и исто смањење другог сабирка.
Задатак 1. *Извршено је сабирање следећих бројева:*
***а)* 1350 + 450 =_________**
Први сабирак је _________, други сабирак је_______, збир је број______.
б) У наредним примерима утврди како се мењају први и други сабирак (из примера под *а*) и како те промене утичу на збир.
1355 + 445 = _____ Први сабирак је повећан за_____, други сабирак је смањен за ____, збир се _____.
1360 + 440 =______Први сабирак је _______ за _______, други сабирак је _______ за ______, збир се __________.
1370 + 430 =______Први сабирак је ________ за _______, други сабирак је _______ за _____, збир се _________.
Дакле, ако се први сабирак повећа за неки број, а други сабирак __________ за тај исти број, збир ____.
1340 + 460 =_____ Први сабирак је смањен за _____, други сабирак је повећан за _______, збир се ______.
1330 + 470 =_____ Први сабирак је______ за ______, други сабирак је _______ за ________, збир се ____________________.
1300 + 500 =_____Први сабирак је________ за ________, други сабирак је ________ за _____, збир се _______________________.
Дакле, ако се први сабирак ________ за неки број, а други сабирак _______ за тај исти број, збир _____________.
На основу претходних закључака изведи општи закључак о промени збира након повећања једног од сабирака и истог смањења другог сабирка:
Закључак: **Ако се један од сабирака_________, а други _________ за тај исти број, збир _____________.**
Уместо бројева се могу ставити слова као замена за било који природан број. Ако су a, b, c и x природни бројеви и ако важи да је $a + b = c$, онда је $(a + x) + (b - x) =$ _____ и $(a - x) + (b + x) =$ ____, при чему је $a > x$ или $a = x$ и $b > x$ или $b = x$.
Ово својство се назива сталност (непромењљивост) ___________.

Наставни листић за самостално учење – напредни ниво

Истраживачки задатак: Открити како на збир утиче повећање једног и исто смањење другог сабирка.
Задатак 1. *Мила има 2258 динара, а Нина 1345 динара.*
а) Колико динара имају ук Мила и Нина? ______________________________.
Први сабирак је ______, други сабирак је_____, збир је број______.
б) *Након што су се вратиле из школе, мама је дала Мили још 350 динара, а Нина је од својих пара позајмила брату 350 динара***.**
Напиши преко бројевног израза и израчунај укупну суму новца након што је Мила добила

	новац од маме и Нина позајмила брату. (______+______) + (______–______) = _______+_______=_______ Шта се десило са укупном сумом новца ових девојчица? ____________________________ У односу на пример под *а,* напиши шта се десило са првим, а шта са другим сабирком и каква је промена настала код збира____. в) *Да је Мила добила од маме 550 динара, а Нина позајмила брату 550 динара, колика би била укупна сума новца ових девојчица?* Напиши бројевни израз и израчунај његову вредност:_______________________________. У односу на пример под *а*, напиши шта се десило са првим, а шта са другим сабирком и каква је промена настала код збира____. Шта можеш да закључиш на основу претходних примера? ***Закључак 1:***____. **Задатак 2.** *У једној кутији је 1268 кликера, а у другој 345 кликера.* а) Колики је укупан број кликера у обема кутијама?__________________________________. Први сабирак је _______, други сабирак је_______, збир је број________. б) *Милан је из прве кутије пребацио у другу 56 кликера.* Напиши преко бројевног израза и израчунај укупан број кликера у кутијама, након што је Милан из прве кутије пребацио у другу 56 кликера. (______–______) + (______+______) = _______+_______=_______ Шта се десило са укупним бројем кликера? ______________________________________ У односу на пример под *а,* напиши шта се десило са првим, а шта са другим сабирком и каква је промена настала код збира.____. в) *Да је Милан из прве кутије пребацио у другу 195 кликера, колики би био укупан број кликера у обема кутијама?* Напиши израз и израчунај његову вредност:____. У односу на пример под *а*, напиши шта се десило са првим, а шта са другим сабирком и каква је промена настала код збира.____. Шта можеш да закључиш на основу претходних примера? ***Закључак 2***: ____. На основу закључка 1 и 2 изведи општи закључак о промени збира након повећања једног од сабирака и истог смањења другог сабирка. ____. Пошто било који природан број може бити замењен словом, ако знаш да је $a + b = c$, допуни шта недостаје: $(a + x) + (b - \_\_\_) = c$ и $(a - x) + (b + \_\_\_) = c$ (при чему је је $a > x$ или $a = x$ и $b > x$ или $b = x$). **Ово својство одузимања се назива:___________________________________ (Сети се где би могао/ла то да прочиташ).** – Ученици добијају повратну информацију о тачности у раду и извођењу закључака. Утврђују број тачних и погрешних одговора, исправљају грешке и, уз аргументовани разговор са учитељем и осталим ученицима исте групе, уче закључке наставне јединице. – Ученици увежбавају новоусвојена знања помоћу наставних листића на којима су задацима диференцирани на три нивоа сложености.
Верификативна фаза	– Прегледно понављање садржаја обрађених на часу (рекапитулација обрађених садржаја). Шта смо данас научили? Како можемо да мењамо сабирке а да збир остане непромењен? – Давање додатних подстицаја и задужења за рад. – Евалуација часа од стране ученика и учитеља.

<table>
<tr><th colspan="2">Вежба број 7</th></tr>
<tr><td>Наставнајединица:</td><td>Сталност разлике</td></tr>
<tr><td>Тип часа:</td><td>обрада</td></tr>
<tr><td>Диференцијација захтева:</td><td>Основни ниво: Ученик треба да:
– препознаје, репродукује на једноставним примерима, вербално изражава и именује правило кое се односи на сталност разлике;
– препознаје сталност разлике на цртежима којима је сталност представљена;
– препознаје примере који се односе сталност разлике.
Средњи ниво: Ученик треба да:
– уочи на одговарајућим примерима и схвати сталност разлике;
– симболички (помоћу слова) записује вербално исказана правила која се односе на сталност разлике;
– уочи (утврди) „скривене“ вредности слова у примерима у којима је представљена сталност разлике.
– примењује знања о сталности разлике у експлицитно датим примерима као „олакшицу“ за рационалније рачунање.
Напредни ниво: Ученик треба да:
– примењује знања о сталности разлике у решавању текстуалних задатака који се односе на реалне животне ситације, као и на решавање проблемских задатака.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Ток часа</th></tr>
<tr><td>Припремна фаза</td><td>– Провера домаћег задатка.
– Обнављање о зависности разлике од промене умањеника и умањиоца:
Задатак 1: Не рачунајући допиши шта недостаје:
2350 – 1200 = 1150
2350 – (1200 + 300) = 1150 – ____
2350 + (1200 –500) = 1150 + ____
(2350 – 150) – 1200 = __________
(2350 + 450) – 1200 = __________
Из претходних примера смо се подсетили да ако се умањеник _______ или _______ за неки број, и разлика ће се _________ или ________ за тај исти број. Ако се умањилац повећа за неки број, разлика ће се ________ за тај исти број. Односно, ако се умањилац смањи за неки број, разлика ће се________ за тај исти број.
Циљ часа: открити како можемо да мењамо умањеник или умањилац, а да разлика остане непромењена и како то можемо користити као олакшицу при рачунању.</td></tr>
<tr><td>Оперативна фаза</td><td>– Самостално учење путем наставних листића на којима су захтеви диференцирани на три нивоа, при чему сваки ученик добија наставни листић у складу са својим способностима.

Наставни листић за самостално учење – основни ниво
Истраживачки задатак 1: Открити како на разлику утиче повећање и умањеника и умањиоца за исти број.
Задатак 1. Изврши одузимање следећих бројева::
850 – 200 =_____ Умањеник је ______, умањилац је_____, разлика је број______.
а) У наредним примерима умањеник и умањилац су повећани за исти број. Погледај слику и утврди да ли су неке промене настале код разлике.
<table>
<tr><td colspan="2">850</td></tr>
<tr><td>850 – 200</td><td>200</td></tr>
</table>
850 – 200 = ______
<table>
<tr><td colspan="2">850</td><td>100</td></tr>
<tr><td>(850 + 100) – (200 + 100)</td><td>200</td><td>100</td></tr>
</table>
(850 + 100) – (200 + 100) =_____–_____=______Умањеник је повећан за_________, умањилац је повећан за ________, а разлика је ________________________.
<table>
<tr><td colspan="2">850</td></tr>
<tr><td>850 – 200</td><td>200</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td colspan="2">850</td><td>150</td></tr>
<tr><td>(850 + 150) – (200 + 150)</td><td>200</td><td>150</td></tr>
</table>
(850 + 150) – (200 + 150) = ________–______ =________ Умањеник је повећан за____, умањилац је повећан за ________, а разлика је __________.
Дакле, када и умањеник и умањилац повећамо за исти број, разлика ће остати ________________________.</td></tr>
</table>

Истраживачки задатак 2: Открити како на разлику утиче смањење и умањеника и умањиоца за исти број.

б) Уследећим примерима су и умањеник и умањилац смањени за исти број. Погледај слику и утврди да ли су настале промене код разлике.

850	
850 – 200	**200**

850 – 200 = ______

850 – 100		100
(850 – 100) – (200 – 100)	200-100	100

(850 – **100**) – (200 – **100**) = _____– _____ =____

Умањеник је смањен за______, умањилац је смањен за ________, а разлика је ___________.

850	
850 – 200	**200**

850 – 200 = ______

850 – 130		**130**
(850 – 130) – (200 – 130)	200-130	**130**

(850 – **130**) – (200 – **130**) = _____– _____ =_____

Умањеник је смањен за____, умањилац је смањен за ________, а разлика је _________.

Дакле, када и умањеник и умањилац смањимо за исти број, разлика ____________.

На основу претходног изведи општи закључак о промени разлике након повећања или смањења и умањеника и умањиоца за исти број.

***Закључак*: Ако се и умањеник и умањилац повећају или смање за исти број, разлика______________________. Ово својство се назива сталност (непромењљивост) разлике.**

Наставни листић за самостално учење – средњи ниво

Истраживачки задатак 1: Открити како на разлику утиче повећање и умањеника и умањиоца за исти број.

Задатак 1. *Изврши одузимање следећих бројева:* ***а)*** **4570 – 1430 =______**

Умањеник је ______, умањилац је_____, разлика је број______.

б) У наредним примерима утврди како се мењају умањеник и умањилац (из примера под *а*) и како те промене утичу на разлику.

4580 – 1440 = ____ Умањеник је повећан за ____, умањилац је____ за_____, разлика се ___.

4600 – 1460 = ____ Умањеник је ____ за _____, умањилац је______ за _____, разлика се ____.

4670 – 1530 =____ Умањеник је ____за _____, умањилац је_______за _____, разлика се _____.

Дакле, када и умањеник и умањилац повећамо за исти број, разлика ________________.

Истраживачки задатак 2: Открити како на разлику утиче смањење и умањеника и умањиоца за исти број.

Задатак 2. *Изврши одузимање следећих бројева:* ***а) 3670 -1240 =______***

Умањеник је ______, умањилац је_____, разлика је број______.

б) У наредним примерима утврди како се мењају умањеник и умањилац (из примера под *а*) и како те промене утичу на разлику.

3660 – 1230 =____ Умањеник је смањен за____, умањилац је _____за ____, разлика се _____.

3640 – 1210 =____ Умањеник је_____ за_____, умањилац је _____ за _____, разлика се_____.

3570 – 1140 =____ Умањеник је ____ за _____, умањилац је_____ за _____, разлика се_____.

Дакле, када и умањеник и умањилац ___________за исти број, разлика__________.

На основу претходног изведи општи закључак о промени разлике након повећања или смањења и умањеника и умањиоца за исти број.

***Закључак*: Ако се и умањеник и умањилац__________или_______ за исти број, разлика__________.**

Уместо бројева се могу ставити слова као замена за било који природан број. Ако су ***a, b, c*** и ***x*** природни бројеви и ако важи да је ***a - b = c,*** при чему је ***a > b,*** онда је **(*a* + *x*) – (*b* + *x*) =** ___ и **(*a* – *x*) + (*b* – *x*) =**____, при чему је ***a > x*** или ***a = x*** и ***b > x*** или ***b = x.***

Ово својство се назива сталност (непромењљивост)____________________.

Наставни листић за самостално учење – напредни ниво

Истраживачки задатак 1: Открити како на разлику утиче повећање и умањеника и умањиоца за исти број.

	Задатак 1. *Марко има уштеђевину од 10258 динара, а његов друг Јован 8345 динара.* а) За колико Марко има више новца од Јована? _______________________________. Умањеник је ______, умањилац је_____, разлика је број__ ____. б) *Пошто су се обојица запослила, након месец дана обојица су добила плату од 25000 динара.* Напиши преко бројевног израза и израчунај вредност разлике у динарима које имају Марко и Јован након што су примили плату. (_______+________) – (________+________) = _________–________=________ Шта се десило са Марковим и Јовановим новцем? ___________________________________. У односу на пример под *а*, напиши како се променио умањеник, а како умањилац и каква је промена настала код разлике.___________ _____ _______________________________________. в) *Колика би била разлика у новцу који имају Марко и Јован да су добили плату за два месеца?* Напиши бројевни израз и израчунај његову вредност: (________+________) - (________+________) = _________–_________=________ У односу на пример под *а*, напиши како се променио умањеник, а како умањилац и каква је промена настала код разлике.______ ____. Шта можеш да закључиш на основу претходних примера? ***Закључак:***____. **Задатак 2.** *Мина је рођена 2007. године, а Нина 2004. године.* а) Колика је разлика у годинама између Мине и Нине? ________-_________=__________ Умањеник је ________, умањилац је_______, разлика је број________. б) *Колика би била разлика у годинама да су се обе девојчице родиле три године раније.* Напиши преко бројевног израза и израчунај његову вредност. (______–______) – (______–_____) = _______– _______=_______ Шта се десило са разликом у годинама? _______ ____________________________________ У односу на пример под *а,* напиши како се променио умањеник, а како умањилац и да ли је разлика промењена._____ ____. в) *Да су се обе девојчице родиле 10 година раније, колика би тада била разлика у годинама?* Напиши израз и израчунај његову вредност: (______–_____) – (______–______) = _____– ______=_______ У односу на пример под *а*, напиши како се променио умањеник, а како умањилац и да ли је разлика промењена.____ ____. Шта можеш да закључиш о промени разлике на основу претходних примера? ***Закључак 2***: ____. На основу закључака 1 и 2 изведи општи закључак о промени разлике након повећања или смањења и умањеника и умањиоца за исти број. ***Закључак***: ____. Пошто дата слова замењују било који природан број, ако знаш да је $a - b = c$ (где је $a > b$), допуни шта недостаје: $(a + x) - (b + \_\_\_) = c$ **и** $(a - \_\_\_) + (b - x) = c$ (при чему је $a > x$ и $b > x$). **Ово својство одузимања се назива:__________________________________ (Сети се где би могао/ла то да прочиташ).** – Ученици добијају повратну информацију о тачности у раду и извођењу закључака. Утврђују број тачних и погрешних одговора, исправљају грешке и, уз аргументовани разговор са учитељем и осталим ученицима исте групе, уче закључке наставне јединице. – Ученици увежбавају новоусвојена знања помоћу наставних листића на којима су задацима диференцирани на три нивоа сложености.
Верификативна фаза	– Прегледно понављање садржаја обрађених на часу (рекапитулација обрађених садржаја). Шта смо данас научили? – Давање додатних подстицаја и задужења за рад. – Евалуација часа од стране ученика и учитеља.

<table>
<tr><th colspan="2">Вежба број 8</th></tr>
<tr><td>Наставнајединица:</td><td>Сталност збира и разлике</td></tr>
<tr><td>Тип часа:</td><td>утврђивање</td></tr>
<tr><td>Диференцијација захтева:</td><td>Основни ниво: Ученик треба да:
– препознаје, репродукује на једноставним примерима, вербално изражава и именује правила која се односе сталност збира и разлике;
– препознаје сталност збира и разлике на цртежима којима је сталност представљена;
– препознаје примере који се односе сталност збира и разлике.
Средњи ниво: Ученик треба да:
– уочи на одговарајућим примерима и схвати сталност збира и разлике;
– симболички (помоћу слова) записује вербално исказана правила која се односе на сталност збира и разлике;
– уочи (утврди) „скривене“ вредности слова у примерима у којима је представљена сталност збира и разлике;
– примењује знања о сталности збира и разлике као „олакшицу“ за рационалније рачунање.
Напредни ниво: Ученик треба да:
– примењује знања о сталности збира и разлике у решавању текстуалних задатака који се односе на реалне животне ситације, као и на решавање проблемских задатака.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Ток часа</th></tr>
<tr><td>Припремна фаза</td><td>– Провера домаћег задатка.
– Обнављање превила о сталности збира и разлике.
– Циљ часа: утврдити и увежбати стечена знања о сталности збира и разлике.</td></tr>
<tr><td>Оперативна фаза</td><td>– Самостални рад ученика на наставним листићима са диференцираним садржајима. Сваки наставни листић, поред задатака за конкретни ниво, садржи и задатке за наредни виши ниво.

Наставни листић за самостално вежбање – основни ниво
1. Заокружи слово поред текста који представља наставак реченице:
Ако један од сабирака повећамо за неки број, а други сабирак смањимо за тај исти број, збир:
а) ће се повећати за тај број б) се неће променити в) ће се смањити за тај број
2. Разлика двају бројева је 1675:
а) Ако умањеник повећамо за 25 и умањилац повећамо за 25, разлика ће_____________.
б) Ако умањеник смањимо за 15 и умањилац смањимо за 15, разлика ће _____________.
Како се назива то својство?____.
3. На сваку линију упиши број који недостаје.
а) 322 + 218 = (322 + 8) + (218 –_____) б) 7461 – 2216 = (7461 –______) – (2216 – 10)
в) 458 – 109 = (458 +______) – (109 + 1) г) 1289 + 2321 = (1289 – 9) + (2321 +______)
4. Напиши које је својство коришћено ради лакшег израчунавања следеће једнакости:
а) $12498-7236=(12498+2)+(7236+2)=12500-7238=5262$
Коришћено је својство: ____;
б) Олакшај следеће израчунавање користећи својство сталности збира:
297 + 454 = (297 + 3) + (_____–______) =
5. Један од сабирака заокружи на најближу стотину и примени својство сталности збира како би себи олакшао рачунање.
а) 101 + 629 = (______–______) + (______+_____) = ______+______
б) 214 + 198 = (______–______) + (______+_____) = ______+______

Наставни листић за самостално вежбање – средњи ниво
1. а) Ако први сабирак смањимо за 547, шта треба да урадимо са другим сабирком да би збир остао непромењен?____.
б) Ако умањилац повећамо за 327, шта треба да урадимо са умањеником да би разлика остала непромењена?____.
2. Попуни празна поља тако да једнакости буду тачне.
а) 15789 + 11287 = 27076
(15786 + 29) + ______________________= 27076
______________________+ (11287 – 54) = 27076

б) 34567 – 2389 = 32178
(34567 – 215) –______________________= 32178
______________________– (11287+86) = 32 178</td></tr>
</table>

	3. Ако је $a + b = 1850$, онда је: **а)** $(a + 135) + (b - 135) =$ ______ **б)** $(a + 128) + (b - 128) =$ _______ $(a - 135) + (b +$ ______$) = 1850$ $(a -$ ______$) + (b + 128) = 1850$ 4. Олакшај следећа израчунавања користећи својство сталности збира и разлике: 2396 + 4004 = (2396 + ____) + (4004 – 4) = _________________________________. 3682 – 1308 = ____. 5. Објасни без израчунавања збира или разлике тачност једнакости. а) 1199 + 329 = 1200 + 328 ____. б) 1925 – 595 = 1930 – 600____. 6. Одреди вредност x у једнакостима: **1490 + 3230 = 4720** $1500 + (3230 - x) = 4720$ $x =$ _______ $(1490 + x) + 3200 = 4720$ $x =$ _______ ***Наставни листић за самостално вежбање – напредни ниво*** 1. Ако умањеник и умањилац дате разлике повећамо за 1287, разлика тако повећаног умањеника и умањиоца је 7398. Колика је разлика датих природних бројева?____. 2. Алекса је замислио два броја чији збир износи x. Ако се један од тих бројева повећа за 120, а други смањи за 120, добиће се 1450. Колики је збир бројева које је Алекса замислио? ____. 3. Количине поморанџи и банана у једној продавници разликују се за 1047 kg. Да је поморанџи и банана било по 125 kg више, колика би тада била разлика? Образложи одговор:____. 4. Састави текстуални задатак према следећој једнакости. 1158 + 2216 = (1158 – 4) + (2216 + 4)____. 5. Деда има 78 година, унук 15. Колико година је деда старији сада, а колико је био пре 7 година? ____.
Верификативна фаза	– Повратна информација о тачности задатака са наставних листића. – Давање додатних подстицаја и задужења за рад. – Евалуација часа од стране ученика и учитеља.

<table>
<tr><th colspan="2">Вежба број 9</th></tr>
<tr><td>Наставна јединица:</td><td>Једначине са сабирањем и одузимањем</td></tr>
<tr><td>Тип часа:</td><td>обрада</td></tr>
<tr><td>Диференцијација захтева:</td><td>Основни ниво: Ученик треба да:
– препознаје записе који представљају једначине са сабирањем и одузимањем и непознату компоненту у њима;
– записује одговарајућу једначину са једном рачунском операцијом на основу идеографа (слике) и објасни (својим речима) поступак одређивања решења дате једначине;
– решава експлицитно дате једноставне једначине са сабирањем и одузимањем до нивоа троцифрених бројева.
Средњи ниво: Ученик треба да:
– образложи поступак решавања и користи правила о инверзности рачунских операција за решавање једначина са сабирањем и одузимањем у скупу N;
– за текстуалне задатке који се односе на реалне животне ситуације саставља и решава одговарајућу једначину са сабирањем или одузимањем;
– саставља текст задатка за дату једначину са једном рачунском операцијом (сабирање, одузимање).
Напредни ниво: Ученик треба да:
– решава једначине (са две операције) у којима је непознат елемент сабирка, умањеника или умањиоца у скупу N;
– решава сложене текстулне и проблемске задатке помоћу једначина са сабирањем и одузимањем.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Ток часа</th></tr>
<tr><td>Припремна фаза</td><td>– Провера домаћег задатка.
– Обнављања претходно усвојених садржаја.
Радимо следеће задатке:
Задатак 1: На основу следећег идеографа напиши све могуће изразе:
<table><tr><th colspan="2">800</th></tr><tr><td>500</td><td>300</td></tr></table>Решење:
а) 500 + 300 = 800; б) 300 + 500 = 800; в) 800 – 500 = 300 г) 800 – 300 = 500
Обнављање о решавању једначина са сабирањем и одузимањем у првој хиљади.
– Циљ часа: открити како се решавају једначине са вишецифреним бројевима и како се та знања могу користити у решавању практичних задатака.</td></tr>
<tr><td>Оперативна фаза</td><td>– Самостално учење путем наставних листића на којима су захтеви диференцирани на три нивоа, при чему сваки ученик добија наставни листић у складу са својим способностима.

Наставни листић за самостално учење – основни ниво
Истраживачки задатак 1: Открити како се израчунава непознати сабирак у скупу N.
Пример 1: Збир непознатог броја и броја 20 износи 850. Одреди непознати број.
Погледај слику, постави и реши једначину.
<table><tr><th colspan="2">850</th></tr><tr><td>x</td><td>20</td></tr></table>Решење 1: x + ______=______
У претходној једнакости први сабирак је ______, други сабирак је ______, збир износи__________.
Ова једнакост представља једначину са непознатим________________.
Погледај слику и одговори како можемо израчунати вредност x?
x = ________ – _________
x = ________ , тј. од збира смо одузели _____________ сабирак и добили ____________.
Решење једначине је број __________.
Проверу тачности решења ћемо извршити тако што добијено решење, тј. број________, заменимо у полазној једначини и утврђујемо да је _______+________=_________, тј. _______=________.
На основу претходног примера изведи закључак о израчунавању непознатог сабирка.
Закључак 1: Непознати сабирак се израчунава тако што се од__________ одузме _______.
Истраживачки задатак 2: Открити како се израчунава непознати умањеник у скупу N.
Пример 2: Од ког броја треба одузети 250 да би се добио број 230?
Погледај слику, постави и реши једначину.</td></tr>
</table>

x	
250	230

Решење 2: $x -$ _________= _________

У овој једнакости *x* представља ______, умањилац је број ________, разлика је број _______.

Једнакост представља једначину са непознатим ________________.

Погледај слику и одговори како можемо израчунати вредност *x*?

$x =$ _______+________

$x =$ ______

Дакле, сабрали смо___________ и ____________ и добили____________.

Провера: ____

Решење једначине је број_______.

На основу претходног примера изведи закључак о израчунавању непознатог умањеника.

***Закључак 2.* Непознати умањеник се израчунава тако што се ________ и __________ саберу.**

Истраживачки задатак 3: Открити како се израчунава непознати умањилац у скупу *N*.

Пример 3: *Који број треба одузети од броја 755 да би се добио број 120?*

Погледај слику, постави и реши једначину.

755	
x	120

Решење 3: ______$- x =$________

У овој једнакости умањеник је број ________, *x* је _________, а разлика је _______. Дакле, ово је једначина са непознатим ________________.

Погледај слику и одговори како можемо израчунати вредност *x*?

$x =$ ______ – ________

$x =$ ______

Од _________ смо одузели___________ и добили____________.

Провера: ____

На основу претходног примера изведи закључак о израчунавању непознатог умањиоца.

***Закључак 3:* Непознати умањилац се израчунава тако што се од________ одузме ____________________________.**

Наставни листић за самостално учење – средњи ниво

Истраживачки задатак 1: Открити како се израчунава непознати сабирак у скупу *N* и како се стечена знања могу применити у решавању практичних задатака.

Пример 1: У каси је 15500 динара. Након што је продавац продао торбу, свеску и комплет књига, у каси је било 23450 динара. Колико коштају свеска, торба и књиге?

Решење 1: С обзиром на то да не знамо колико коштају торба, свеска и комплет књига, тај број обележавамо са ______. На основу података датих у задатку састави одговарајућу једначину:

______+_______= ________

Први сабирак је ________, други сабирак је _________, а збир је _______.

Дакле, једнакост представља једначину са _____________.

Како можемо израчунати цену торбе, свеске и комплета књига, ако знамо колико је било новаца у каси пре продаје и колико је било након продаје?____.

Дакле, $x =$ _____________, $x =$ _____, тј. од збира смо _____________ и добили ______________.

Провера: _______+________= ________

Решење једначине је: ________.

Одговор на питање у задатку:____.

На основу претходног примера изведи закључак о израчунавању непознатог сабирка.

Закључак 1: ____

Ако су слова *a, b* и *x* замена за било који природан број, закључујемо да ако **је** $a + x = b$, **онда је** $x =$___–____ **и ако је** $x + a = b$, **онда је** $x =$___–____.

Истраживачки задатак 2: Открити како се израчунава непознати умањеник у скупу *N* и како се стечена знања могу применити у решавању практичних задатака.

Пример 2: Милан је у продавници спортске опреме купио патике које коштају 1768 динара. Продавац му је вратио кусур 232 динара. Којом новчаницом је Милан платио патике?

Решење 2: С обзиром на то да не знамо коју новчаницу је Милан имао, тај број обележавамо са _______.

	На основу података датих у задатку састави одговарајућу једначину: Једначина: ________ – _______= ________ У овој једначини x представља ___________, умањилац је ___________, а разлика је _______. Дакле, једнакост представља једначину са непознатим ____________. Како можемо израчунати колико је новца Милан понео за куповину патика, ако знамо колика је цена патика и кусур који му је продавац вратио? __________________________________. Дакле, x = ________________________, x = ______, тј. разлику смо __________ са ___________ и добили __________. Провера:____. Решење једначине је: ________. *Одговор на питање у задатку*:______________________________ ________________. На основу претходног примера изведи закључак о израчунавању непознатог умањеника. ***Закључак 2***: **____.** **Ако су слова *a, b* и *x* замена за било који природан број, закључујемо да ако је *x – a* = *b*, онда је *x* =______+_______.** **Истраживачки задатак 3**: Открити како се израчунава непознати умањилац у скупу *N* и како се стечена знања могу применити у решавању практичних задатака. **Пример 3**: Петар је у новчанику имао 3545 динара. Када је купио оловку и две чоколаде, у новчанику је остало 2850 динара. Колико је динара Петар потрошио у продавници? **Решење 3**: Петар је имао 3545 динара. Како нам је непознато колико је Петар потрошио за куповину оловке и две чоколаде, тај број обележавамо са ______. На основу података датих у задатку састави одговарајућу једначину: Једначина: _______ – ________= _______ Умањеник је ________, умањилац је _________, а разлика је _______. Дакле, једнакост представља једначину са непознатим_____________. Како можемо израчунати колико је новца Петар потрошио у продавници, ако знамо колико је новца понео у продавницу и колики је кусур који му је продавац вратио? ____. Дакле, x = __________, x = _______, тј. од __________ смо одузели ________ и добили ______. Провера: ______________________________________. Решење једначине је: ________. *Одговор на питање у задатку*: ____. На основу претходног примера изведи закључак о израчунавању непознатог умањиоца. ***Закључак 3***: **____.** **Ако су слова *a, b* и *x* замена за било који природан број, закључујемо да ако је *a – x* = *b*, онда је *x* =______–_______.** ***Наставни листић за самостално учење – напредни ниво*** **Истраживачки задатак 1**: Открити поступак решавања једначина у којима је непознат елемент сабирка. **Пример 1**: Прочитај следеће изразе: **8 + (9 – 5)** – *збир броја 8 и разлике бројева 9 и 5* **99 : 3 – 20** – *разлика* _________ *бројева* __________ *и броја* _______ **(85 – 12) + 10** – *збир* __________ *бројева* ________ *и броја* ______ На почетку часа смо се подсетили како смо решавали једначине са непознатим сабирком у трећем разреду. На исти начин реши следећу једначину: ***x*** + 6000 =16500 x = _____________(*непознати сабирак се израчунава тако што* _____________________) x = _________ ПР: ____ **Пример 2:** Мића је замислила један број, одузела му 200, па добијеном броју додала 500 и добила збир 1200. Који број је Мића замислила? Постави одговарајућу једначину: (x –_____) +______ = _______ Ова једнакост представља збир ______________________________ и броја_______. Дакле, први сабирак је израз______________, други сабирак је _______, а збир је ________. У овој једначини је непознат _______________________ . (подвуци га) Реши једначину (издвајамо непознато и примењујемо научени поступак решавања једначина): x – 200 =_________ x – 200 = _____ – добили смо једначину са непознатим___________. Ову једначину си научио/ла да решаваш у трећем разреду. x =____________ x = ____ Провера: (____– 200) + ____=____ ; ____+___=_____; ____ =____ Решење једначине је број______. Одговор на питање у задатку: ____.

	На основу претходног примера изведи закључак о решавању једначина у којима је непознат елемент сабирка. ***Закључак 1**: Једначине у којима је непознат елемент сабирка решавамо тако што* ____.
	Истраживачки задатак 2: Открити поступак решавања једначина у којима је непознат елемент умањеника. На почетку часа смо се подсетили како смо решавали једначине са непознатим умањеником у трећем разреду. На исти начин се решавају и једначине са непознатим умањеником и умањиоцем у скупу ***N***. **Пример 3:** Мила је замислила један број, додала му 200, затим од добијеног збира одузела 350 и добила број 1500. Који број је Мила замислила? Постави одговарајућу једначину: (x +______) –______ = ________ Ова једнакост представља разлику _____________ и броја_______. Дакле, умањеник је израз_________, умањилац је _______, а разлика је ________. У овој једначини је непознат ______________________ . (подвуци га) Реши једначину (издвајамо непознато и примењујемо научени поступак решавања једначина): x + 200 =_________ x + 200 = _____ – сада смо добили једначину са непознатим___________. Ову једначину си научио/ла да решаваш у трећем разреду. x =____________ Провера: (____ + 200) –____=____ ; ____–____=_____; _____ =______ Решење једначине је број ______. Одговор на питање у задатку: ____. На основу претходних примера изведи закључак о решавању једначина у којима је непознат елемент умањеника. *Закључак 2: Једначине у којима је непознат елемент умањеника решавамо тако што* ____.
	Истраживачки задатак 3: Открити поступак решавања једначина у којима је непознат елемент умањиоца. **Пример 4**. Од броја 5467 Мила је одузела збир броја 1234 и непознатог броја и добила број 767. Који је тај непознати број? Постави одговарајућу једначину: _______ – (______ + x) = _______ Ова једнакост представља разлику броја_____________ и _________________. Дакле, умањеник је број_________, умањилац је израз___________, а разлика је ________. У овој једначини је непознат ______________________. (подвуци га) Реши једначину (издвајамо непознато и примењујемо научени поступак решавања једначина): 1234 + x = __________________ 1234 + x = _______ – добили смо једначину са непознатим___________________. Ову једначину си научио/ла да решаваш у трећем разреду. x =____________ Провера: ______________________; ____+___=_____; ____ =____ Решење једначине је број______. *Одговор на питање у задатку*: ____. На основу претходног примера изведи закључак о решавању једначина у којима је непознат елемент умањиоца. *Закључак 3: Једначине у којима је непознат елемент умањиоца решавамо тако што* ____.
	– Ученици добијају повратну информацију о тачности у раду и извођењу закључака. Утврђују број тачних и погрешних одговора, исправљају грешке и, уз аргументовани разговор са учитељем и осталим ученицима исте групе, уче закључке наставне јединице. – Ученици увежбавају новоусвојена знања помоћу наставних листића на којима су задацима диференцирани на три нивоа сложености.
Верификативна фаза	– Давање додатних подстицаја и задужења за рад. – Евалуација часа од стране ученика и учитеља.

Вежба број 10

Наставна јединица:	*Једначине са сабирањем и одузимањем*
Тип часа:	систематизација
Диференцијација захтева:	***Основни ниво:*** Ученик треба да: – препознаје записе који представљају једначине са сабирањем и одузимањем и непознату компоненту у њима; – записује одговарајућу једначину са једном рачунском операцијом на основу идеографа (слике) и објасни (својим речима) поступак одређивања решења дате једначине; – решава експлицитно дате једноставне једначине са сабирањем и одузимањем до нивоа троцифрених бројева. ***Средњи ниво:*** Ученик треба да: – образложи поступак решавања и користи правила о инверзности рачунских операција за решавање једначина са сабирањем и одузимањем у скупу *N*; – за текстуалне задатке који се односе на реалне животне ситуације саставља и решава одговарајућу једначину са сабирањем или одузимањем; – саставља текст задатка за дату једначину са једном рачунском операцијом (сабирање, одузимање). ***Напредни ниво*:** Ученик треба да: – решава једначине (са две операције) у којима је непознат елемент сабирка, умањеника или умањиоца у скупу *N*; – решава сложене текстулне и проблемске задатке помоћу једначина са сабирањем и одузимањем.

Ток часа

Припремна фаза

– Провера домаћег задатка.
– Обнављања претходно усвојених садржаја о решавању једначина са сабирањем и одузимањем.
– Циљ часа: утрдити и систематизовати стечена знања о једначинама са сабирањем и одузимањем у скупу *N*.

Оперативна фаза

– Самостално вежбање ученика на наставним листићима са диференцираним садржајима. Сваки наставни листић, поред задатака за конкретни ниво, садржи и задатке за наредни виши ниво.

Наставни листић за самостално вежбање– основни ниво

1. Допуни започете реченице:
а) Непознати сабирак изарчунавамо тако што____.
б) Непознати умањилац израчунавамо тако што______________________________________.

2. Реши једначине:

а) $x - 230 = 654$
$x =$ ____+____
$x =$ _____
Пр: ____–____=______

б) $335 - x = 145$
____
____
Пр: ___________________

3. Попуни табелу:

Први сабирак	250	112		832
Други сабирак		450	454	
Збир	400		959	999

4. Који број треба додати броју 255 да би се добио број 378?
Једначина:____
Провера: ____

5. Миша је имао уштеђевину 355 динара. Купио је другу поклон за рођендан и остало му је још 120 динара. Колико је Миша платио поклон?
Једначина:____
Провера: _____________________-____

6. Милан је замислио неки број. Када је тај број одузео од броја 52, добио је број 400. Који је број Милан замислио?
Једначина:____
Провера: ____

Наставни листић за самостално вежбање – средњи ниво

1. Реши једначине:

а) $(1278 + 3568) + x = 9876$ б) $(3670 - 2400) - x = 1040$

_________________________ _________________________

_________________________ _________________________

ПР: ________________________ ПР: ________________________

2. Ако од непознатог броја одузмемо збир бројева 4636 и 2479, добићемо број 3795. Одреди непознати број.

Једначина: ____

Провера: ____

3. Стева је имао 1347 сличица фудбалера. Када је поклонио другу неколико сличица, остало му је још 998 сличица. Колико је сличица Стева поклонио другу?

Једначина: ____

Провера: ____

4. Састави текст задатка за дату једначину, а затим је реши:

$$2347 + a = 12787$$

____

____

Једначина: ____

Провера: ____

5. Када је из новчаника узето 1234 динара за кошуљу и 3456 динара за ципеле, остало је 983 динара. Колико је новца било у новчанику пре куповине?

Једначина: ____

Провера: ____

6. Када би Милица имала 1467 динара више него што има, могла би да купи књигу од 2367 динара и остало би јој 3470 динара. Колико динара има Милица?

Једначина: ____

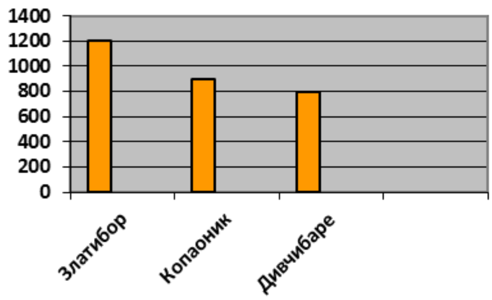
Провера: ____

Наставни листић за самостално вежбање – напредни ниво

1. Реши једначине:

а) $(21459 - x) + 3218 = 27689$ б) $2500 - (x - 1654) = 500$

2. Милан је купио тренерку коју је платио 6647 динара. Од остатка новца је купио патике које је платио 4984 динара. Колико новца је имао ако му је после куповине остао 3241 динар?
3. Унук пита деду колико има година. Деда одговара: „Кад број мојих година умањиш за 63 и добијени број увећаш за 996, добићеш 1000.“
4. У једном магацину је било 2354 kg робе, а у другом магацину 1576 kg. Колико килограма робе треба сместити још у други магацин да би маса робе у обама магацинима износила 7 тона?
5. Из цистерне је источено 1295 литара бензина, а затим је следећег дана источено још 585 литара, тако да је у цистерни остало 1780 литара. Колико литара бензина је било у цистерни?
6. Директор једне школе је направио списак ученика који су се пријавили за три локације на које желе да иду на екскурзију. Податке је приказао у виду графикона.

	 Једначином изрази колико још ученика који желе да иду на Дивчибаре треба да се пријави да би их било исто као што има оних који желе да иду на Златибор. Једначином изрази колико ученика треба да одустане од дестинације Копаоник да би њихов број био исти као број ученика који желе да иду на Дивчибаре.
Верификативна фаза	– Повратна информација о тачности задатака са наставних листића. – Давање додатних подстицаја и задужења за рад. – Евалуација часа од стране ученика и учитеља.

Вежба број 11

Наставна јединица: *Неједначине са сабирањем*

Тип часа: обрада

Диференцијација захтева:

Основни ниво: Ученик треба да:
– препознаје записе који представљају неједначине са сабирањем и непознату компоненту у њима и вербално их именује;
– зна правилну употребу симбола {,} и ∈ за записивање скупа решења неједначине;
– зна таблично да одреди скуп решења неједначине са сабирањем у једноставним случајевима;
– зна поступак одређивања решења експлицитно дате неједначине са сабирањем, али без дубљег разумевања истог.

Средњи ниво: Ученик треба да:
– схвати поступак решавања и одређује скуп решења неједначине са сабирањем користећи знања о решавању једначина са сабирањем и уз функционалну примену правила о зависности збира од промене сабирака;
– за једноставније текстуалне задатке саставља и решава одговарајућу неједначину са сабирањем.

***Напредни ниво*:** Ученик треба да:
– саставља одговарајућу неједначину на основу датог скупа решења;
– решава двоструке неједначине (са два знака неједнакости);
– решава сложеније текстуалне задатке помоћу неједначина са сабирањем.

Ток часа

Припремна фаза

– Провера домаћег задатка.
– Обнављање о решавању неједначина са сабирањем у оквиру прве хиљаде.
– Циљ часа: открити како се решавају неједначине у скупу природнх бројева.

Оперативна фаза

– Самостално учење путем наставних листића на којима су захтеви диференцирани на три нивоа, при чему сваки ученик добија наставни листић у складу са својим способностима.

Наставни листић за самостално учење – основни ниво

Истраживачки задатак: Открити поступак решавања неједначина са непознатим сабирком.

Задатак 1: *Реши неједначину:* $x + 900 < 910$

Решење 1: Ово је неједначину са непознатим_______ _______.

За решавање неједначина се може користити табела. У један ред табеле се уписују могуће вредности непознатог броја x. У други ред се уписују вредности израза $x + 900$ за сваку вредност непознатог броја.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x + 900$	900	901											

Из табеле прочитај вредности x за које је неједнакост $x + 900 < 910$ тачна. Скуп решења неједначине

$x \in \{$____$\}$

Задатак 2*: Реши неједначину:* $540 + x > 856$

Решење 1: Дата неједначина представља пример неједначине са непознатим _______________. У неједначини знак неједнакости замени знаком једнакости и реши добијену једначину:

$540 + x = 856$

x = _______– _______

x = _________

Треба одредити када је збир $540 + x$ већи од _______.

Знамо да се збир повећава када се један од сабирака повећава, па ће се вредност израза $540 + x$ повећавати ако се x _________, тј. $x >$ ______. Скуп решења неједначине је:

$x \in \{$_________, _________, ________, ________ ....$\}$

***Закључак*: Неједначине са непознатим сабирком решавамо тако што најпре одредимо непознати ________, а потом знак неједнакости одређујемо на основу правила о зависности збира од промене ________________________.**

Наставни листић за самостално учење – средњи ниво

Истраживачки задатак: Открити поступак решавања неједначина са сабирањем у скупу *N*.

Задатак 1: *Марко је у касици имао 1200 динара. Након што је додао још неки „ситниш“, у касици је било више од 1500 динара. Колико је динара Марко могао додати у касицу?*

Решење 1: У задатку је познато ________________________ динара**.** Непозната сума новца коју је Марко ____________и означићемо је са *x (или неким другим словом!)*. Након што је Марко додао новац, у касици је било ______ + *x* динара,а то је ________ од 1500. То записујемо:

______ + *x* > _______

Добили смо неједначину са непознатим _______________. У неједначини знак неједнакости замени знаком једнакости и реши добијену једначину:

______ + *x* = _______

x = _____________

x = _________

Треба одредити када је збир ______ + *x* већи од______. На основу правила о зависности збира од промене сабирака, вредност израза ______ + *x* се повећава (расте) када се *x* ____________. Закључујемо да су решења неједначине *x* > _______.

Скуп решења неједначине је: $x \in \{$_________, _________, ________, ________ …$\}$

Тачност решења проверавамо тако што у полазну неједначину ***x*** заменимо неком од нађених вредности и утврђујемо да ли важи добијена неједнакост.

______ + *x* > _______

______ + _______ > _______ (*x* замени неким решењем из скупа решења)

_____>______

Задатак 2: *Петар је сакупљао сличице фудбалера. Када му је друг поклонио још 570 сличица, Петар је имао мање од 1200. Колико је сличица Петар могао да сакупи?*

Решење 2: Како је непознат број сличица које је Петар сакупио, означићемо га са *x (или неким другим словом!)*. Познато је ________________________________. Након што му је друг поклонио сличице, Петар је имао *x* + ________ сличица, а то је __________ од 1200.

То записујемо:

x + ________ < _______

Добили смо неједначину са непознатим _______________. У неједначини знак неједнакости замени знаком једнакости и реши добијену једначину:

x + ________ = _______

x = _____________

x = _________

Треба одредити када је збир *x* + ________ мањи од______. На основу правила о зависности збира од промене сабирака, вредност израза *x* + ________ се смањује (опада) када се *x* ____________. Закључујемо да су решења неједначине *x* < _______.

Скуп решења неједначине је:

$x \in \{$_________, _________,…, ________, ________, _________, ________$\}$

Тачност решења проверавамо тако што у полазној неједначини ***x*** заменимо неком од нађених вредности и утврђујемо да ли важи добијена неједнакост.

x + ________ < _______

______ + _________ < _______ (*x* замени неким решењем из скупа решења)

_____< ______

Закључак: Неједначине са сабирањем решавамо тако што најпре одредимо непознати сабирак, а затим одређујемо знак неједнакости примењујући правило зависности_______________________________.

Наставни листић за самостално учење – напредни ниво

Истраживачки задатак: Открити поступак решавања неједначина са сабирањем у скупу *N*.

Пример 1: *На полицу на којој може да стане 1300 књига, библиотекар је поређао 857 књига. Колико још књига може да стави на полицу тако да она не буде пуна?*

Решење 1: У задатку је познато _____________________________________. Непознато је колико још књига библиотекар може да стави на полицу, тај број ћемо обележити са *x (или неким другим словом!)*.

Напиши преко у облику израза број књига на полици након што ће библиотекар поређати још књига: _______ + *x*. Како полица не треба да буде пуна, укупан број књига треба да буде _________ од _______.

Запиши одговарајућу неједначину: ____________________________

У овој неједначини је непознат ________________________. Уместо знака неједнакости, стави знак једнакости и реши одговарајућу једначину: ________ + ________=_____

____

	_________________________ Вредност збира_______ + x у неједначини треба да буде __________од ________. Примени правило о зависности збира од промене сабирака. Да би се збир смањивао, непозната x, тј. сабирак, треба да се ______________. То значи да је x $\boxed{\phantom{<}}$ _______ (у квадратић упиши знак неједнакости) Скуп решења неједначине је $x \in \{$____________________________________$\}$ Одговор на питање у задатку:____. **Пример 2**: *У камиону носивости 3 тоне налазе се јабуке. Касније је требало утоварити још 1346 килограма шљива. Колико је килограма јабука могло бити у камиону, ако се зна да камион није био пун?* **Решење 2:** У задатку је непознато колико је јабука било у камиону, тај број ћемо обележити са x *(или неким другим словом!)*. Познато је да____________________________________. Напиши преко бројевног израза укупну масу воћа у камиону након што су утоварене шљиве: x + _______. Како камион није био пун, укупна маса воћа је ____________ од _________ килограма. Запиши одговарајућу неједначину: ____________________________ У овој неједначини је непознат _________________________. Уместо знака неједнакости, стави знак једнакости и реши одговарајућу једначину: _______ + ________=_______ _________________________ __________________________ Вредност збира x + _______у неједначини треба да буде __________од ________. Примени правило о зависности збира од промене сабирака. Да би се вредност збира смањивала, непозната x, тј. сабирак, треба да се ______________. То значи да је x $\boxed{\phantom{<}}$ _______________(у квадратић упиши знак неједнакости) Скуп решења неједначине је $x \in \{$____________________________________$\}$ Одговор:____. *Закључак:* Неједначине са непознатим сабирком решавамо ____ ____ ***Нека су a, b природни бројеви, при чему је b > a.*** ***Ако је x + a < b, онда је x <____ – _____ или ако је x + a > b, онда је x >____ – _____.*** ____. – Ученици добијају повратну информацију о тачности у раду и извођењу закључака. Утврђују број тачних и погрешних одговора, исправљају грешке и, уз аргументовани разговор са учитељем и осталим ученицима исте групе, уче закључке наставне јединице. – Ученици увежбавају новоусвојена знања помоћу наставних листића на којима су задацима диференцирани на три нивоа сложености.
Верификативна фаза	– Давање додатних подстицаја и задужења за рад. – Евалуација часа од стране ученика и учитеља.

<table>
<tr><th colspan="2">Вежба број 12</th></tr>
<tr><td>Наставна јединица:</td><td>Неједначине са одузимањем</td></tr>
<tr><td>Тип часа:</td><td>обрада</td></tr>
<tr><td>Диференцијација захтева:</td><td>Основни ниво: Ученик треба да:
– препознаје записе који представљају неједначине са одузимањем и непознату компоненту у њима и вербално их именује;
– зна правилну употребу симбола {,} и ∈ за записивање скупа решења неједначине;
– зна таблично да одреди скуп решења неједначине са одузимањем у једноставним примерима;
– зна поступак решавања експлицитно дате неједначине са одузимањем, али без дубљег разумевања истог.
Средњи ниво: Ученик треба да:
– схвати поступак решавања и одређује скуп решења неједначине са одузимањем користећи знања о решавању једначина са одузимањем и уз функционалну примену правила о зависности разлике од промене умањеника или умањиоца;
– за једноставне текстуалне задатке саставља и решава одговарајућу неједначину са одузимањем.
Напредни ниво: Ученик треба да:
– саставља одговарајућу неједначину на основу датог скупа решења;
– решава двоструке неједначине (са два знака неједнакости);
– решава сложеније текстуалне задатке помоћу неједначина са одузимањем.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Ток часа</th></tr>
<tr><td>Припремна фаза</td><td>– Провера домаћег задатка.
– Обнављање о решавању неједначина са одузимањем у оквиру прве хиљаде.
– Циљ часа: открити како се решавају неједначине у скупу природнх бројева.</td></tr>
<tr><td>Оперативна фаза</td><td>– Самостално учење путем наставних листића на којима су захтеви диференцирани на три нивоа, при чему сваки ученик добија наставни листић у складу са својим способностима.

Наставни листић за самостално учење – основни ниво

Истраживачки задатак: Открити поступак решавања неједначина са непознатим умањеником и умањиоцем.
Задатак 1: Реши неједначину: $x – 670 < 990$

Решење 1: Дата неједначина представља пример неједначине са непознатим _______________. У неједначини знак неједнакости замени знаком једнакости и реши добијену једначину:
$x – 670 =$ _______
$x =$ _______ + ________
$x =$ _________
Треба одредити када се разлика $x – 670$ смањује.
Сети се правила о зависности разлике од промене умањеника. Како се разлика смањује када се умањеник смањује, то ће се вредност разлике $x – 670$ смањивати ако се x _______________.
То значи да је $x <$ ________.
ЗАПАМТИ: У скупу природних бројева умањеник мора бити већи или једнак умањиоцу!
У овом задатку најмања вредност непознате x може бити 670.
Скуп решења неједначине је: $x \in \{$__________, __________,….________, ________$\}$
Задатак 2: Реши неједначину: $1000 – x > 860$
Решење 2: Дата неједначина представља пример неједначине са непознатим ___________.
У неједначини знак неједнакости замени знаком једнакости и реши добијену једначину:
$1000 – x =$ _______.
$x =$ _______–________
$x =$ _________
Треба одредити када се разлика $1000 – x$ повећава. Сети се правила о зависности разлике од промене умењиоца.
Пошто се разлика повћава (расте) онда када се умањилац смањује, то ће се вредност израза $1000 – x$ повећавати ако се x _____________,
То значи да је $x <$ ________.
ЗАПАМТИ: У скупу природних бројева умањилац мора бити једнак или мањи од умањеника!
У овом задатку највећа вредност непознате x може бити 1000.</td></tr>
</table>

Скуп решења неједначине је: $x \in \{$_________, _________,….. ________, ________$\}$

Наставни листић за самостално учење – средњи ниво

Истраживачки задатак: Открити поступак решавања неједначина са непознатим умањеником и умањиоцем у скупу N.

Задатак 1: *У продавници су биле чоколаде. Када је продато 560 чоколада, у продавници је остало мање од 950 чоколада. Колико је чоколада могло бити у продавници?*

Решење 1: Како је непознат број чоколада који је био у продавници, означићемо га са x *(или неким другим словом!)*. Након што је продато 560 чоколада, остало је _________ од 950. То записујемо:

x – ______ < _______

Добили смо неједначину са непознатим _______________. У неједначини знак неједнакости замени знаком једнакости и реши добијену једначину:

x –______ = _______

x = _____________

x = _________

Треба одредити када је разлика x – ______ мања од______. На основу правила о зависности разлике од промене умањеника, вредност разлике x – _____ опада (смањује се) када се x _______ _____. Закључујемо да су решења неједначине x < _______.

ЗАПАМТИ: У скупу природних бројева умањеник мора бити већи или једнак умањиоцу!

У овом задатку најмања вредност непознате x може бити ___________.

Скуп решења неједначине је: $x \in \{$_________, _________,….. ________, ________$\}$

Тачност решења проверавамо тако што у полазној неједначини $\boldsymbol{x}$ заменимо неком од нађених вредности и утврђујемо да ли важи добијена неједнакост.

x –______ < _______

_____– _____ < ______ (x замени неким решењем из скупа решења)

_____< ______

Задатак 2: *На паркингу је било 1100 аутомобила. Након што је неколико аутомобила отишло, на паркингу је остало више од 860 аутомобила. Колико је аутомобила могло отићи са паркинга?*

Решење 2: Како је непознат број аутомобила који је отишао са паркинга, означићемо га са x *(може и неким другим словом!)*. Након што су аутомобили отишли, на паркингу је остало ___________ од 860. То записујемо:

_______ – x > _______

Добили смо неједначину са непознатим _______________. У неједначини знак неједнакости замени знаком једнакости и реши добијену једначину:

_______ – x = _______

x = _______________

x = _________

Треба одредити када је разлика ______ – x већа од______. На основу правила о зависности разлике од промене умањиоца, вредност разлике ______ – x расте (повећава се) када се x____________. Закључујемо да су решења неједначине x < _______.

ЗАПАМТИ: У скупу природних бројева умањилац мора бити једнак или мањи од умањеника!

У овом задатку највећа могућа вредност непознате x може бити ___________.

Скуп решења неједначине је: $x \in \{$_________, _________,….. ________, ________,$\}$

Тачност решења проверавамо тако што у полазној неједначини $\boldsymbol{x}$ заменимо неком од нађених вредности и утврђујемо да ли важи добијена неједнакост.

______– x >_______

_____– _____ > ______ (x замени неким решењем из скупа решења)

_____> ______

Наставни листић за самостално учење – напредни ниво

Истраживачки задатак: Открити поступак решавања неједначина са непознатим умањеником и умањиоцем у скупу N.

Пример 1: *Од уштеђеног новца Марко је купио лопту која кошта 2340 динара. Продавац му је вратио кусур који није био довољан да купи књигу од 780 динара. Колика би Маркова уштеђевина могла бити?*

Решење 1: У задатку је непознато______________________________, тај број обележићемо са x *(може и неким другим словом!)*. Познато је _______________ ____________________.

Напиши преко бројевног израза износ Марковог кусура након куповине лопте x –______.

Како тај кусур није био довољан за куповину књиге која кошта 780 динара, па је он ____________ од 780.

Запиши одговарајућу неједначину:______________ ________________________

	У овој неједначини је непознат ________________________. Уместо знака неједначине, стави знак једнакости и реши одговарајућу једначину: ________________ = ______ __________________________ __________________________ Вредност разлике x -_______ у неједначини треба да буде _________од ________. Сети се правила о зависности разлике од промене умањеника. Да би се разлика смањивала, непозната x, тј. умањеник, треба да се ______________. То значи да је $x$$\boxed{}$ __________ (у квадратић упиши знак неједнакости) Скуп решења неједначине је $x \in \{$______________________________________$\}$ **Обрати пажњу на то која је најмања могућа вредност за *x*.** Одговор на питање у задатку:____. Нека су ***a***, ***b*** и ***x*** природни бројеви. Ако је $\boldsymbol{x - a < b}$, онда је $\boldsymbol{x <}$ _____+_____. И ако је $\boldsymbol{x - a > b}$, онда је $\boldsymbol{x >}$ _______+________ **Пример 2**: *Стева је у касици имао 5000 динара. Купио је књигу и утврдио да је у касици остало више од две новчанице од по 1000 динара. Колика би могла бити цена књиге?* **Решење 2:** Познато је да је Стева у касици имао ___________ динара. Непозната је _____________ коју је Стева купио, обележићемо је са *x (или неким другим словом!)*. Напиши бреко бројевног израза суму новца која је остала у касици након куповине књиге: ______– x. Како је у касици остало више од две новчанице од по 1000 динара, то значи да је у њој било _________ од ____________. Запиши одговарајућу неједначину:_________________________ У овој неједначини је непознат ________________________. Уместо знака неједначине, стави знак једнакости и реши одговарајућу једначину: ________________ = _______ ____________________________ ____________________________ Вредност разлике_______– x у неједначини треба да буде __________од ________. Сети се правила о зависности разлике од промене умањиоца. Разлика ће се повећавати, ако се непозната x, тј. умањилац, ______________. То значи да је $x$$\boxed{}$ _________ (у квадратић упиши знак неједнакости) Скуп решења неједначине је $x \in \{$____________________________$\}$ **Обрати пажњу на то која је највећа могућа вредност за *x*.** Одговор на питање у задатку:____. Нека су ***a, b, x*** природни бројеви, при чему је $\boldsymbol{a > b}$ и $\boldsymbol{a > x}$ Ако је $\boldsymbol{a - x < b}$, онда је $\boldsymbol{x >}$ _____–_____. И ако је $\boldsymbol{a - x > b}$, онда је $\boldsymbol{x <}$______–_____. – Ученици добијају повратну информацију о тачности у раду и извођењу закључака. Утврђују број тачних и погрешних одговора, исправљају грешке и, уз аргументовани разговор са учитељем и осталим ученицима исте групе, уче закључке наставне јединице. – Ученици увежбавају новоусвојена знања помоћу наставних листића на којима су задацима диференцирани на три нивоа сложености.
Верификативна фаза	– Повратна информација о тачности задатака са наставних листића. – Давање додатних подстицаја и задужења за рад. – Евалуација часа од стране ученика и учитеља.

Вежба број 13

Наставна јединица: *Неједначине са сабирањем и одузимањем*

Тип часа: систематизација

Диференцијација захтева:

Основни ниво: Ученик треба да:
– препознаје записе који представљају неједначине са сабирањем и одузимањем, као и непознату компоненту у њима, и вербално их именује;
– зна правилну употребу симбола {,} и ∈ за записивање скупа решења неједначине;
– зна таблично да одреди скуп решења неједначине са сабирањем и одузимањем у једноставним случајевима;
– зна поступак одређивања решења експлицитно дате неједначине са сабирањем и одузимањем, али без дубљег разумевања истог.
Средњи ниво: Ученик треба да:
– схвати поступак решавања и одређује скуп решења неједначине са сабирањем и одузимањем користећи знања о решавању једначина са сабирањем и одузимањем и уз функционалну примену правила о зависности резултата од промене компонената;
– за једноставне текстуалне задатке саставља и решава одговарајућу неједначину са сабирањем и одузимањем.
***Напредни ниво*:** Ученик треба да:
– саставља одговарајућу неједначину на основу датог скупа решења;
– решава двоструке неједначине (са два знака неједнакости);
– решава сложеније текстуалне задатке помоћу неједначина са сабирањем и одузимањем.

Ток часа

Припремна фаза

– Провера домаћег задатка.
– Обнављања претходно усвојених садржаја о решавању једначина са сабирањем и одузимањем.
– Циљ часа: утврдити и систематизовати стечена знања о неједначинама са сабирањем и одузимањем у скупу *N*.

Оперативна фаза

– Самостално вежбање ученика на наставним листићима са диференцираним садржајима. Сваки наставни листић, поред задатака за конкретни ниво, садржи и задатке за наредни виши ниво.

Наставни листић за самостално вежбање – основни ниво

1. Нађи скуп решења неједначине користећи таблицу:
$x + 750 < 759$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$x \in \{$____$\}$

2. Реши неједначину $319 + x > 425$.
____
$x \in \{$____$\}$
3. Од ког броја треба одузети 450 да би разлика била мања 15?
Неједначина:____________________________________
$x \in \{$____$\}$
4. Марко је имао 980 динара. Купио је оловку и сада има више од 845 динара. Колико је оловка могла да кошта?
5. У скупу $\{100,200,300,400,500,600,700,800,900\}$ нађи решења неједначине
$1000 - x > 300$
____

Наставни листић за самостално вежбање– средњи ниво

1. Нађи скуп решења неједначине:
а) $x + 1650 > 7640$ б) $5380 - x < 2640$
$x \in \{$__________________________$\}$
$x \in \{$______________________$\}$

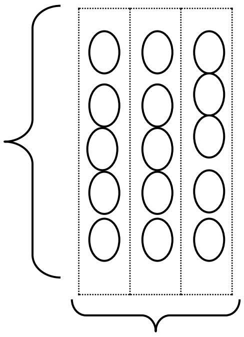
	2. Када непознати број увећаш за 3456, добићеш збир који је већи од 5690. Који би непознати број могао бити? *Неједначина*:__________ $x \in \{$__________$\}$ *Одговор*:__________. 3. Када од 63841 одузмеш неки број, добићеш разлику која је мања од збира бројева 12980 и 8540. Одреди скуп решења неједначине. *Неједначина*:__________ $x \in \{$__________$\}$ 4. Ако неки број умањиш за 3500, добићеш разлику већу од највећег четвороцифреног броја. Пронађи могуће бројеве. *Неједначина*:__________ $x \in \{$__________$\}$ 5. У једном воћњаку је засађено 1045 стабала јабука и известан број шљива, тако да их је укупно мање од 1780. Колико је у воћњаку могло бити шљива? *Неједначина*:__________ $x \in \{$__________$\}$ *Одговор*:__________. 6. У магацину је било 7450 лизалица. Када је продавац један део однео у продавницу, у магацину је остало више 5600 лизалица. Колико је лизалица продавац могао да донесе у продавницу? *Неједначина*:__________ $x \in \{$__________$\}$ *Одговор*:__________. ***Наставни листић за самостално вежбање – напредни ниво*** 1. Од најмањег петоцифреног броја одузми неки број тако да разлика буде мања од највећег четвороцифреног броја. Одреди скуп решења за непознати број. *Неједначина*:__________ $x \in \{$__________$\}$ 2. За дату неједначину састави одговарајући текст, а потом је реши: $x – 650 < 8\ 040$ __________ Решење неједначине: __________ $x \in \{$__________$\}$ 3. Прошле године на „Архимедесовом“ математичком турниру учествовало је 2980 ученика. Колико је могло бити ученика на овогодишњем турниру, ако их је на обама било мање од 7945. *Неједначина*:__________ $x \in \{$__________$\}$ *Одговор*:__________. 4. Састави неједначину чији је скуп решења $\{1000, 1001, 1002...\}$ *Неједначина*:__________ 5. Маја је имала 2200 динара у касици. Када је добила новац од баке и деке, још увек није могла да купи Велики атлас који кошта 2500 динара. Колико је новца могла да добије од баке и деке? *Неједначина*:__________ $x \in \{$__________$\}$ *Одговор*:__________. 6. Стева је у касици имао 5000 динара. Купио је лопту и утврдио да има довољно пара да купи књигу која кошта 1370 динара, али нема довољно пара за књигу која кошта 1700 динара. Колика је могла бити цена лопте? *Неједначина*:__________ $x \in \{$__________$\}$ *Одговор*:__________.
Верификативна фаза	– Повратна информација о тачности задатака са наставних листића. – Давање додатних подстицаја и задужења за рад. – Евалуациа часа од стране ученика и учитеља.

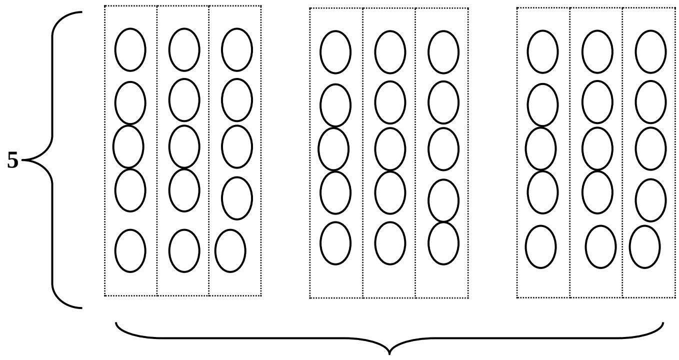
<table>
<tr><th colspan="2">Вежба број 14</th></tr>
<tr><td>Наставна јединица:</td><td>Изрази са промењљивом</td></tr>
<tr><td>Тип часа:</td><td>обрада</td></tr>
<tr><td>Диференцијација захтева:</td><td>Основни ниво: Ученик треба да:
– препозна и вербално именује израз са промењљивом;
– одређује вредност израза са промењљивом за дате вредности промењљиве са једном рачунском операцијом.
Средњи ниво: Ученик треба да:
– одређује вредност израза са промењљивом за дате вредности промењљиве таблично;
– саставља и одређује вредност израза са промењљивом за дате вредности промењљиве са највише две рачунске операције.
Напредни ниво: Ученик треба да:
– решава текстуалне задатке формирањем израза са промењљивом;
– саставља, чита и рачуна вредност израза са промењљивом за дате вредности промењљиве са више операција.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Ток часа</th></tr>
<tr><td>Припремна фаза</td><td>– Провера домаћег задатка.
– Обнављање о математичким изразима, о вредности израза и о изразима са промењљивом.
– Циљ часа: открити како се састављају изрази са промењљивом и како се рачуна вредност тих израза за различите вредности промењљиве у скупу природних бројева.</td></tr>
<tr><td>Оперативна фаза</td><td>– Самостално учење путем наставних листића на којима су захтеви диференцирани на три нивоа, при чему сваки ученик добија наставни листић у складу са својим способностима.

Наставни листић за самостално учење – основни ниво
Истраживачки задатак: Открити како се одређује вредност израза са промењљивом за дате вредности промењљиве.
Задатак 1: Одреди вредност израза $x \cdot 5$
Слово у овом изразу се назива промењљива и пише се малим писаним словима латинице, може на пример: x, y, a, b, c...
За разне вредности промењљиве x израз $x \cdot 5$ ће имати различите вредности. Ако је:
$x = 0$, онда је $0 \cdot 5 =$ ________
$x = 1$, онда је ______ $\cdot 5 =$ ________
$x = 2$, онда је _______________________
$x = 3$, онда је _______________________
Шта се дешава са вредношћу израза када се мењају вредности за x?
____.
Закључак: Изрази који садрже слово чија се бројевна вредност може мењати називају се изрази са___________________. Вредност израза са промењљивом израчунавамо тако што промењљиву заменимо ________________________.

Наставни листић за самостално учење – средњи ниво
Истраживачки задатак: Открити како се саставља израз са промењљивом и како се одређује његова вредност за дате вредности промењљиве.
Задатак 1: Марко је замислио неки број x. Двоструку вредност замишљеног броја повећао је за 2400. Напиши одговарајући израз.
Тражени израз има облик: _____ · _____ +_____
Слова у овом изразу се називају промењљиве и пишу се малим писаним словима латинице: x, y, a, b, c... Промењљиве могу имати више бројевних вредности.
Вредност овог израза можемо одредити и помоћу таблице тако што ћемо за дате вредности
<table>
<tr><th>x</th><th>100</th><th>200</th><th>300</th><th>400</th><th>500</th><th>600</th><th>700</th><th>800</th><th>900</th></tr>
<tr><td>_____ · _____ +_____</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
промењљиве x и y израчунати вредност израза и уписати је на одговарајуће место у табели:
Шта се дешава са вредношћу израза када се мења вредност за x?
____.
Закључак: Изрази који садрже слово (или више слова) чија се бројевна вредност може мењати називају се изрази са___________________. Вредност ових израза можемо израчунати тако што ____.</td></tr>
</table>

	Наставни листић за самостално учење – напредни ниво **Истраживачки задатак**: Открити како се решавају задаци формирањем израза са промењљивом и како се рачуна вредност тих израза. **Задатак 1:** *У продавници је било* ***a*** *килограма воћа. Први дан је продато* ***b*** *килограма, други дан* ***c*** *килограма мање него што је остало после првог дана. Колико је килограма воћа продато другог дана?* После првог дана у продавници је остало ______–______ килограма воћа. Из услова задатка напиши у облику израза колико је килограма воћа продато другог дана:____ Израчунај вредност претходног израза за a = 1356, b = 956, c = 20. ____ Слова у овом изразу могу имати више бројевних вредности и називају се ________________________. ***Закључак:*** Изрази који садрже слово (или више слова) чија се бројевна вредност ________________ називају се изрази са___________________. Вредност ових израза можемо израчунати тако што ____. – Ученици добијају повратну информацију о тачности у раду и извођењу закључака. Утврђују број тачних и погрешних одговора, исправљају грешке и, уз аргументовани разговор са учитељем и осталим ученицима исте групе, уче закључке наставне јединице. – Ученици увежбавају новоусвојена знања помоћу наставних листића на којима су задацима диференцирани на три нивоа сложености.
Верификативна фаза	– Давање додатних подстицаја и задужења за рад. – Евалуација часа од стране ученика и учитеља.

Вежба број 15	
Наставна јединица:	*Зависност производа од промене чинилаца*
Тип часа:	обрада
Диференцијација захтева:	***Основни ниво:*** Ученик треба да: – препознаје зависност производа од промене чинилаца на цртежима и примерима којима је зависност представљена; – репродукује на једноставним примерима, вербално изражава и именује правило које се односи на зависност призвода од промене чинилаца. ***Средњи ниво:*** Ученик треба да: – схвати правило о зависности производа од промене чинилаца које уочава уз помоћ таблице и вербално изражава то правило; – симболички (помоћу слова) записује вербално исказано правило које се односи на зависност производа од промене чинилаца; – уочава (одређује) „скривене“ вредности слова у примерима којима је представљена зависност производа од промене чинилаца; – примењује знања о зависности производа од промене чинилаца као „олакшицу“ при рачунању у експлицитно датим примерима. ***Напредни ниво*:** Ученик треба да: – примењује знања о зависности производа од промене чинилаца у решавању текстуалних задатака који се односе на реалне животне ситуације, као и на решавање проблемских задатака.
Ток часа	
Припремна фаза	– Провера домаћег задатка. – Обнављање о компонентама рачунске радње множење. – Циљ часа: открити да ли се и како мења производ ако један од чинилаца повећамо или смањимо неколико пута и како то можемо користити као олакшицу при рачунању.
Оперативна фаза	– Самостално учење путем наставних листића на којима су захтеви диференцирани на три нивоа, при чему сваки ученик добија наставни листић у складу са својим способностима. ***Наставни листић за самостално учење – основни ниво*** **Истраживачки задатак 1**: Открити како се мења производ ако се један од чинилаца повећа неколико пута. **Задатак 1.** Погледај следеће слике и утврди како се мења производ када се први чинилац повећа неколико пута. 5  **3** **3 · 5 =_____**



3 · 3

(3 · **3**) · 5 = ___ · 5 = _____, а то је 15 · _____

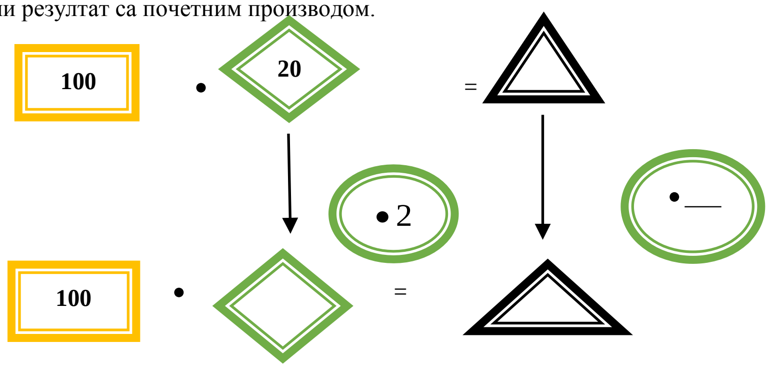
Први чинилац је повећан три пута и производ се _________ _____ пута.

Задатак 2. *Изврши множење следећих бројева:*

100 · 20 =_____

Први чинилац је ______, други чинилац је_____, производ је број______.

У наредном примеру је извршено повећање другог чиниоца. Попуни празна поља и упореди добијени резултат са почетним производом.



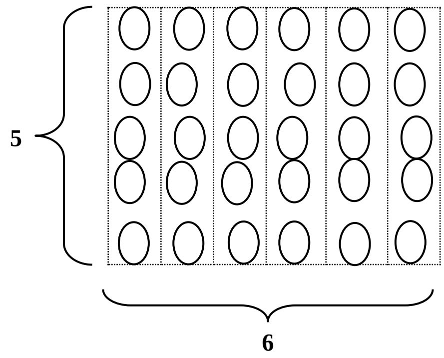
100 · (20 · **2**) = 100 · ____ = ____, а то је _____ · **2**

Други чинилац је повећан два пута и производ се _________ _____ пута.

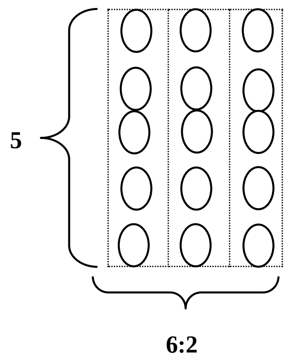
Закључак 1: Ако се један од чинилаца повећа неколико пута, и производ ће се _____________ исто толико пута.

Истраживачки задатак 2: Открити како се мења производ ако се један од чинилаца смањи неколико пута.

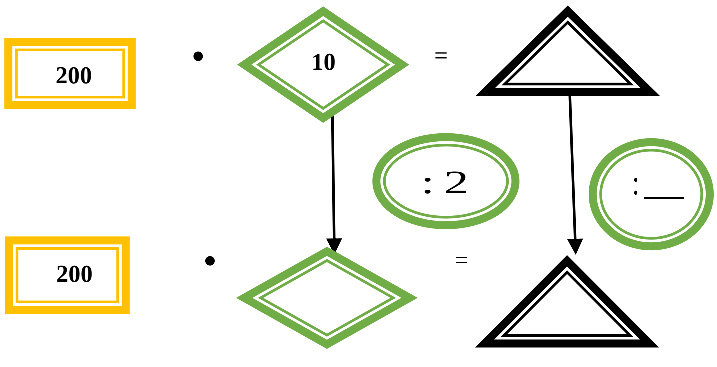
Задатак 1. Погледај следеће слике и утврди како се мења производ када се први чинилац смањи неколико пут.



6 · 5 = ______



(6 : 2) · 5 =_____ · 5 =_____, а то је 30 :____
Први чинилац је смањен два пута и производ се _________ _____ пута.
Задатак 2. *Изврши множење следећих бројева:*
200 · 10 =_____
Први чинилац је ______, други чинилац је_____, производ је број______.
У наредном примеру је извршено смањење другог чиниоца. Попуни празна поља и упореди добијени резултат са почетним производом.



200 · (10 : 2) = 200 · ____ = ____, а то је _____ **: 2**
Други чинилац је смањен два пута и производ се ___________ _____ пута.
Закључак 2: Ако се један од чинилаца смањи неколико пута, и производ ће се _____________ исто толико пута.
Ово својство множења се назива ____ (погледај наслов на табли!).

Наставни листић за самостално учење – средњи ниво
Истраживачки задатак 1: Открити како се мења производ ако се један од чинилаца повећа неколико пута.
Задатак 1. Израчунај производ датих бројева 6 · 100 = ________.
Број 60 представља први __________, број 100 је _______________, а производ је ________.

У табели је извршена промена чинилаца. Попуни празна поља и утврди како се мења производ у зависности од промене првог или другог чиниоца.

a	**6 · 2**	**6**	**6 · 4**	**6**
b	**100**	**100 · 3**	**100**	**100 · 5**
a* · *b				

Како се у претходној табели мењају чиниоци?______________________________.
Посматрај колону у којој је први чинилац повећан два пута и закључи каква промена је настала код производа.
Производ се ______________ ______ пута.
Посматрај колону у којој је други чинилац повећан пет пута и закључи каква промена је настала код производа.
Производ се ______________ ______ пута.
Дакле, производ се ___________ толико пута колико се пута повећао један од чинилаца.
Закључак 1: Ако се један од чинилаца ________________ неколико пута, производ ће се ___________________________ исто толико пута.
Како чиниоци могу бити било који природни бројеви, уместо бројева се могу написати слова као замена за било који природан број. Претходни закључак можемо записати овако:
ако је $a \cdot b = c$, онда је $(a \cdot x) \cdot b = c \cdot$ ____ и $a \cdot (b \cdot x) = c \cdot$ ____.
Истраживачки задатак 2: Открити како се мења производ ако се један од чинилаца смањи неколико пута.
Задатак 2. Израчунај производ датих бројева: 20 · 100 = ________.
Број 20 представља први __________, број 100 је _______________, а производ је ________.
У табели је извршена промена чинилаца. Попуни празна поља и утврди како се мења производ у зависности од промене првог или другог чиниоца.

a	**20 : 2**	**20**	**20 : 5**	**20**
b	**100**	**100 : 4**	**100**	**100 : 10**
a* · *b				

Како се у претходној табели мењају чиниоци?______________________________.
Посматрај колону у којој је први чинилац смањен два пута и закључи каква промена је настала код производа.
Производ се ______________ ______ пута.
Посматрај колону у којој је други чинилац смањен десет пута и закључи каква промена је настала код производа.
Производ се ______________ ______ пута.
Дакле, производ се ___________ толико пута колико се пута смањио један од чинилаца.
Закључак 2: Ако се један од чинилаца ________________ неколико пута, производ ће се _______________________ исто толико пута.
Како се уместо бројева могу ставити слова као замена за било који природан број, претходни закључак можемо записати овако: ако је $a \cdot b = c$ и ако су a и b дељиви са x, онда је $(a : x) \cdot b = c :$ ____ и $a \cdot (b : x) = c :$ _____.
Ово својство множења се назива ____.
(сети се где би могао/ла да видиш назив)

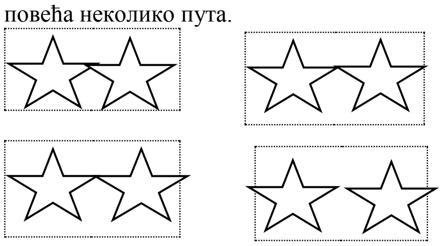
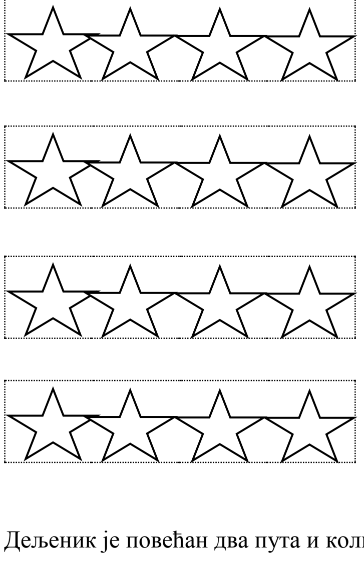
Наставни листић за самостално учење – напредни ниво

Истраживачки задатак 1: Открити како се мења производ ако се један од чинилаца повећа неколико пута.
Задатак 1. *У једном маркету продавац је на четири рафа поређао по 260 кесица кафе. Колико је укупно кесица кафе било у маркету?*
а) Укупан број кесица кафе је: _____ · ______=_______.
Први чинилац је ______, други чинилац је_____, производ је број______.
б) *Да је на троструко више рафова поређано по 260 кесица кафе, колико би укупно кесица*

	било? Напиши преко бројевног израза укупан број кесица након увећања броја рафова и израчунај вредност тог израза. (____ · ____) · ____=_____ · _____=_____= 1040 · ___ Шта се десило са бројем рафова на које су ређане кесице кафе?________________________. Како се променио укупан број кесица?____. Дакле, први чинилац се _____________ и производ се___________________. в) *Да је продавац на сваки од четири рафа поређао двоструко више кесица кафе, колико би укупно кесица било?* Напиши преко бројевног израза укупан број кесица након увећања броја кесица на сваком рафу и израчунај вредност тог израза. ______ · (_____ · _____) =______ · ______=______= 1040 · _____ Шта се десило са бројем кесица на сваком рафу?____________________________________. Шта се десило са укупним бројем кесица? ____. Дакле, други чинилац се _____________ и производ се________________. Упореди промену производа са променом првог или другог чиниоца. Шта закључујеш? ***Закључак 1:***____. Ако се зна да било који природан број може бити замењен неким словом, претходно правило ће гласити: ако је ***a · b = c,*** онда је **(*a* · *x*) · *b* =____ · ____** и ***a* · (*b* · *x*) = ____ · ____.** **Истраживачки задатак 2**: Открити како се мења производ ако се један од чинилаца смањи неколико пута. **Задатак 2.** *Продавац је у 12 гајбица поређао по 20 килограма банана. Колико је укупно било банана?* а) Укупна маса банана износи: _____ · ______=_______. Први чинилац је _______, други чинилац је_______, производ је број________. б) *Колико би килограма банана остало у продавници да је продавац половину гајбица однео у магацин?* Напиши преко бројевног израза укупну масу банана ако би продавац уклонио половину гајбица и израчунај вредност тог израза. (____ : ____) · ____=_____ · _____=_____= 240 :____ Шта се десило са бројем гајбица?____. Шта се десило са укупном масом банана у продавници?_______________________________. Дакле, први чинилац се _____________ и производ се___ _____________. в) *Колико би килограма банана било у продавници да је продавац продао по половину банана из сваке од 12 гајбица?* Напиши преко бројевног израза укупну масу банана након што су из сваке гајбице продате банане и израчунај вредност тог израза. _____ · (______: ______) =_____ · _____=_____= 240 :____ Шта се десило са масом банана у свакој гајбици?_______________________________. Шта се десило са укупном масом банана у продавници? ______________________________. Дакле, други чинилац се _____________ и производ се________________. Упореди промену производа са променом првог или другог чиниоца. Шта закључујеш? ***Закључак 2:***____. Ако се зна да било који природан број може бити замењен неким словом, претходно правило ће гласити**:** ако је ***a · b = c*** и ако су ***a*** и ***b*** дељиви са ***x,*** онда је **(*a* : *x*) · *b* = ___: ___** и ***a* · (*b* : *x*) = ____ : ____.** **Ово својство множења се назива ___________________________.** – Ученици добијају повратну информацију о тачности у раду и извођењу закључака. Утврђују број тачних и погрешних одговора, исправљају грешке и, уз аргументовани разговор са учитељем и осталим ученицима исте групе, уче закључке наставне јединице. – Ученици увежбавају новоусвојена знања помоћу наставних листића на којима су задацима диференцирани на три нивоа сложености.
Верификативна фаза	– Прегледно понављање садржаја обрађених на часу (рекапитулација обрађених садржаја). Шта смо данас научили? Како се мења производ у зависности од промене чинилаца? – Давање додатних подстицаја и задужења за рад. – Евалуација часа од стране ученика и учитеља.

Вежба број 16	
Наставна јединица:	*Зависност производа од промене чинилаца*
Тип часа:	утврђивање
Диференцијација захтева:	***Основни ниво:*** Ученик треба да: – препознаје зависност производа од промене чинилаца на цртежима и примерима којима је зависност представљена; – репродукује на једноставним примерима, вербално изражава и именује правило које се односи на зависност призвода од промене чинилаца. ***Средњи ниво:*** Ученик треба да: – схвати правило о зависности производа од промене које уочава уз помоћ таблице и вербално изражава то правило; – симболички (помоћу слова) записује вербално исказано правило које се односи на зависност производа од промене чинилаца; – уочава (одређује) „скривене“ вредности слова у примерима којима је представљена зависност производа од промене чинилаца; – примењује знања о зависности производа од промене чинилаца као „олакшицу“ при рачунању. ***Напредни ниво*:** Ученик треба да: – примењује знања о зависности производа од промене чинилаца у решавању текстуалних задатака који се односе на реалне животне ситуације, као и на решавање проблемских задатака.
Ток часа	
Припремна фаза	– Провера домаћег задатка. – Обнављање превила о зависности производа од промене чинилаца. – Циљ часа: утврдити и увежбати стечена знања о зависности производа од промене чинилаца**.**
Оперативна фаза	– Самостални рад ученика на наставним листићима са диференцираним садржајима. Сваки наставни листић, поред задатака за конкретни ниво, садржи и задатке за наредни виши ниво. ***Наставни листић за самостално вежбање – основни ниво*** 1. Допуни започете реченице: а) Ако се један од чинилаца повећа 17 пута, производ ће се ______________ пута. б) Ако се један од чинилаца смањи 9 пута, производ ће се ______________ пута. в) Ако се један од чинилаца _____________ пута, производ ће се повећати 4 пута. г) Ово својство се назива ____. 2. Ако знаш да је $15 \cdot 12 = 180$, израчунај вредност следећих израза вршећи само једно множење или дељење. $15 \cdot (12 \cdot 5) = 180 \cdot$ ________ $=$ ________ $(15 \cdot 10) \cdot 12 =$ ______________________ $(15 : 4) \cdot 12 = 180 :$ _______ $=$ ________ 3. Не рачунајући допиши шта недостаје: а) $\mathbf{120 \cdot 17 = 2040}$ $(120 \cdot 2) \cdot 17 = 2040 \cdot$ ______ $(120 : 10) \cdot 17 = 2040 :$ ______ б) $\mathbf{55 \cdot 15 = 825}$ $55 \cdot (15 \cdot 5) = 825 \cdot$ ______ $55 \cdot (15 : 3) = 825 :$ ______ 4. Када се први чинилац повећа 6 пута, производ је 660. Колики је био производ пре повећања првог чиниоца?____. ***Наставни листић за самостално вежбање – средњи ниво*** 1. Ако је $\boldsymbol{a \cdot b = 2640}$**,** допиши одговарајући број тако да једнакост буде тачна. $(a \cdot$ ______$) \cdot b = 2640 \cdot 4$ $(a : 5) \cdot b =$ __________________ $a \cdot (b :$ ____$) = 2640 : 10$ $a \cdot (b \cdot 3) =$ _________________ 2. На линије упиши знак < или > без рачунања тако да неједнакости буду тачне. $152 \cdot 15$ ______ $152 \cdot 14$ $890 \cdot 60$ ______ $980 \cdot 60$ $1500 \cdot 15$ ______ $15 \cdot 1600$ 3. Одреди вредности промењиве ***a*** упоређујући другу једнакост са првом. а) $80 \cdot 40 = 3200$ $(80 \cdot \boldsymbol{a}) \cdot 40 = 6400$ $\boldsymbol{a} =$________

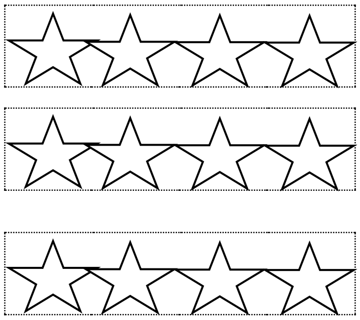
	б) $80 \cdot 60 = 5400$ $80 \cdot (60 : \boldsymbol{a}) = 540$ $\boldsymbol{a}$ =________ 4. Израчунај производ највећег двоцифреног и најмањег петоцифреног броја: ____ Како ће се овај производ променити ако се: а) први чинилац повећа онолико пута колико износи најмањи број друге десетице?____. б) други чинилац смањи онолико пута колико износи највећи број прве стотине?____. в) први чинилац повећа 8 пута, а други смањи 2 пута?________________________. ***Наставни листић за самостално вежбање – напредни ниво*** 1. У 16 кесица има по осам сличица у свакој. Број сличица у кесици је смањен 4 пута. Како треба променити број кесица да би укупан број сличица био два пута већи?____ 2. Производ двају природних бројева је 1600. Први чинилац је 4 пута мањи од другог. Како ће се променити производ ових двају бројева ако: а) други чинилац постане једнак првом:____________________________________ б) први чинилац постане једнак другом:___________________________________ 3. Миша има 560 сличица фудбалера, а његов друг Марко има 5 пута више сличица од њега. Колико сличица има Марко? Колико би сличица имао Марко када би Миша имао 10 пута мање сличица? (Примени својство зависности производа од премене чинилаца.)____ 4. Требало је израчунати производ $456 \cdot 440$. Мара је приликом преписивања направила грешку и, уместо 4, на месту цифре стотине и цифре десетице у другом чиниоцу записала цифру 8. Како се променио производ који је добила Мара у односу на тражени производ у задатку?___________________________________
Верификативна фаза	– Повратна информација о тачности задатака са наставних листића. – Давање додатних подстицаја и задужења за рад. – Евалуација часа од стране ученика и учитеља.

<table>
<tr><th colspan="2">Вежба број 17</th></tr>
<tr><td>Наставна јединица:</td><td>Зависност количника од промене дељеника</td></tr>
<tr><td>Тип часа:</td><td>обрада</td></tr>
<tr><td>Диференцијација захтева:</td><td>Основни ниво: Ученик треба да:
– препознаје зависност количника од промене дељеника на цртежима и примерима којима је зависност представљена;
– репродукује на једноставним примерима, вербално изражава и именује правило које се односи на зависност количника од промене дељеника.
Средњи ниво: Ученик треба да:
– схвати правило о зависности количника од промене дељеника које уочава уз помоћ таблице и вербално изражава то правило;
– симболички (помоћу слова) записује вербално исказано правило које се односи на зависност количника од промене дељеника;
– уочава (одређује) „скривене“ вредности слова у примерима којима је представљена зависност количника од промене дељеника;
– примењује знања о зависности количника од промене дељеника као „олакшицу“ за рационалније рачунање у скупу N у експлицитно датим примерима.
Напредни ниво: Ученик треба да:
– примењује знања о зависности количника од промене дељеника у решавању текстуалних задатака који се односе на реалне животне ситуације, као и на решавање проблемских задатака.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Ток часа</th></tr>
<tr><td>Припремна фаза</td><td>– Провера домаћег задатка.
– Обнављање о компонентама рачунске радње дељење.
- Циљ часа: открити да ли се и како мења количник ако дељеник повећамо или смањимо неколико пута и како то можемо користити као олакшицу при рачунању.</td></tr>
<tr><td>Оперативна фаза</td><td>– Самостално учење путем наставних листића на којима су захтеви диференцирани на три нивоа, при чему сваки ученик добија наставни листић у складу са својим способностима.
Наставни листић за самостално учење – основни ниво
Истраживачки задатак 1: Открити како се мења количник када се дељеник повећа неколико пута.
Задатак 1: Погледај следеће слике и утврди како се мења количник када се дељеник повећа неколико пута.

8 : 4 = _______

(8 · 2) : 4 = _____ : 4 = ______= ______ · 2
Дељеник је повећан два пута и количник се ________ ____ пута.</td></tr>
</table>

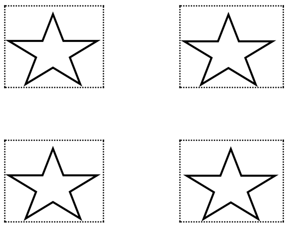
Закључак 1: Ако се дељеник повећа неколико пута, и количник ће се _____________ исто толико пута.

Истраживачки задатак 2: Открити како се мења количник када се дељеник смањи неколико пута.

Задатак 1: Погледај следеће слике и утврди како се мења количник када се дељеник смањи неколико пута.



16 : 4 = _____



(16 **: 4**) : 4 = _____: 4 = _____= _____: **4**

Закључак 2: Ако се дељеник смањи неколико пута, и количник ће се _____________ исто толико пута. Ово својство дељења се назива _________________________(погледај наслов на табли).

Наставни листић за самостално учење – средњи ниво

Истраживачки задатак 1: Открити како се мења количник када се дељеник повећа неколико пута.

Задатак 1. Израчунај количник датих бројева: 360 : 60 = ________.

Дељеник је ______, делилац је_____, количник је број______.

У табели је извршена промена дељеника. Попуни празна поља и утврди како се мења количник у зависности од промене дељеника.

a	**360 · 2**	**360 · 3**	**360 · 5**
b	**60**	**60**	**60**
a : b			

Како се у претходној табели мења дељеник?_______________________________________

Посматрај колону у којој је дељеник повећан два пута и закључи каква промена је настала код количника.

Количник се ______________ ______ пута.

Посматрај колону у којој је дељеник повећан пет пута и закључи каква промена је настала код количника.

Количник се ______________ ______ пута.

Закључак 1: **Ако се дељеник ________________ неколико пута, количник ће се _____________________ исто толико пута.**

Уместо бројева се могу ставити слова као замена за било који природан број. Ако су ***a, b, c*** и ***x*** природни бројеви и ако важи да је ***a : b = c*** (при чему је ***a*** дељив са ***b***), онда претходни закључак можемо написати: **(*a* · *x*) : *b* = *c* · ____.**

Истраживачки задатак 2: Открити како се мења количник када се дељеник смањи неколико пута.

Задатак 2. Израчунај количник датих бројева: 1800 : 60 = ________.

Дељеник је ______, делилац је_____, количник је број______.

У табели је извршена промена дељеника. Попуни празна поља и утврди како се мења количник у зависности од промене дељеника.

a	**1800 : 2**	**1800 : 5**	**1800 : 10**
b	**60**	**60**	**60**
a : b			

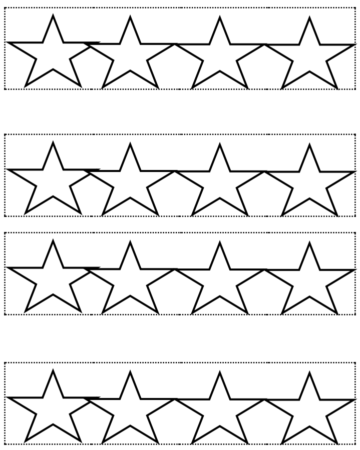
Како се у претходној табели мења дељеник?_____________________________________
Посматрај колону у којој је дељеник смањен два пута и закључи каква промена је настала код количника.
Количник се ______________ ______ пута.
Посматрај колону у којој је дељеник смањен десет пута и закључи каква промена је настала код количника.
Количник се ______________ ______ пута.
Закључак 2: **Ако се дељеник ________________ неколико пута, количник ће се _________________ исто толико пута.**
Ако знаш да слова ***a, b, c*** и ***x*** замењују било који природан број и ако је ***a : b = c***, онда претходни закључак можемо написати овако: **(*a : x*) *: b = c:* ____**, при чему је ***a*** дељиво са ***x***.
Ово својство дељења се назива ____.
(сети се где би могао/ла да видиш назив)

Наставни листић за самостално учење – напредни ниво

Истраживачки задатак 1: Открити како се мења количник када се дељеник повећа неколико пута.
Задатак 1. *Прошле године је на једном спортском такмичењу учествовало 480 ученика четвртог разреда. Такмичари су били подељени у четири истобројне екипе. Колико је ученика било у свакој екипи?*
а) Број ученика у екипи је: ____:_____=____. Дељеник је ____, делилац је____, количник је број___.
б) *Следеће године се број ученика утростручио, али је број екипа за такмичење остао исти. Колико је тада било такмичара у свакој екипи?*
Напиши преко бројевног израза број ученика у свакој екипи и израчунај вредност тог израза.(____ • ____) : ____=_____:_____=_____
Шта се десило са бројем такмичара?____________________________________.
Колико пута се повећао број ученика у свакој екипи?_______________________________.
Упореди промену количника са променом дељеника. Шта закључујеш?
Закључак 1:____.
Ако знаш да било који природан број може бити замењен неким словом, претходно правило ће гласити: ако је ***a : b = c***, где је ***a*** дељиво са ***b***, онда је **(*a* • *x*) *: b* = ________.**
Истраживачки задатак 2: Открити како се мења количник када се дељеник смањи неколико пута.
Задатак 1. *У библиотеци је стигло 800 нових књига. Библиотекар треба да их распореди на полице тако да на свакој полици буде по 40 књига. Колико полица је потребно да би се распоредиле све књиге?*
а) Број потребних полица је: ____: ____=____. Дељеник је ____, делилац је____, количник је ____.
б) *Међутим, половина тих књига је већ истог дана узета на читање. Колико полица је потребно да би се распоределе преостале књиге?*
Напиши преко бројевног израза број полица који је потребан за распоређивање преосталих књига и израчунај вредност тог израза: (____:____) : ____=_____:_____=_____
Шта се десило са бројем књига?___________________________________.
Како се променио број полица које су потребне за распоређивање књига?______________.
Упореди промену количника са променом дељеника. Шта закључујеш?
Закључак 2:____.
Ако су ***a, b, c*** и ***x*** природни бројеви и ако је ***a : b = c,*** онда је **(*a : x*) *: b* = _________________,**
при чему је ***a*** дељиво са ***x***. **Ово својство дељења се назива _________________________.**
– Ученици добијају повратну информацију о тачности у раду и извођењу закључака. Утврђују број тачних и погрешних одговора, исправљају грешке и, уз аргументовани разговор са учитељем и осталим ученицима исте групе, уче закључке наставне јединице.
– Ученици увежбавају новоусвојена знања помоћу наставних листића на којима су задацима диференцирани на три нивоа сложености.

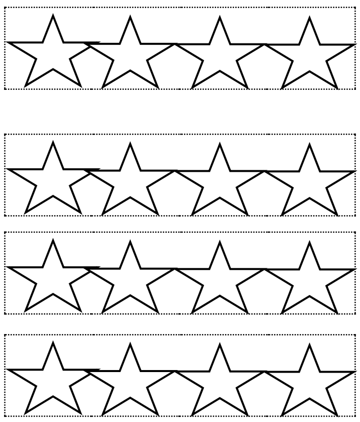
Верификативна фаза

– Прегледно понављање садржаја обрађених на часу (рекапитулација обрађених садржаја). Шта смо данас научили? Како се мења количник у зависности од промене дељеника?
– Давање додатних подстицаја и задужења за рад.
– Евалуација часа од стране ученика и учитеља.

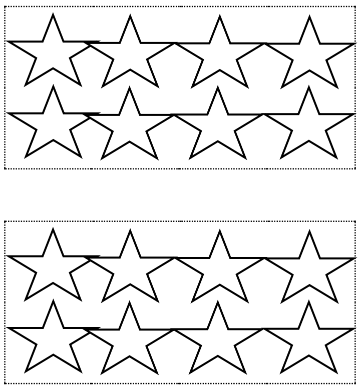
Вежба број 18	
Наставна јединица:	*Зависност количника од промене делиоца*
Тип часа:	обрада
Диференцијација захтева:	***Основни ниво:*** Ученик треба да: – препознаје зависност количника од промене делиоца на цртежима и примерима којима је зависност представљена; – репродукује на једноставним примерима, вербално изражава и именује правило које се односи на зависност количника од промене делиоца. ***Средњи ниво:*** Ученик треба да: – схвати правило о зависности количника од промене делиоца које уочава уз помоћ таблице и вербално изражава то правило; – симболички (помоћу слова) записује вербално исказано правило које се односи на зависност количника од промене делиоца; – уочава (одређује) „скривене“ вредности слова у примерима којима је представљена зависност количника од промене делиоца; – примењује знања о зависности количника од промене делиоца као „олакшицу“ за рационалније рачунање у скупу N. ***Напредни ниво*****:** Ученик треба да: – примењује знања о зависности количника од промене делиоца у решавању текстуалних задатака који се односе на реалне животне ситуације, као и на решавање проблемских задатака.
Ток часа	
Припремна фаза	– Провера домаћег задатка. – Обнављање о компонентама рачунске радње дељење. – Циљ часа: открити да ли се и како мења количник ако делилац повећамо или смањимо неколико пута и како то можемо користити као олакшицу при рачунању.
Оперативна фаза	– Самостално учење путем наставних листића на којима су захтеви диференцирани на три нивоа, при чему сваки ученик добија наставни листић у складу са својим способностима. ***Наставни листић за самостално учење – основни ниво*** **Истраживачки задатак 1**: Открити како се мења количник ако се делилац повећа неколико пут. **Задатак 1:** Погледај следеће слике и утврди како се мења количник када се делилац повећа неколико пута.  16 : 4 = _____

16 : (4 **·** **2**) = 16: ____= 2 = ____**: 2**

Делилац је повећан два пута, количник се смањио _____ пута.
Закључак 1: Ако се делилац повећа неколико пута, количник ће се _____________ исто толико пута.
Истраживачки задатак 2: Открити како се мења количник ако се делилац смањи неколико пута.
Задатак 1: Погледај следеће слике и утврди како се мења количник када се делилац смањи неколико пута



16 : 4 = _____



16: (4 **: 2**) = 16: ____= 8 = _____ **· 2**

Делилац је смањен два пута, количник се _________ _____ пута.

Закључак 2: Ако се делилац смањи неколико пута, количник ће се _____________ исто толико пута. Ово својство дељења се назива _____________________________ (погледај наслов на табли!).

Наставни листић за самостално учење – средњи ниво

Истраживачки задатак 1: Открити како се мења количник ако се делилац повећа неколико пута.

Задатак 1. Израчунај количник датих бројева: 3200 : 80 = ________.

У табели је извршена промена делиоца. Попуни празна поља и утврди како се мења количник у зависности од промене делиоца.

a	**3200**	**3200**	**3200**
b	**80 · 2**	**80 · 5**	**80 · 10**
a : b			

Како се у претходној табели мења делилац?_______________________________________

Посматрај колону у којој је делилац повећан два пута и закључи каква промена је настала код количника.

Количник се ______________ ______ пута.

Посматрај колону у којој је делилац повећан десет пута и закључи каква промена је настала код количника.

Количник се ______________ ______ пута.

Закључак 1: **Ако се делилац ________________ неколико пута, количник ће се _____________________ исто толико пута.**

Како се уместо бројева могу ставити слова као замена за било који природан број, претходни закључак можемо записати овако: ако је $a : b = c$, онда је $a : (b \cdot x) = c :$ ____.

Истраживачки задатак 2: Открити како се мења количник ако се делилац смањи неколико пута.

Задатак 2. Израчунај количник датих бројева: 3600 : 40 = ________.

У табели је извршена промена дељеника. Попуни празна поља и утврди како се мења количник у зависности од промене дељеника.

a	**3600**	**3600**	**3600**
b	**40 : 4**	**40 : 5**	**40 : 10**
a : b			

Како се у претходној табели мења делилац?____

Посматрај колону у којој је делилац смањен четири пута и закључи каква промена је настала код количника.

Количник се ______________ ______ пута.

Посматрај колону у којој је делилац смањен пет пута и закључи каква промена је настала код количника.

Количник се ______________ ______ пута.

Закључак 2: **Ако се делилац ________________ неколико пута, количник ће се ________________________ исто толико пута.**

Пошто дата слова замењују било који природан број, ако је $a : b = c$ (где је a дељиво b), онда је $a : (b : x) = c \cdot$ ____ (b је дељиво са x).

Ово својство дељења се назива:___________________________________ (Сети се где би могао/ла да прочиташ назив).

Наставни листић за самостално учење – напредни ниво

Истраживачки задатак 1: Открити како се мења количник ако се делилац повећа неколико пута.

Задатак 1. *Авион за три часа прелети 1350 километара. Колико километара авион прелети за један час ако се стално креће истом брзином?*

а) Дужина пута коју авион прелети за један час: _____ : ______=_______.

Дељеник је ______, делилац је_____, количник је број______.

б*) Због лоших временских прилика, једног дана је авион растојање од 1350 километара прешао за двоструко више времена. Колико километара је тада авион прелетео за један час ако је све време летео истом брзином?*

Напиши преко бројевног израза дужину пута коју је авион прешао за један час тог дана и израчунај вредност тог израза.

____: (____ · ____) =_____:_____=_____

Како се променило време за које авион прелази дато растојање?_____________________.

Шта се десило са дужином пута коју је авион прелетео за један час?___________________.

Дакле, делилац се _____________ и количник се____________________.

Упореди промену количника са променом делиоца. Шта закључујеш?

	Закључак 1____. Ако знаш да било који природан број може бити замењен неким словом, претходно правило ће гласити: ако је ***a : b = c***, онда ***a* : (*b* · *x*) = ____________.** **Истраживачки задатак 2**: Открити како се мења количник ако се делилац смањи неколико пута. **Задатак 1**. *Обућар Пера треба да направи 180 пари ципела за 9 дана. Колико пари ципела ће направити за један дан ако сваког дана прави исти број ципела?* а) Број ципела које обућар Пера направи за један дан: ______ : ______=_______. Дељеник је ______, делилац је_____, количник је број______. б) *Пошто се журило због извоза, послодавац је смањио број дана за који треба да се направе ципеле три пута. Колико би сада ципела Пера морао да направи за један дан?* Напиши преко бројевног израза број ципела које треба направити за један дан и израчунај вредност тог израза.____: (____: ____) =_____:_____=_____ Како се променио број дана за који је било потребно направити ципеле?________________. Шта се десило са бројем ципела које се направе за један дан?_______________________. Дакле, делилац се _____________ и количник се___________________. Упореди промену количника са променом делиоца. Шта закључујеш? ***Закључак 2:***____. Пошто дата слова замењују било који природан број, ако знаш да је ***a : b = c*** (где је ***a*** дељиво ***b*)**, напиши чему је једнако ***a* : (*b* : *x*) = _________,** при чему је ***b*** дељиво са ***x***. Ово својство дељења се назива ____. – Ученици добијају повратну информацију о тачности у раду и извођењу закључака. Утврђују број тачних и погрешних одговора, исправљају грешке и, уз аргументовани разговор са учитељем и осталим ученицима исте групе, уче закључке наставне јединице. – Ученици увежбавају новоусвојена знања помоћу наставних листића на којима су задацима диференцирани на три нивоа сложености.
Верификативна фаза	– Прегледно понављање садржаја обрађених на часу (рекапитулација обрађених садржаја). Шта смо данас научили? Како се мења количник у зависности од промене делиоца? – Давање додатних подстицаја и задужења за рад. – Евалуација часа од стране ученика и учитеља.

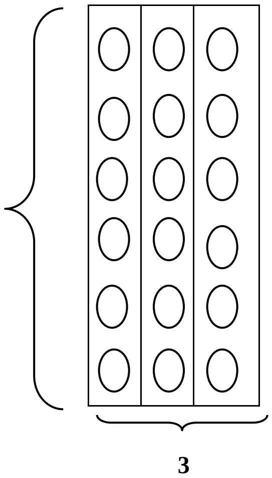
Вежба број 19	
Наставна јединица:	*Зависност количника од промене дељеника и делиоца*
Тип часа:	утврђивање
Диференцијација захтева:	***Основни ниво:*** Ученик треба да: – препознаје зависност количника од промене дељеника и делиоца на цртежима и примерима којима је зависност представљена; – репродукује на једноставним примерима, вербално изражава и именује правило које се односи на зависност количника од промене дељеника и делиоца. ***Средњи ниво:*** Ученик треба да: – схвати правило о зависности количника од промене дељеника и делиоца које уочава уз помоћ таблице и вербално изражава то правило; – симболички (помоћу слова) записује вербално исказано правило које се односи на зависност количника од промене дељеника и делиоца; – уочава (одређује) „скривене“ вредности слова у примерима којима је представљена зависност количника од промене дељеника и делиоца; – примењује знања о зависности количника од промене дељеника и делиоца као „олакшицу“ за рационалније рачунање у скупу N. ***Напредни ниво*****:** Ученик треба да: – примењује знања о зависности количника од промене дељеника и делиоца у решавању текстуалних задатака који се односе на реалне животне ситуације, као и на решавање проблемских задатака.
Ток часа	
Припремна фаза	– Провера домаћег задатка. – Обнављање правила о зависности количника од промене дељеника и делиоца. – Циљ часа: утврдити и увежбати стечена знања о зависности количника од промене дељеника и делиоца.
Оперативна фаза	– Самостални рад ученика на наставним листићима са диференцираним садржајима. Сваки наставни листић, поред задатака за конкретни ниво, садржи и задатке за наредни виши ниво. ***Наставни листић за самостално вежбање – основни ниво*** 1. Допуни започете реченице: а) Ако се делилац повећа 10 пута, количник ће се ______________________________. б) Ако се дељеник повећа 8 пута, количник ће се ______________________________. в) Ако се дељеник ______________________________, количник ће се смањити 7 пута. 2. На основу својства зависности количника од промене дељеника и делиоца не рачунајући допиши шта недостаје: **160 : 8 = 20** (160 : 2) : 8 = 20 : ______ 160 : (8 · 2) = 20 : ______ 160 : (8 : 4) = 20 · ______ (160 · 5) : 8 = 20 · ______ **3.** Упиши број који недостаје тако да добијеш тачне једнакости: **400 : 8 = 50** (400 : _____) : 8 = 50 : 10 400 : (8 ·______) = 50 : 2 (400 · _____) : 8 = 50 · 5 400 : (8 : _____) = 50 · 4 4. Када се дељеник повећа 6 пута, количник је 540. Колики је био количник пре увећања дељеника?____. ***Наставни листић за самостално вежбање – средњи ниво*** 1. Количник 1200 : 20 повећај два пута: а) променом дељеника ____ б) променом делиоца ____ 2. Ако је $a : b = 1400$, израчунај: $(a \cdot 5) : b =$ ____________ $a : (b \cdot 4) =$ _________________ $(a : 2) : b =$ _____________ $a : (b : 10) =$ ________________ 3. Шта ће се десити са количником ако дељеник смањимо 10 пута, а делилац повећамо 5 пута?____. Шта ће се десити са количником ако дељеник повећамо 6 пута , а делилац смањимо 10 пута?____.

	4. Израчунај количник, а затим одреди вредност x у једнакостима. 4200 : 70 = _______________ $(4200 \cdot x) : 70 = 120$ x = ___________ $4200 : (70 \cdot x) = 12$ x = ___________ 5. Без рачунања на црту упиши знак <, > тако да добијеш тачне неједнакости. 8900 : 50 ______ 9800 : 50 81000 : 9 ______ 81000 : 3 8400 : 20 ______ 4800 : 20 ***Наставни листић за самостално вежбање – напредни ниво*** 1. 240 килограма кромпира треба расподелити у 8 џакова тако да у сваком џаку буде иста маса кромпира. Колико би килограма кромпира требало распоредити подједнако у сваком џаку када би се број џакова смањио 2 пута? (Примени својство зависности количника од промене дељеника). ____ 2. На 30 полица у библиотеци треба поређати 1200 књига тако да на свакој полици буде исти број књига. Колико би књига требало распоредити на сваку полицу подједнако када би се број књига смањио 6 пута? (Примени својство зависности количника од промене дељеника)____ 3. Петар је планирао да пут од 240 km пређе за 3 часа. Ипак је путовао 6 часова. Применом својства о зависности количника од промене делиоца објасни колико је километара пута Петар планирао да пређе за један час, а колико је успео да пређе. ____ 4. Дат је количник $a : b = 1600$. Допуни запис тако да једнакост буде тачна (Упиши знак и одговарајући број). а) (a _____) : b = 400 б) a : (b ______) = 3200 в) (a _____) : (b : 10) = 8000
Верификативна фаза	– Повратна информација о тачности задатака са наставних листића. – Давање додатних подстицаја и задужења за рад. – Евалуација часа од стране ученика и учитеља.

<table>
<tr><th colspan="2">Вежба број 20</th></tr>
<tr><td>Наставна јединица:</td><td>Сталност производа</td></tr>
<tr><td>Тип часа:</td><td>обрада</td></tr>
<tr><td>Диференцијација захтева:</td><td>Основни ниво: Ученик треба да:
– препознаје, репродукује на једноставним примерима, вербално изражава и именује правило које се односи на сталност производа;
– препознаје сталност производа на цртежима којима је сталност представљена;
– препознаје примере који се односе на сталност производа.
Средњи ниво: Ученик треба да:
– на одговарајућим примерима или уз помоћ таблице уочи и схвати сталност производа;
– симболички (помоћу слова) записује вербално исказано правило које се односи на сталност производа;
– уочи (утврди) „скривене“ вредности слова у примерима у којима је сталност производа представљена;
– примењује знања о сталности производа као „олакшицу“ за рационалније рачунање производа у скупу N.
Напредни ниво: Ученик треба да:
– примењује знања о сталности производа у решавању текстуалних задатака који се односе на реалне животне ситуације, као и на решавање проблемских задатака.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Ток часа</th></tr>
<tr><td>Припремна фаза</td><td>– Провера домаћег задатка.
– Обнављање о зависности производа од промене чинилаца.
– Циљ часа: открити како можемо да мењамо чиниоце, а да производ остане непромењен и како то можемо користити као олакшицу при рачунању.</td></tr>
<tr><td>Оперативна фаза</td><td>– Самостално учење путем наставних листића на којима су захтеви диференцирани на три нивоа, при чему сваки ученик добија наставни листић у складу са својим способностима.

Наставни листић за самостално учење – основни ниво

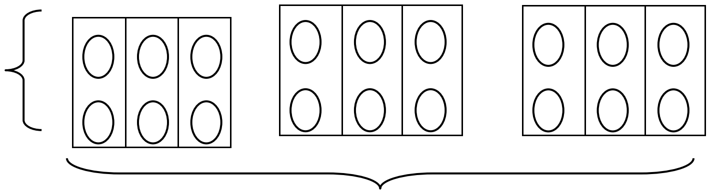
Истраживачки задатак: Открити шта се дешава са производом ако се један од чинилаца повећа неколико пута, а други смањи исто толико пута.
Задатак 1: Погледај следеће слике и уочи шта се дешава са производом када се први чинилац повећа, а други чинилац смањи исти број пута.

6

3

$\mathbf{3 \cdot 6 =}$ ______

Први чинилац је ______, други чинилац је_____, производ је број______.</td></tr>
</table>

6 : 3



3 · 3

(3 · **3**) · (6 **: 3**) = ______ · _____ = _______

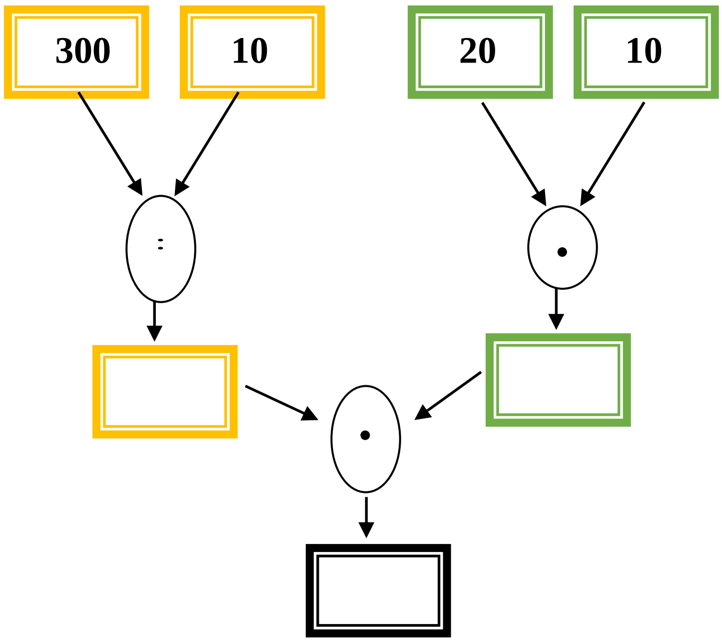
Први чинилац је повећан три пута, други чинилац је __________ ______ пута, а производ је ____________________________.

Задатак 2: *Изврши множење следећих бројева:*

300 · 20 =_______

Први чинилац је ______, други чинилац је_____, производ је број______.

Попуни математичко дрво и уочи како се мења производ када се први чинилац смањи, а други повећа исти број пута.



(300 : **10**) · (20 · **10**) = _____ · ______ = ______

Први чинилац је смањен _______ пута, други чинилац је __________ ______ пута, а производ је ____________________________.

***Закључак*: Ако се један од чинилаца повећа неколико пута, а други смањи исто толико пута, производ ________________________. Ово својство се назива сталност (непромењивост) производа.**

Наставни листић за самостално учење – средњи ниво

Истраживачки задатак: Открити шта се дешава са производом ако се један од чинилаца повећа неколико пута, а други смањи исто толико пута.
Задатак: Израчунај производ датих бројева: 20 · 300 = ________.
Први чинилац је ______, други чинилац је_____, производ је број______.
Попуни табеле, а затим уочи шта се дешава са производом када један чинилац повећамо, а други смањимо исти број пута.

a	**20 · 2**	**20 · 4**	**20 · 5**
b	**300 : 2**	**300 : 4**	**300 : 5**
a · b			

Како се у претходној табели мења први, а како други чинилац?__________________
Шта се десило са производом у колони у којој је први чинилац повећан два пута, а други чинилац смањен два пута? Производ ____.
Шта се десило са производом у колони у којој је први чинилац повећан пет пута, а други чинилац смањен пет пута? Производ ____.

a	**20 : 2**	**20 : 5**	**20 : 10**
b	**300 · 2**	**300 · 5**	**300 · 10**
a · b			

Како се у претходној табели мења први, а како други чинилац?____________________
Шта се десило са производом у колони у којој је први чинилац смањен два пута, а други чинилац повећан два пута? Производ ____.
Шта се десило са производом у колони у којој је први чинилац смањен пет пута, а други чинилац повећан пет пута? Производ ____.
Закључак: **Ако се један од чинилаца ________________, а други __________ исти број пута, производ ће _________________________________.**
Уместо бројева се могу ставити слова као замена за било који природан број. Ако су ***a, b, c*** и ***x*** природни бројеви и ако важи да је ***a · b = c,*** онда **(*a · x*) · (*b : x*) = ____** и **(*a : x*) · (*b · x*) = ____,** при чему су ***a*** и ***b*** дељиви са ***x.***
Ово својство се назива сталност (непромењљивост) ________________________.

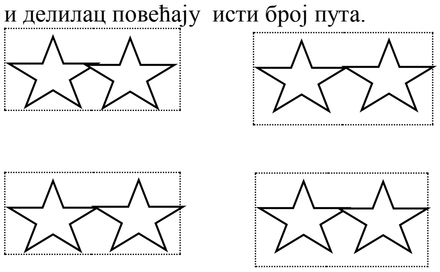
Наставни листић за самостално учење – напредни ниво

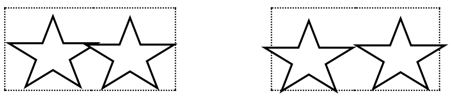
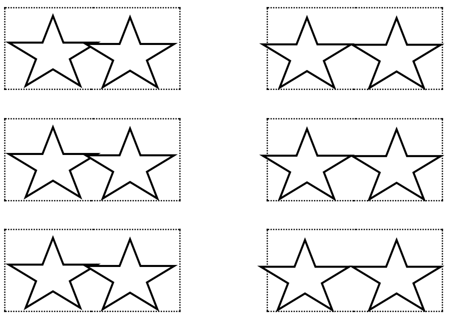
Истраживачки задатак: Открити шта се дешава са производом ако се један од чинилаца повећа неколико пута, а други смањи исто толико пута.
Задатак: *На такмичењу математичара учествовали су ученици четвртог разреда из једног града у Србији. Такмичење је трајало три дана.*
а) *Првог дана на такмичењу је учествовало 30 група са по 10 ученика. Колико је укупно ученика учествовало на такмичењу првог дана?*
_______ · _______=________
Први чинилац је ________, други чинилац је _______, производ је ___________.
б) *Другог дана на такмичењу је учествовало 3 пута мање група него првог дана, при чему је свака група имала троструко више такмичара. Колико је укупно ученика учествовало на такмичењу другог дана?*
(___ : ____) · (____ · ____) = _____ · _____ = _____
Шта се десило са бројем група?____
Како се променио број такмичара у свакој групи?____________________________________
Шта се десило са укупним бројем ученика другог дана у односу на први дан?____
У односу на пример под *а,* напиши шта се десило са првим, а шта са другим чиниоцем и каква је промена настала код производа____.
в) *Трећег дана на такмичењу је било двоструко више група у односу на први дан, при чему је свака група имала 2 пута мање такмичара. Колико је укупно ученика учествовало на такмичењу трећег дана?*
Напиши преко бројевног израза и израчунај вредност тог израза:
____
Шта се десило са укупним бројем ученика трећег дана у односу на први дан?____
У односу на пример под *а,* напиши шта се десило са првим, а шта са другим чиниоцем и каква је промена настала код производа._____ __________________________________
У претходним примерима уочи до каквих је промена дошло код чинилаца и шта се десило са производом. Шта закључујеш?
Закључак :____.
Ако су ***a, b*** и ***c*** природни бројеви и ако знаш да је ***a · b = c,*** допуни шта недостаје: **(*a · x*) · (*b :* ___) = *c*** и **(*a : x*) · (*b ·* ____) = *c,*** при чему су ***a*** и ***b*** дељиви са ***x.***
Ово својство се назива ____.

	– Ученици добијају повратну информацију о тачности у раду и извођењу закључака. Утврђују број тачних и погрешних одговора, исправљају грешке и, уз аргументовани разговор са учитељем и осталим ученицима исте групе, уче закључке наставне јединице. – Ученици увежбавају новоусвојена знања помоћу наставних листића на којима су задацима диференцирани на три нивоа сложености.
Верификативна фаза	– Прегледно понављање садржаја обрађених на часу (рекапитулација обрађених садржаја). Шта смо данас научили? Како можемо да мењамо чиниоце, а да производ остане непромењен? – Давање додатних подстицаја и задужења за рад. – Евалуација часа од стране ученика и учитеља.

<table>
<tr><th colspan="2">Вежба број 21</th></tr>
<tr><td>Наставна јединица:</td><td>Сталност количника</td></tr>
<tr><td>Тип часа:</td><td>обрада</td></tr>
<tr><td>Диференцијација захтева:</td><td>Основни ниво: Ученик треба да:
– препознаје, репродукује на једноставним примерима, вербално изражава и именује правило које се односи на сталност количника;
– препознаје сталност количника на цртежима којима је сталност представљена;
– препознаје примере који се односе на сталност количника.
Средњи ниво: Ученик треба да:
– на одговарајућим примерима или уз помоћ таблице уочи и схвати сталност количника;
– симболички (помоћу слова) записује вербално исказано правило које се односи на сталност количника;
– уочи (утврди) „скривене“ вредности слова у примерима у којима је сталност количника представљена;
– примењује знања о сталности количника као „олакшицу“ за рационалније рачунање количника у скупу N.
Напредни ниво: Ученик треба да:
– примењује знања о сталности количника у решавању текстуалних задатака који се односе на реалне животне ситације, као и на решавање проблемских задатака.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Ток часа</th></tr>
<tr><td>Припремна фаза</td><td>– Провера домаћег задатка.
– Обнављање о зависности количника од промене дељеника и делиоца.</td></tr>
<tr><td>Оперативна фаза</td><td>– Самостално учење путем наставних листића на којима су захтеви диференцирани на три нивоа, при чему сваки ученик добија наставни листић у складу са својим способностима.

Наставни листић за самостално учење – основни ниво

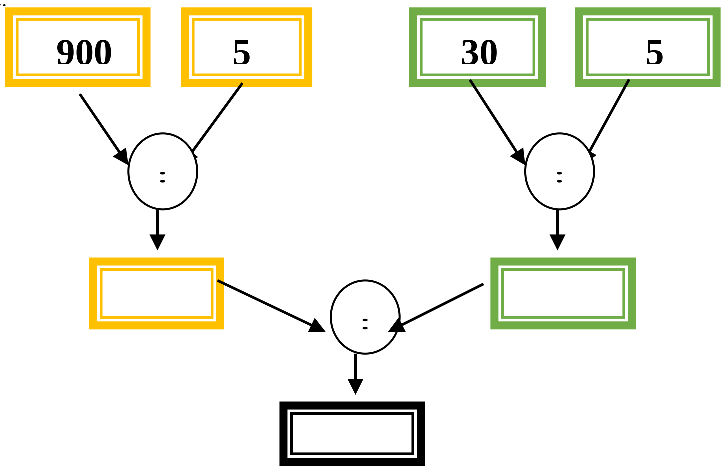
Истраживачки задатак 1 : Открити шта се дешава са количником ако се дељеник и делилац повећају исти број пута.
Задатак 1: Погледај следеће слике и уочи шта се дешава са количником када се и дељеник и делилац повећају исти број пута.

8 : 4 = _____

Дељеник је ______, делилац је_____, количник је број______.


(8 · 2) : (4 · 2) = ____ : _____ = _____

Дељеник је повећан два пута, делилац је
________ ______ пута, а количник је
____

Дакле, када и дељеник и делилац повећамо исти број пута, количник ће ____.</td></tr>
</table>

Истраживачки задатак 2: Открити шта се дешава са количником ако се дељеник и делилац смање исти број пута.
Задатак: *Изврши дељење следећих бројева:*
900 : 30 =_____
Дељеник је ______, делилац је_____, количник је број______.
Попуни математичко дрво и уочи како се мења количник када се дељеник и делилац смање исти број пута.



(900 **:** **5**) : (30 **:** **5**) = _____**:**_____ = ______
Дељеник је смањен пет пута, делилац је __________ ______ пута, а количник је ____________________________.
Дакле, када и дељеник и делилац смањимо исти број пута, количник ће _________________.
***Закључак*: Ако дељеник и делилац повећамо или смањимо исти број пута, количник ______.** Ово својство се назива **сталност (непромењљивост) количника.**

Наставни листић за самостално учење – средњи ниво

Истраживачки задатак 1: Открити шта се дешава са количником ако се дељеник и делилац повећају исти брј пута.
Задатак 1: Изврши дељење следећих бројева:
а) 1200 : 60 = ________
Дељеник је ______, делилац је________, количник је број______.
б) У наредним примерима уочи како се мењају дељеник и делилац (из примера под *а*) и како те промене утичу на количник.
(1200 · 2) : (60 · 2) = ____
Дељеник је повећан за _______, делилац је__________ за _____, количник се _____________.
(1200 · 5) : (60 · 5) =____
Дељеник је повећан за ______, делилац је _______ за ______, количник се ________________.
Дакле, када и дељеник и делилац повећамо____________ пута, количник ће _______________.
Истраживачки задатак 2: Открити шта се дешава са количником ако се дељеник и делилац смање исти број пута.
Задатак 2: Изврши дељење следећих бројева:
а) 1800 : 30 = ________
Дељеник је ______, делилац је________, количник је број______.
б) У наредним примерима уочи како се мењају дељеник и делилац (из примера под *а*) и како те промене утичу на количник.
(1800: 2) : (30 : 2) = ____
Дељеник је повећан за _______ , делилац је ________ за ______, количник се _____________.
(1800 : 10) : (30 :10) =____
Дељеник је повећан за ____ ___, делилац је________ за ______, количник се _______________.
Дакле, када и дељеник и делилац смањимо ______________ пута, количник ће _____________.

	Закључак: Ако дељеник и делилац _____________ или _________________ исти број пута, количник ____. Како се уместо бројева могу ставити слова као замена за било који природан број, претходни закључак можемо записати овако: ако је $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$, онда је $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}) : (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}) =$ ____ и $(\boldsymbol{a} : \boldsymbol{x}) : (\boldsymbol{b} : \boldsymbol{x}) =$ ____, при чему су $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ дељиви са $\boldsymbol{x}$. **Ово својство се назива сталност (непромењивост) _________________.** ***Наставни листић за самостално учење – напредни ниво*** **Истраживачки задатак**: Открити шта се дешава са количником ако се дељеник и делилац повећају или смање исти број пута. **Задатак**: Трка Формуле 1 која се организује у Монаку трајала је три дана. Учесници су били подељени у групе, а основно правило трке јесте да у свакој групи учествује исти број возача. *а) Првог дана је било 600 возача који су били подељени у шест једнакобројних група. Колико возача је било у свакој групи?* _______: _______=________ Дељник је ________, делилац је _______, количник је ___________. б) *Другог дана је број возача био троструко већи у односу на претходни дан и били су подељени у три пута више група. Колико возача је било у свакој групи?* Напиши преко бројевног израза и израчунај вредност тог израза: (____· ____) : (____ · ____) = ____ : ____ = ____ Шта се десило са бројем возача другог дана?____ Како се променио број група у које су били подељени учесници трке?__________________ Шта се десило са бројем возача у свакој групи? ___________________________________ У односу на пример под *а,* напиши шта се десило са дељеником, а шта са делиоцем и каква је промена настала код количника.____. *в) Трећег дана је било двоструко мање учесника него првог дана, па је и број група у које су били распоређени двоструко смањен у односу на први дан. Колико возача је било у свакој групи?* Напиши преко бројевног израза и израчунај вредност тог израза: ____ Шта се десило са бројем возача трећег дана у односу на први дан?____________________ Како се променио број група у које су били подељени учесници трке?_________________ Шта се десило са бројем возача у свакој групи трећег дана у односу на први дан?____ У односу на пример под *а,* напиши шта се десило са дељеником, а шта са делиоцем и каква је промена настала код количника.____. Да ли је сва три дана такмичења испоштовано правило да у свакој групи учествује исти број возача?____ Шта закључујеш? ***Закључак***: ____. Ако су $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ природни бројеви и ако знаш да је $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$, допуни шта недостаје: $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}) : (\boldsymbol{b} \cdot$ ___$) = \boldsymbol{c}$ и $(\boldsymbol{a} :$ ____$) : (\boldsymbol{b} : \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}$, при чему су $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ дељиви са $\boldsymbol{x}$. **Ово својство се назива ____.** – Ученици добијају повратну информацију о тачности у раду и извођењу закључака. Утврђују број тачних и погрешних одговора, исправљају грешке и, уз аргументовани разговор са учитељем и осталим ученицима исте групе, уче закључке наставне јединице. – Ученици увежбавају новоусвојена знања помоћу наставних листића на којима су задацима диференцирани на три нивоа сложености.
Верификативна фаза	– Прегледно понављање садржаја обрађених на часу (рекапитулација обрађених садржаја). Шта смо данас научили? – Давање додатних подстицаја и задужења за рад. – Евалуација часа од стране ученика и учитеља.

<table>
<tr><td colspan="2">Вежба број 22</td></tr>
<tr><td>Наставна јединица:</td><td>Сталност производа и количника</td></tr>
<tr><td>Тип часа:</td><td>систематизација</td></tr>
<tr><td>Диференцијација захтева:</td><td>Основни ниво: Ученик треба да:
– препознаје, репродукује на једноставним примерима, вербално изражава и именује правила која се односе на сталност производа и количника;
– препознаје сталност производа и количника на цртежима којима је сталност представљена;
– препознаје примере који се односе сталност производа и количника.
Средњи ниво: Ученик треба да:
– уочи на одговарајућим примерима и схвати сталност производа и количника;
– симболички (помоћу слова) записује вербално исказано правило које се односи на сталност производа и количника;
– уочи (утврди) „скривене“ вредности слова у примерима у којима је представљена сталност производа и количника;
– примењује знања о сталности производа и количника као „олакшицу“ за рационалније рачунање производа и количника у скупу N.
Напредни ниво: Ученик треба да:
– примењује знања о сталности производа и количника у решавању текстуалних задатака који се односе на реалне животне ситуације, као и на решавање проблемских задатака.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ток часа</td></tr>
<tr><td>Припремна фаза</td><td>– Провера домаћег задатка.
– Обнављање о сталности производа и количника.
– Циљ часа: увежбати стечена знања.</td></tr>
<tr><td>Оперативна фаза</td><td>– Самостални рад ученика на наставним листићима са диференцираним садржајима. Сваки наставни листић, поред задатака за конкретни ниво, садржи и задатке за наредни виши ниво.

Наставни листић за самостално вежбање – основни ниво
1. Количник двају бројева је 45:
а) Ако дељеник повећамо 15 пута и делилац повећамо 15 пута, количник ће __________.
б) Ако дељеник смањимо 9 пута и делилац смањимо 9 пута, количник ће __________.
Како се назива то својство?____.
2. Попуни празна поља тако да једнакости буду тачне.
а) 230 · 15 = 3450 б) 1800 : 200 = 9
(230 · 5) · (15 :______) = 3450 (1800 · 6) : (200 · _____) = 9
(230 :______) · (15 · 10) = 3450 (1800 :_____) : (200 : 20) = 9
3. На сваку линију упиши број који недостаје.
а) 39 · 21 = (39 · 7) · (21 : _____) б) 6615 : 245 = (6615 : ______) : (245 : 35)
в) 7896 : 329 = (7896 · ______) : (329 · 3) г) 81 · 21= (81 : 9) · (21 · ______)
4. Напиши које је својство коришћено ради лакшег израчунавања следеће једнакости:
а) $150:5=(150\cdot 4):(5\cdot 4)=600:20=30$
Коришћено је својство: ____;
б) Олакшај следеће израчунавање користећи својство сталности производа:
25 · 8 = (25 · 4) · (8 : ___) = ____________________________________

Наставни листић за самостално вежбање – средњи ниво
1. Ако први чинилац смањимо 7 пута, шта треба да урадимо са другим чиниоцем да би производ остао непромењен?____.
б) Ако делилац повећамо 3 пута, шта треба да урадимо са дељеником да би количник остао непромењен?____.

2. Попуни празна поља тако да једнакости буду тачне.
а) 789 · 112 = 88368
(789 · 14) · ______________________= 88368
_______________________ · (112 : 4) = 88368
б) 138348 : 244 = 567
(138348 : 4): ______________________= 567
_________________________: (244 · 6) = 567</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>3. Олакшај следећа израчунавања користећи својство сталности производа или количника:
1500 : 25 = (1500 · ____) : (25 · 4) = ____________________________
840 : 20 = ____________________________
50 · 16 = ____________________________
250 · 32 = ____________________________
4. Одреди вредност x у једнакостима:
125 · 30 = 3750
250 · (30 : x) = 3750   x = ______________
(125 · x) · 5 = 3750   x = ______________

Наставни листић за самостално вежбање – напредни ниво

1. Алекса је замислио два броја чији производ износи x. Ако се један од тих бројева повећа 12 пута, а други смањи 12 пута, добиће се 1728. Колики је производ бројева које је Алекса замислио?
____________________________.

2. Паковање од 10 украса за новогодишњу јелку кошта 1500 динара. Ако сви украси имају исту цену, колико кошта 5 украса из тог паковања? Примени својство сталности количника.
____
3. Површина правоугаоника износи 120 cm². Ако се дужина правоугаоника смањи два пута, а ширина повећа 2 пута, колика ће бити површина тог правоугаоника? Примени својство сталности производа.
Образложи одговор:____________________________
____________________________.
4. Миша је количнике датих бројева заменио количником других двају бројева. Како је рачунао? Образложи одговор.
3500 : 50 = 7000 : 100   ____________________________
1600 : 80 = 400 : 20   ____________________________
2100 : 70 = 6300: 210   ____________________________</td></tr>
<tr><td>Верификативна фаза</td><td>Повратна информација о тачности задатака са наставних листића.
– Давање додатних подстицаја и задужења за рад.
– Евалуација часа од стране ученика и учитеља.</td></tr>
</table>

Вежба број 23	
Наставна јединица:	*Једначине са множењем и дељењем*
Тип часа:	обрада
Диференцијација захтева:	***Основни ниво:*** Ученик треба да: – препознаје записе који представљају једначине са множењем и дељењем и непознату компоненту у њима; –записује одговарајућу једначину на основу идеографа (слике) и објасни (својим речима) поступак одређивања решења дате једначине; – решава експлицитно дате једноставне једначине са множењем и дељењем. ***Средњи ниво:*** Ученик треба да: – образложи поступак решавања и користи правила о инверзности рачунских операција за решавање једначина са множењем и дељењем у скупу *N*; – за једноставне текстуалне задатке који се односе на реалне животне ситуације саставља и решава одговарајућу једначину са множењем или дељењем; – саставља задатка за дату једначину са множењем или дељењем. ***Напредни ниво*:** Ученик треба да: – решава једначине (са две операције) у којима је непознат елемент чиниоца, дељеника или делиоца у скупу *N*; – решава сложене текстулне и проблемске задатке помоћу једначина са множењем и дељењем.
Ток часа	
Припремна фаза	– Обнављање о: а) компонентама рачунских радњи множење и дељење; б) вези множења и дељења; в) решавању једначина са множењем и дељењем у скупу бројева до 1000. – Циљ часа: открити како се решавају једначине са вишецифреним бројевима и како се та знања могу користити у решавању практичних задатака.

– Самостално учење путем наставних листића на којима су захтеви диференцирани на три нивоа, при чему сваки ученик добија наставни листић у складу са својим способностима.

Наставни листић за самостално учење – основни ниво

Истраживачки задатак 1: Открити како се израчунава непознати чинилац у скупу *N*.
Пример 1: *Производ броја 7 и непознатог броја износи 560. Одреди непознати број.*
Погледај слику, постави и реши једначину.

560						
x	***x***	***x***	***x***	***x***	***x***	***x***

Решење 1: ______ · *x* =________
У претходној једнакости први чинилац је ________, други чинилац је __________, производ износи__________.
Ова једнакост представља једначину са непознатим________________.
Погледај слику и одговори како можемо израчунати вредност *x*?
x = ________ : _________
x = ________, тј. производ смо поделили _____________ чиниоцем и добили _____________.
Решење једначине је број __________.
Проверу тачности решења ћемо извршити тако што добијено решење, тј. број________, заменимо у полазној једначини и утврђујемо да је _______ · ________=_________, тј. _______=________.
На основу претходног примера изведи закључак о израчунавању непознатог чиниоца.
***Закључак 1*: Непознати чинилац се израчунава тако што се __________________ подели _____________________.**
Истраживачки задатак 2: Открити како се израчунава непознати дељеник у скупу *N*.
Пример 2: *Који број треба поделити бројем 8 да би количник био 40?*
Погледај слику, постави и реши једначину.

x							
40	**40**	**40**	**40**	**40**	**40**	**40**	**40**

Оперативна фаза

Решење 2: x :_________= _________
У овој једнакости x представља ________, делилац је број _________, количник је број ________.
Једнакост представља једначину са непознатим ________________.
Погледај слику и одговори како можемо израчунати вредност x?
x = _______ · ________
x = ______
Дакле, помножили смо___________ и ____________ и добили____________.
Провера: ________________
____
Решење једначине је број_______.
На основу претходног примера изведи закључак о израчунавању непознатог дељеника.
Закључак 2. **Непознати дељеник се израчунава тако што се ____________ и ____________ помноже.**
Истраживачки задатак 3: Открити како се израчунава непознати делилац у скупу N.
Пример 3: *Број 250 умањи неколико пута тако да количник буде број 10. Одреди непознати број.*
Погледај слику, постави и реши једначину.

250							
10	**10**	**10**	**10**	**...**	**10**	**10**	**10**

Решење 3: ______: x =________
У овој једнакости дељеник је број ________, x је _________, а количник је _______. Дакле, ово је једначина са непознатим _________________.
Погледај слику и одговори како можемо израчунати вредност x?
x = ______ : ________
x = ______ ,
Дакле, поделили смо _______________ са ________________ и добили_________________.
Провера: ________________
____
На основу претходног примера изведи закључак о израчунавању непознатог делиоца.
Закључак 3: **Непознати делилац се израчунава тако што се _________ подели ___________.**

Наставни листић за самостално учење – средњи ниво
Истраживачки задатак 1: Открити како се израчунава непознати чинилац у скупу N.
Пример1: *Ана, Неда и Маја су имале подједнаку суму новца. Пошто су желеле да купе лутку која кошта 1350 динара, рачунале су и установиле да треба све три да удруже свој новац како би имале тачно онолико колико кошта лутка. По колико динара је имала свака девојчица?*
Решење1: С обзиром на то да не знамо колико динара има свака од девојчица, тај број обележавамо са ______. На основу услова задатка састави одговарајућу једначину: ______ · _______= ________.
Први чинилац је ________, други чинилац је _________, а производ је _______.
Дакле, претходна једнакост представља једначину са _____________.
Како можемо израчунати по колико динара је имала свака девојчица ако знамо колико су имале све три укупно?____.
Дакле, x = ______________, x = _____, тј. производ смо _______________ и добили ____________
Провера: _______ · ________= ________
Решење једначине је: ________.
Одговор на питање у задатку:____.
На основу претходног примера изведи закључак о израчунавању непознатог чиниоца.
Закључак 1: ____
Ако је $\boldsymbol{a \cdot x = b}$, онда је $\boldsymbol{x}$ =_____:_____ и $\boldsymbol{x \cdot a = b}$, онда је $\boldsymbol{x}$ =___:___ (a, b и x су из скупа N).
Истраживачки задатак 2: Открити како се израчунава непознати дељеник у скупу N.
Пример 2: *Миња је у шуми брала шумске јагоде. Када се вратила кући, одлучила је да све јагоде које је убрала равномерно подели са Тањом, Нином и Ањом, па је свака девојчица добила по 60 јагода. Колико је јагода Миња убрала?*
Решење 2: С обзиром на то да не знамо колико је јагода Миња убрала, тај број обележавамо са _____.
На основу података датих у задатку састави одговарајућу једначину:
Једначина: ________ : _______=________. Ово је једначина са непознатим _____________.

Како можемо израчунати колико је Миња убрала јагода, ако знамо по колико је јагода добила свака од четири девојчице?________ _______________________________________.
Дакле, x = ________________________, x = ______.
Тј. количник смо ____________ са ___________ и добили __________.
Провера:_____________, ____________, решење једначине је ________.
Одговор на питање у задатку:____.
На основу претходног примера изведи закључак о израчунавању непознатог дељеника.
Закључак 2: ____.
Ако је $\boldsymbol{x : a = b}$, онда је $\boldsymbol{x}$ =______ $\cdot$ _______ (a, b и x су из скупа N).
Истраживачки задатак 3: Открити како се израчунава непознати делилац у скупу N.
Пример 3: *У четвртом разреду једне школе има 175 ученика. Ученици су подељени у неколико одељења тако да у сваком одељењу има по 25 ученика. Колико је одељења четвртог разреда у тој школи?*
Решење 3: Како нам је непознат број одељења ученика четвртог разреда, тај број обележавамо са _____.
На основу података датих у задатку састави одговарајућу једначину:
Једначина: _______ : ________= _______
Дељеник је ________, делилац је _________, количник је _______.
Дакле, ово је једначина са непознатим_____________.
Како можемо израчунати број одељења, ако знамо укупан број ученика и број ученика у сваком одељењу?____.
Дакле, x = __________ x = _______. Тј. __________ смо поделили ______ и добили _______.
Провера:_____________, ____________, решење једначине је ________.
Одговор на питање у задатку: ____.
На основу претходног примера изведи закључак о израчунавању непознатог делиоца.

Закључак 3: ____.
Ако је $\boldsymbol{a : x = b}$, онда је $\boldsymbol{x}$ =______:_______ (a, b и x су из скупа N).

Наставни листић за самостално учење – напредни ниво

Истраживачки задатак 1: Открити поступак решавања сложених једначина са множењем.
Пример 1: Прочитај следеће изразе:
8 $\cdot$ (9 – 5) – *производ броја 8 и разлике бројева 9 и 5*
(100 – 40) : 20 – *количник _________ бројева __________ и броја ______________________*
160 : (10 + 30) – *количник броја ________ и ____________ бројева _____________________*
На почетку часа смо се подсетили како смо решавали једначине са непознатим чиноцем у трећем разреду. На исти начин се решавају једначине са множењем у скупу **N**, тј. *непознати чинилац се израчунава тако што*_______________________________________.
Пример 2*:* *Мила има неку уштеђевину. Када би скупила још два пута толико новца колико има сада и кад би јој мама дала још 500 динара, имала би 2000 динара. Колика је Милина уштеђевина?*
Како не знамо колика је Милина уштеђевина, тај број ћемо обележити нпр. са x.
На основу услова задатка постави одговарајућу једначину:

$x + 2 \cdot x +$ _______= 2000
______ + _______= 2000

> **Треба да знаш!**
> $\mathbf{2 \cdot x} = x + x$,тј. на два места по x
> $\mathbf{3 \cdot x} = x + x + x$, тј. на три места по x
> $\mathbf{2 \cdot x + 3 \cdot x = 5 \cdot x}$

Овај израз представља збир ______________________________ и броја_______.
Дакле, први сабирак је израз______________, други сабирак је _______, збир је ________.
У овој једначини је непознат _______________________ . (подвуци га)
Реши једначину (издвајамо непознато и примењујемо научени поступак решавања једначина):
$3 \cdot x$ =______– _______
$3 \cdot x$ = _____ добили смо једначину са непознатим___________.
Ову једначину си научио/ла да решаваш раније.
x = ____________
x = ____
Провера: 3 $\cdot$ _____ + _______= 2000
______+______=________
_______ =_________
Решење једначине је број______.
Одговор на питање у задатку: ____.
Истраживачки задатак 2: Открити поступак решавања једначина у којима је непознат

	елемент дељеника. На почетку часа смо се подсетили како смо решавали једначине са непознатим дељеником у трећем разреду. На исти начин се решавају и једначине са непознатим дељеником и делиоцем у скупу N. **Пример 3:** *Неда је имала одређени број јабука. Од тетке је добила још 60, па је затим све јабуке поделила петорици другова,и то тако да је сваки од њих добио по 50 јабука. Колико је Неда имала јабука?* Решење: Како не знамо колико је Нада имала јабука, тај број ћемо обележити нпр. са x. Постави одговарајућу једначину: (x +______) :______ = ________ Овај израз представља количник ____ и броја_______. Дакле, дељеник је израз____________________, делилац је _______, а количник је ________. У овој једначини је непознат ______________________. (подвуци га) Реши једначину (издвајамо непознато и примењујемо научени поступак решавања једначина): x + ______=________________ x +_____= _____ – сада смо добили једначину са непознатим___________. Ову једначину си научио/ла да решаваш раније. x =____________ x = ____ Провера: (____ +_____) : ____=_____ ______: ______=_____ ______ =_______ Решење једначине је број ______. Одговор на питање у задатку: ____. **Истраживачки задатак 3**: Открити поступак решавања једначина у којима је непознат елемент делиоца. **Пример 4.** *Када је Мила поделила број 1589 збиром непознатог броја и броја 212, добила је број 7. Који је тај непознати број?* Постави одговарајућу једначину: _______ : (x + ______) = _______ Овај израз представља количник броја_____________ и ________________. Дакле, дељеник је број_________, делилац је израз___________, а количник је ________. У овој једначини је непознат ______________________. (подвуци га) Реши једначину (издвајамо непознато и примењујемо научени поступак решавања једначина): x + ______ = __________________ x + ______= _______ – добили смо једначину са непознатим___________________. Ову једначину си већ научио/ла да решаваш раније. x =____________ x = _______ Провера: ____________________________ ________+________=_______ _______ =___________ Решење једначине је број __________. *Одговор на питање у задатку*: ____. – Ученици добијају повратну информацију о тачности у раду и извођењу закључака. Утврђују број тачних и погрешних одговора, исправљају грешке и, уз аргументовани разговор са учитељем и осталим ученицима исте групе, уче закључке наставне јединице. – Ученици увежбавају новоусвојена знања помоћу наставних листића на којима су задацима диференцирани на три нивоа сложености.
Верификативна фаза	– Прегледно понављање садржаја обрађених на часу (рекапитулација обрађених садржаја). – Давање додатних подстицаја и задужења за рад. – Евалуација часа од стране ученика и учитеља.

Вежба број 24	
Наставна јединица:	*Једначине са множењем и дељењем*
Тип часа:	утврђивање
Диференцијација захтева:	***Основни ниво:*** Ученик треба да: – препознаје записе који представљају једначине са множењем и дељењем и непознату компоненту у њима; –записује одговарајућу једначину на основу идеографа (слике) и објасни (својим речима) поступак одређивања решења дате једначине; – решава експлицитно дате једноставне једначине са множењем и дељењем. ***Средњи ниво:*** Ученик треба да: – образложи поступак решавања и користи правила о инверзности рачунских операција за решавање једначина са множењем и дељењем у скупу N; – за једноставне текстуалне задатке који се односе на реалне животне ситуације саставља и решава одговарајућу једначину са множењем или дељењем; – саставља задатка за дату једначину са множењем или дељењем. ***Напредни ниво*:** Ученик треба да: – решава једначине (са две операције) у којима је непознат елемент чиниоца, дељеника или делиоца у скупу N; – решава сложене текстулне и проблемске задатке помоћу једначина са множењем и дељењем.
Ток часа	
Припремна фаза	– Провера домаћег задатка. – Обнављања претходно усвојених садржаја о решавању једначина са множењем и дељењем. – Циљ часа: утрдити и систематизовати стечена знања о једначинама са множењем и дељењем у скупу N.

Оперативна фаза

– Самостално учење путем наставних листића на којима су захтеви диференцирани на три нивоа, при чему сваки ученик добија наставни листић у складу са својим способностима.

Наставни листић за самостално вежбање – основни ниво

1. Допуни започете реченице:
   а) Непознати чинилац израчунавамо тако ___________________________________.
   б) Непознати делилац израчунавамо тако што_____________________________.
2. Реши једначине:
   а) $x : 100 = 9$ б) $840 : x = 7$
   $x =$ ____ $\cdot$ ____ ___________________
   $x =$ _____ ___________________
   Пр: ____:____=______ Пр: ___________________
3. Попуни табелу:

Први чинилац	25	10	
Други чинилац		45	10
Производ	250		980

4. Којим бројем треба поделити број 990 да би се добио број 9?
   Једначина:____
   Провера: ____
5. Милан је замислио неки број. Када је тај број помножио са 6, добио је број 720. Који је број Милан замислио?
   Једначина:____

   Провера: ______________________________________

Наставни листић за самостално вежбање – средњи ниво

1. Реши једначине:
   а) $(10950 – 10850) \cdot x = 1800$ б) $x : (1607 – 1482) = 1375$
   ______________________ ______________________
   ______________________ ______________________

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
______________________ ______________________
______________________ ______________________

2. Тата је својих 2250 динара равномерно поделио својим синовима тако да је сваки од њих добио по 750 динара. Колико тата има синова?
Једначина:____
____
____
______
3. Када би Душан имао пет пута мање новца него што има, могао би да купи књигу која кошта 200 динара и остао би му кусур од 80 динара. Колико динара има Душан?
Једначина:____
____
____

4. Састави текст задатка за дату једначину, а затим је реши:
$9 \cdot a = 1305$
____
____
____
Једначина:____
____
Провера: ____

Наставни листић за самостално вежбање – напредни ниво
1. Реши једначине:
а) $6 \cdot x - 150 = 120$ б) $2500 + x : 10 = 3700$
______________________ ______________________
______________________ ______________________
______________________ ______________________
______________________ ______________________
ПР: ______________________ ПР:______________________
2. У неколико врећа је било по 50 kg кромпира. У гајбицама је било још 190 kg, тако да је укупна количнина кромпира 840 kg. У колико врећа је смештен кромпир?
Једначина: ____
____
Провера: ____

3. Број 4200 Душан је поделио са неким бројем, добијени количник смањио за 40 и добио број 60. Којим бројем је Душан поделио број 4200?
Једначина: ____
____
Провера: ____

4. Бака је петину своје пензије поделила тројици унука тако да је сваки од њих добио по 1000 динара. Колика је бакина пензија?
Једначина: ____
____
Провера: ____
5. У 20 кутија је било по 7 црвених и неколико плавих бојица. Укупно је било 320 бојица. По колико је било плавих бојица, ако се зна да је у свакој кутији био подједнак број бојица?
Једначина: ____
Провера: ____
</td>
</tr>
<tr>
<td>Верификативна фаза</td>
<td>
– Повратна информација о тачности задатака са наставних листића.
– Давање додатних подстицаја и задужења за рад.
– Евалуација часа од стране ученика и учитеља.
</td>
</tr>
</table>

ПРИЛОГ 6. Статистичке табеле

Расподеле података Е и К групе за три мерења

Експериментална група			Statistic	Std. Error
Укупно_иницијално мерење	Mean		40,1212	1,63699
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	36,8829	
		Upper Bound	43,3596	
	5% Trimmed Mean		40,3030	
	Median		40,0000	
	Variance		53,726	
	Std. Deviation		18,80760	
	Minimum		4,00	
	Maximum		72,00	
	Range		68,00	
	Interquartile Range		29,00	
	Skewness		,060	,211
	Kurtosis		-,872	,419
Укупно_финално мерење	Mean		51,4242	1,99070
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	47,4862	
		Upper Bound	55,3623	
	5% Trimmed Mean		51,8636	
	Median		50,5000	
	Variance		73,101	
	Std. Deviation		22,87140	
	Minimum		8,00	
	Maximum		85,00	
	Range		77,00	
	Interquartile Range		37,00	
	Skewness		-,079	,211
	Kurtosis		-1,046	,419

Укупно_ретест	Mean		49,8485	1,96680
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	45,9577	
		Upper Bound	53,7393	
	5% Trimmed Mean		50,0677	
	Median		49,0000	
	Variance		75,618	
	Std. Deviation		22,59686	
	Minimum		8,00	
	Maximum		85,00	
	Range		77,00	
	Interquartile Range		41,00	
	Skewness		-,105	,211
	Kurtosis		-1,031	,419

Контролна група			Statistic	Std. Error
Укупно_иницијално мерење	Mean		40,3256	1,72498
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	36,9124	
		Upper Bound	43,7387	
	5% Trimmed Mean		40,1723	
	Median		40,0000	
	Variance		65,846	
	Std. Deviation		19,59200	
	Minimum		8,00	
	Maximum		78,00	
	Range		70,00	
	Interquartile Range		38,00	
	Skewness		,155	,213
	Kurtosis		-1,027	,423

	Mean		41,8682	1,68729
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	38,5296	
		Upper Bound	45,2068	
	5% Trimmed Mean		41,6641	
	Median		41,0000	
	Variance		67,256	
Укупно_финално мерење	Std. Deviation		19,16392	
	Minimum		,00	
	Maximum		80,00	
	Range		80,00	
	Interquartile Range		34,00	
	Skewness		,102	,213
	Kurtosis		-,854	,423
	Mean		38,9380	1,66395
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	35,6456	
		Upper Bound	42,2304	
	5% Trimmed Mean		38,7941	
	Median		39,0000	
	Variance		67,168	
Укупно_ретест	Std. Deviation		18,89889	
	Minimum		,00	
	Maximum		78,00	
	Range		78,00	
	Interquartile Range		28,00	
	Skewness		,093	,213
	Kurtosis		-,751	,423

a. Група = Контролна

БИОГРАФИЈА

Сања Анђелковић, девојачко Јанковић, рођена је 04.07.1986. године у Врању. Основне академске студије завршила је на Педагошком факултету у Врању Универзитета у Нишу 2010. године. На истом фкултету завршила је и мастер академске студије 2013. године одбранивши мастер рад из научне области Методика наставе математике на тему *Проблемска настава и ефикасност остваривања програмских задатака о једначинама.*

Докторске академске студије уписала је школске 2013/2014. године на Педагошком факлтету у Ужицу Универзитета у Крагујевцу. Све испите предвиђене студијским програмом положила је просечном оценом 9,75.

Професионалну каријеру започела је 2012. године на Педагошком (Учитељском) факултету у Врању Унивезитета у Нишу, и то од 2012–2014 као ***сарадник у настави*** за ужу научну област Методика наставе математике, а од 2014. године као ***асистент*** на предметима из уже научне области Методика наставе математике и информатике.

Ангажована је на предметима: *Методика наставе математике*, *Методички практикум математике*, *Методика развијања почетних математичких појмова 1*, *Методика развијања почетних математичких појмова 2 и Методика наставе информатичког образовања*.

Као аутор или коаутор објавила је више научних радова из области Методика наставе математике. Учесник је и на домаћим и међународним конференцијама и научним скуповима из исте научне области.

Образац 1

ИЗЈАВА АУТОРА О ОРИГИНАЛНОСТИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Сања Анђелковић, изјављујем да докторска дисертација под насловом:

"Учење путем открића на диференцираним садржајима алгебре и његови ефекти у почетној настави математике"

која је одбрањена на Педагошком факултету у Ужицу Универзитета у Крагујевцу представља *оригинално ауторско дело* настало као резултат *сопственог истраживачког рада*.

Овом Изјавом такође потврђујем:

- да сам *једини аутор* наведене докторске дисертације,
- да у наведеној докторској дисертацији *нисам извршио/ла повреду* ауторског нити другог права интелектуалне својине других лица,
- да умножени примерак докторске дисертације у штампаној и електронској форми у чијем се прилогу налази ова Изјава садржи докторску дисертацију истоветну одбрањеној докторској дисертацији.

У Ужицу, 22.8.2022. године,

Сања Анђелковић

потпис аутора

Образац 2

ИЗЈАВА АУТОРА О ИСКОРИШЋАВАЊУ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Сања Анђелковић,

- [x] дозвољавам
- [ ] не дозвољавам

Универзитетској библиотеци у Крагујевцу да начини два трајна умножена примерка у електронској форми докторске дисертације под насловом:

"Учење путем открића на диференцираним садржајима алгебре и његови ефекти у почетној настави математике"

која је одбрањена на Педагошком факултету у Ужицу Универзитета у Крагујевцу, и то у целини, као и да по један примерак тако умножене докторске дисертације учини трајно доступним јавности путем дигиталног репозиторијума Универзитета у Крагујевцу и централног репозиторијума надлежног министарства, тако да припадници јавности могу начинити трајне умножене примерке у електронској форми наведене докторске дисертације путем *преузимања*.

Овом Изјавом такође

- [x] дозвољавам
- [ ] не дозвољавам[1]

[1] Уколико аутор изабере да не дозволи припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци, то не искључује право припадника јавности да наведену докторску дисертацију користе у складу са одредбама Закона о ауторском и сродним правима.

припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од следећих *Creative Commons* лиценци:

1) Ауторство

2) Ауторство - делити под истим условима

3) Ауторство - без прерада

4) Ауторство - некомерцијално

5) Ауторство - некомерцијално - делити под истим условима

6) Ауторство - некомерцијално - без прерада[2]

У Ужицу, 22.8.2022. године,

Сања Анђелковић

потпис аутора

[2] Молимо ауторе који су изабрали да дозволе припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци да заокруже једну од понуђених лиценци. Детаљан садржај наведених лиценци доступан је на: http://creativecommons.org.rs/